

# Euler 方程式을 滿足하는 形狀函數를 利用한 보 有限要素모델

## A Finite Element Beam Model Using Shape Functions that Satisfy the Euler Equations

金	昞	燦*
Kim,	Gyong	Chan
申	英	湜**
Shin,	Young	Shik
金	成	旭***
Kim,	Sung	Wook

### Abstract

A set of the shape functions which perfectly satisfy the homogeneous Euler equations has been proposed for deep beam problems. A finite element beam model using the proposed shape functions has been derived by the Galerkin weighted residual method and used to analyze the numerical examples without reduced shear integration, to show the accuracy and efficiency of the proposed shape functions. The result shows that the finite element model using the proposed shape functions gives very accurate solutions for both static and free vibration analyses. The concept of the proposed shape functions is thought to be applied for the finite element analysis of the elasto-static problems.

### 要 旨

本 研究에서는 포텐셜에너지 理論을 바탕으로 彈性靜力學的 問題에 대한 제차 Euler 方程式을 완벽히 滿足하는 새로운 形態의 形狀函數를 提案하였다.

Shear locking 現象을 피하기 위한 減差積分이 必要없는 이 形狀函數를 使用한 보 有限要素를 Galerkin 加重殘差法으로 誘導하여 보의 自由振動과 靜力學的 問題를 解析하여 이 形狀函數의 效率性과 正確度를 考察하였다.

本 研究에서 提案된 形狀函數를 利用한 有限要素解는 보의 靜的解析의 경우 正確解와 완벽히 一致하였으며 自由振動解析의 경우에도 越等한 正確度를 보여주었다.

따라서 本 研究에서 提案된 形狀函數의 概念은 모든 彈性靜力學的 問題의 有限要素解를 구하는데 適用될 수 있다고 사료된다.

\* 正會員 · 嶺南大學校 工科學 教授, 土木工學科

\*\* 正會員 · 嶺南大學校 工科學 助教授, 土木工學科

\*\*\* 正會員 · 嶺南大學校 大學院 土木工學科

# 1. 序 論

有限要素法이 構造工學分野에 導入되고 컴퓨터가 發達됨에 따라 각기 다른 自由度와 節點數, 다른 形態의 形狀函數를 使用한 많은 보 有限要素들이 開發되었다. 이러한 보 有限要素들의 正確度는 假定한 形狀函數가 각 構造部材의 實際變形을 어느 정도 正確히 나타내는가에 의하여 決定된다.

1965年 Stricklin<sup>(1)</sup>은 等分布荷重을 받는 캔틸레버 보에 대하여 하나의 要素를 利用한 有限要素解가 實際 正確解와 거의 一致함을 發表하였으며 Filho<sup>(2)</sup>는 Stricklin의 有限要素解가 實際 正確解가 거의 一致하는 이유가 假定된 形狀函數가 實際 構造物의 각 部材의 變形形狀과 一致하였기 때문이라고 言及하였다.

1969年 Tong<sup>(3)</sup>은 만약 假定된 形狀函數들이 제차 Euler 方程式을 滿足한다면 節點의 變位를 正確하게 구할 수 있다는 사실을 單純 從屬變數를 가진 1次元 問題에 대하여 證明하였다.

本 研究에서는 이와 같은 Tong의 概念을 鉛直처짐(transverse deflection)과 平面回轉角(plane rotation)을 從屬變數로 갖고 剪斷變形과 回轉慣性의 影響을 考慮한 梁은 보 要素에 應用하여 제차 Euler 方程式을 滿足하는 새로운 形狀函數를 誘導하고, 이 形狀函數를 利用한 2節點 4自由度를 갖는 간단하고 正確한 보 要素를 開發하여 提案된 形狀函數의 適合성과 效率성을 考察하고자 한다.

## 2. Euler 方程式의 誘導

### 2.1. Euler 方程式

一般的인 1次元 彈性力學의 問題에 대한 전체포텐셜에너지(total potential energy)<sup>(4,5)</sup>는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi = U + V \dots\dots\dots(1)$$

여기서  $U$ 는 變形에너지,  $V$ 는 포텐셜에너지이다. (1)式을 獨立變數  $x$ 와 從屬變數  $y$ 의 函數로 나타내면

$$\Pi(y) = F(y, y) - \int_L y^T Q dx - y^T P \Big|_0^L \dots(2)$$

여기서  $F(y, y)$ 는 보의 變形에너지로  $y$ 의 2次函數, 右邊 두번째와 세번째項은 分布荷重  $Q(x)$ 와 境界點에 作用하는 힘  $P$ 에 의한 포텐셜에너지,  $L$ 은 部材의 길이이다. (2)式의 1次變分을 取하면

$$\delta \Pi(y) = \delta F(y, y) - \int_L \delta y^T Q dx - \delta y^T P \Big|_0^L \dots(3)$$

그런데  $F(y, y)$ 가  $y$ 의 2次函數이므로

$$\delta F(y, y) = F(y, \delta y) \dots\dots\dots(4)$$

(4)式에 Gauss-Green<sup>(6)</sup> 定理를 適用하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta F(y, y) = - \int_L \delta y^T L(y) dx + \delta y^T B(y) \Big|_0^L \dots(5)$$

여기서  $L(y)$ ,  $B(y)$ 는 線型微分演算子(linear differential operator)이다. (5)式을 (3)式에 代入하여 정리하면

$$\delta \Pi(y) = - \int_L \delta y^T [L(y) + Q] dx + \delta y^T [B(y) - P] \Big|_0^L \dots\dots\dots(6)$$

또는

$$\delta \Pi(y) = F(y, \delta y) - \int_L \delta y^T Q dx - \delta y^T P \Big|_0^L \dots(7)$$

여기서 (6)式은  $\delta \Pi$ 의 weak form, (7)式은 canonical form이다. 一般的으로 連續體에서 stationary 狀態가 되려면

$$\delta \Pi(y) = - \int_L \delta y^T [L(y) + Q] dx + \delta y^T [B(y) - P] \Big|_0^L = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$\delta(y) \neq 0$ 이므로 (8)式을 滿足하는 Euler 方程式은

$$L(y) + Q = 0 \quad (x=0, L) \dots\dots\dots(9)$$

그리고 境界 條件式은

$$B(y) - P = 0 \quad (x=0, x=L) \dots\dots(10)$$

### 2.2. 有限要素解의 正確度에 대한 考察

$y^0(x)$ 를 實際의 變位函數, 實際의 正確한 節點變位를  $U^0$ 라 하면 節點變位  $U^0$ 를 갖는 假定한 變位函數  $\hat{y}(x)$ 는 다음과 같이 形狀函數  $N(x)$

와 節點變位  $U^0$  로 나타낼 수 있다.

$$\hat{u}(x) = \sum_{I=1}^m N^I(x) (U^0)^I \quad (I=1, 2, 3, \dots, m) \quad \dots(11)$$

여기서  $m$  은 節點數이다.

한편 實際의 變位函數와 假定한 變位函數의 誤差를  $\bar{u}$  라 하면

$$u^0(x) = \hat{u}(x) + \bar{u}(x) \quad \dots(12)$$

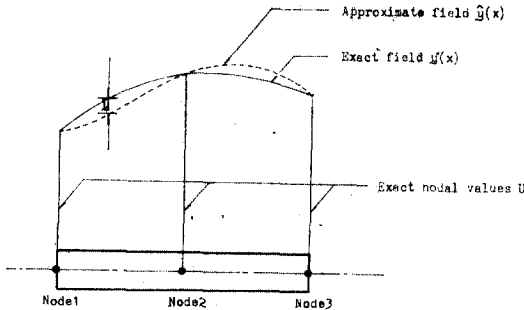


그림 1. Profile of actual field  $u^0$  and approximate field  $\hat{u}$  interpolated from exact nodal values  $U^0$  using assumed shape functions.

그런데 전체시스템의 포텐셜에너지는 각 有限要素의 포텐셜에너지의 합으로 쓸 수 있으므로

$$H = \sum_{e=1}^n H_e \quad \dots(13)$$

(12)식과 (13)식을 利用하고  $u$  대신  $u^0$  를 (7)식에 代入하면

$$\begin{aligned} \delta H(u^0) &= \sum_{e=1}^n F_e(\bar{u} + \hat{u}, \delta\bar{u} + \delta\hat{u}) \\ &- \sum_{e=1}^n \int_{L_e} (\delta\bar{u} + \delta\hat{u})^T Q_e dx \\ &- (\delta\bar{u} + \delta\hat{u})^T P \Big|_0^L \quad \dots(14) \end{aligned}$$

그리고 (6), (7)식을 利用하여 (14)를 變形시키면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta H(u^0) &= \delta H(\hat{u}) - \sum_{e=1}^n \int_{L_e} \delta\bar{u} [L(\bar{u}) + Q_e] dx \\ &+ \sum_{e=1}^n \delta\bar{u}^T B(\bar{u}) \Big|_0^{L_e} - \delta\bar{u}^T P \Big|_0^L \\ &+ \sum_{e=1}^n \left[ - \int_{L_e} \delta\bar{u}^T L(\hat{u}) dx + \delta\bar{u}^T B(\hat{u}) \Big|_0^{L_e} \right] \\ &+ \sum_{e=1}^n \left[ - \int_{L_e} \bar{u}^T L(\delta\hat{u}) dx + \bar{u}^T B(\delta\hat{u}) \Big|_0^{L_e} \right] \\ &\dots(15) \end{aligned}$$

그런데 節點에서 正確解와 有限要素解의 誤差  $\bar{u}=0$  이 되어야 하므로  $\delta\bar{u}=0$  이 된다.

따라서

$$\begin{aligned} \delta H(u^0) &= \delta H(\hat{u}) - \sum_{e=1}^n \int_{L_e} \delta\bar{u} [L(\bar{u}) + Q_e] dx \\ &- \sum_{e=1}^n \int_{L_e} \delta\bar{u}^T L(\hat{u}) dx - \sum_{e=1}^n \int_{L_e} \bar{u}^T L(\delta\hat{u}) dx \\ &\dots(16) \end{aligned}$$

(16)식의 右邊 두번째, 세번째 項이 모두 0 이 되던 (16)식은 다음과 같다.

$$\delta H(u^0) = \delta H(\hat{u}) \quad \dots(17)$$

그런데 實際의 變位  $u^0(x)$  에 대한 stationary 포텐셜에너지는  $\delta H(u^0) = 0$  이므로 따라서 節點에서의 有限要素解는 正確解와 一致하게 되며 (17)식이 成立하기 위해서는 앞에서 言及한 (16)식의 右邊 세 項이 0 이 되기 위해서는 (11)식에 대한 形狀函數  $N(x)$  가 체차 Euler 方程式을 滿足해야 한다.

$$\text{即, } L(N^I) = 0 \quad \dots(18)$$

따라서 (11)식으로부터

$$L(\hat{u}) = \sum_{I=1}^m L[(N^I)(U^0)^I] = 0 \quad \dots(19)$$

$$L(\delta\hat{u}) = \sum_{I=1}^m L[(N^I)(\delta U^0)^I] = 0 \quad \dots(20)$$

그러므로 (18)식이 成立하면 有限要素解와 正確解는 一致하게 된다.

### 3. 깊은 보 有限要素

#### 3.1. 깊은 보에 대한 Euler 方程式

깊은 보에서는 보의 中立軸에 垂直인 斷面은 變形 後에 平面을 유지하나 剪斷變形 때문에 中立軸과 垂直을 이루지는 않는다. 따라서 鉛直처짐과 平面回轉角이 모두 獨立變數가 되며 剪斷變形과 回轉慣性의 影響을 考慮하여야 한다.

$\omega$  를 鉛直처짐,  $\theta$  를 平面의 回轉角이라 하면 變位函數  $u$  는

$$u = \{\theta \ \omega\}^T \quad \dots(21)$$

따라서 깊은 보의 變形에너지函數는 다음과 같

이 쓸 수 있다.

$$F(u, u) = \frac{1}{2} \int_L EI \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_L KGA \left( \frac{d\omega}{dx} - \theta \right)^2 dx \dots (22)$$

여기서  $EI$ 는 휨剛性度(bending rigidity),  $GA$ 는 剪斷剛性度(shear rigidity),  $K$ 는 剪斷係數이다.

(22)式을 (2)式에 代入하여 (6)式과 같은 weak form을 誘導하면 다음과 같이 깊은 보에 대한  $L(u)$ 와  $B(u)$ 의 式을 얻을 수 있다.

$$L(u) = \left[ \begin{array}{c} EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + KGA \left( \frac{d\omega}{dx} - \theta \right) \\ KGA \frac{d}{dx} \left( \frac{d\omega}{dx} - \theta \right) \end{array} \right] \dots (23)$$

$$B(u) = \left[ \begin{array}{c} EI \frac{d\theta}{dx} \\ KGA \left( \frac{d\omega}{dx} - \theta \right) \end{array} \right] \dots (24)$$

### 3.2. Euler 方程式을 滿足하는 形狀函數

2.2에서 言及한 바와 같이 有限要素解가 正確解와 一致하려면 제차 Euler 方程式, 即  $L(u) = 0$ 를 滿足하는 形狀函數를 使用하여야 한다. 따라서 平面回轉角  $\theta$ 와 鉛直처점  $\omega$ 를 다음과 같이 각기 다른 次數의 多項式으로 假定하면

$$\theta(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \dots (25)$$

$$\omega(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 \dots (26)$$

(25), (26)式을 (23)式에 代入하여 定理하면

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + KGA \left( \frac{d\omega}{dx} - \theta \right) = 2EIa_3 + KGA \{ (b_2 - a_1) + (2b_3 - a_2)x + (3b_4 - a_3)x^2 \} \dots (27)$$

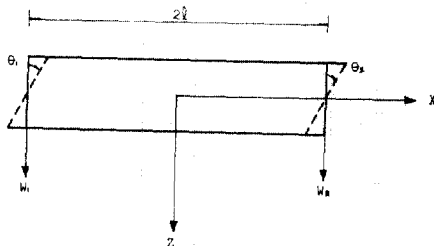


그림 2. Proposed beam element configuration.

그런데 임의의  $x$ 에 대하여  $L(u) = 0$ 가 되어야 하므로

$$\left. \begin{array}{l} b_2 = a_1 - \frac{2EI}{KGA} a_3 \\ b_3 = \frac{1}{2} a_2 \\ b_4 = \frac{1}{3} a_3 \end{array} \right\} \dots (28)$$

위의 未知의 係數들을 鉛直처점  $\omega$ 의 節點값  $\omega^1, \omega^2$ 와 平面回轉角  $\theta$ 의 節點값  $\theta^1, \theta^2$ 로 나타내면

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{\gamma}{2(\gamma + l^2)} (\theta^1 + \theta^2) - \frac{l}{2(\gamma + l^2)} (\omega^1 - \omega^2) \\ a_2 = -\frac{1}{2l} (\theta^1 - \theta^2) \\ a_3 = \frac{1}{2(\gamma + l^2)} (\theta^1 + \theta^2) + \frac{1}{2l(\gamma + l^2)} (\omega^1 + \omega^2) \\ b_1 = \frac{1}{4} l (\theta^1 - \theta^2) + \frac{1}{2} (\omega^1 + \omega^2) \end{array} \right\} \dots (29)$$

여기서  $\gamma = \frac{2EI}{KGA} - \frac{1}{3} l^2$

(29)式을 (25), (26)式에 代入하여 定理하면 形狀函數  $N^i(x)$ 는

$$\left. \begin{array}{l} N^1_{\omega\omega}(x) = \frac{1}{2} - \frac{l^2}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} x + \frac{1}{2\alpha} x^2 \\ N^1_{\theta\theta}(x) = \frac{1}{2\alpha} x^l - \frac{1}{2\alpha x^l} x^2 \\ N^1_{\omega\theta}(x) = -\frac{1}{4} x^l - \frac{1}{6\alpha} x + \frac{1}{4x^l} x^2 + \frac{1}{6\alpha} x^3 \\ N^1_{\theta\omega}(x) = \frac{1}{2} + \frac{(3\alpha + l^2)}{6\alpha x^l} - \frac{1}{6\alpha x^l} x^3 \end{array} \right\} (30)$$

여기서  $\alpha = \frac{2EI}{KGA} + \frac{2}{3} l^2$

### 3.3. 보 有限要素의 誘導

Timoshenko 보 理論에서 임의의 變位函數  $u$ 와 變形率函數  $\epsilon$ 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$u(x, z) = \begin{Bmatrix} u_x(x, z) \\ u_z(x, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} \dots (31)$$

$$\epsilon(x, z) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x(x, z) \\ \gamma(x, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{d\omega}{dx} - \theta \end{Bmatrix} \dots (32)$$

여기서  $u_x$ 는 軸方向變位,  $u_z$ 는 鉛直變位,  $\epsilon_x$ 는 軸方向變形率, 그리고  $\gamma$ 는 剪斷變形率이다.

그런데 
$$u = \sum_{I=1}^2 N^I(x) U^I \dots\dots\dots(33)$$

이므로 
$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^2 \begin{bmatrix} -z N^I_{\omega\omega} & -z N^I_{\theta\theta} \\ N^I_{\omega\omega} & N^I_{\omega\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \theta^I \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(34)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma \end{Bmatrix} = \varepsilon = \sum_{I=1}^2 \begin{bmatrix} -z N^I_{\theta\omega,x} & -z N^I_{\theta\theta,x} \\ (N^I_{\omega\omega,x} - N^I_{\theta\omega}) & (N_{\omega\theta,x} - N_{\theta\theta}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \theta^I \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(35)$$

한편, 보의 운동方程式과 境界條件式을 텐서 用하는 單位벡터, 그리고  $T$ 는  $\partial B$ 에 作用하는 既知의 牽引力이다.

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j - \rho \dot{u}_j = 0 \quad \text{in } B \dots\dots\dots(36)$$

$$n_i \sigma_{ij} - T_j = 0 \quad \text{on } \partial B \dots\dots\dots(37)$$

(36)式과 (37)式에 Galerkin의 加重殘差法을

適用하면, 하나의 要素에 대한 Galerkin 函數는

여기서  $\sigma_{ij}$ 는 應力텐서,  $\ddot{u}$ 는 加速度,  $\rho$ 는 質 量密度,  $b$ 는 體力벡터,  $\nu$ 는  $\partial B$ 에 鉛直으로 作

$$G^e(u, \delta u) = - \int_{B^e} \sigma_{ij,i} \delta u_j dv - \int_{B^e} \rho (b_j - \ddot{u}_j) \delta u_j dv + \int_{\partial B^e} (n_i \sigma_{ij} - T_j) \delta u_j dA \dots\dots\dots(38)$$

(38)式을 部分積分하고 Gauss-Green 定理을 適用하면

$$G^e(u, \delta u) = \int_{B^e} \sigma_{ij} \delta u_{j,i} dv - \int_{B^e} \rho (b_j - \ddot{u}_j) \delta u_j dv - \int_{\partial B^e} T_j \delta u_j dA \dots\dots\dots(39)$$

보의 應力和 變形率의 關係를 平面應力 假定을 導入하여 간단히 表示하면,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(40)$$

따라서 하나의 보 要素에 대한 Galerkin 函數는 다음 式으로 나타낼 수 있다.

$$G^e(u, \delta u) = \int_{B^e} \{ \delta \varepsilon_x \delta \gamma \} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma \end{Bmatrix} dv - \int_{B^e} \rho \{ \delta u_x \delta u_z \} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_z \end{Bmatrix} dv + \int_{B^e} \rho \{ \delta u_x \delta u_z \} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_z \end{Bmatrix} dv - \int_{\partial B^e} \{ \delta u_x \delta u_z \} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_z \end{Bmatrix} dA \dots\dots\dots(41)$$

(41)式에 (34)式과 (35)式을 代入하면 Galerkin 函數  $G^e$ 는

$$G^e(u, \delta u) = \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 \{ \delta \omega^I \delta \theta^J \} \left[ K_{e, IJ} \right] \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \theta^J \end{Bmatrix} + \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 \{ \delta \ddot{\omega}^I \delta \ddot{\theta}^J \} \left[ M_{e, IJ} \right] \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \theta^J \end{Bmatrix} - \sum_{I=1}^2 \{ \delta \omega^I \delta \theta^I \} R^I \dots\dots\dots(42)$$

따라서 要素매트릭스는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_{e, IJ} = \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 EI \int_{L^e} \begin{bmatrix} N^I_{\theta\omega,x} & N^J_{\theta\omega,x} & N^I_{\theta\omega} & N^J_{\theta\theta,x} \\ N^I_{\theta\theta,x} & N^J_{\theta\omega,x} & N^I_{\theta\theta,x} & N^J_{\theta\theta,x} \end{bmatrix} dx + \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 GA \int_{L^e} \begin{bmatrix} (N^I_{\omega\omega,x} - N^J_{\theta\omega}) (N^I_{\omega\omega,x} - N^J_{\theta\omega}) (N^I_{\omega\omega,x} - N^J_{\theta\omega}) (N_{\omega\theta,x} - N^J_{\theta\theta}) \\ (N^I_{\omega\theta,x} - N^J_{\theta\theta}) (N^I_{\omega\omega,x} - N^J_{\theta\omega}) (N^I_{\theta\theta,x} - N^J_{\theta\theta}) (N^I_{\theta\omega,x} - N^J_{\theta\theta}) \end{bmatrix} dx \dots\dots\dots(43)$$

$$M_{e, IJ} = \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 I \int_{B^e} \rho \begin{bmatrix} N^I_{\theta\omega} & N^J_{\theta\omega} & N^I_{\theta\omega} & N^J_{\theta\theta} \\ N^I_{\theta\theta} & N^J_{\theta\omega} & N^I_{\theta\theta} & N^J_{\theta\theta} \end{bmatrix} dx + \sum_{I=1}^2 \sum_{J=1}^2 A \int_{B^e} \rho \begin{bmatrix} N^I_{\omega\omega} & N^J_{\omega\omega} & N^I_{\omega\omega} & N^J_{\omega\theta} \\ N^I_{\omega\theta} & N^J_{\omega\omega} & N^I_{\theta\theta} & N^J_{\omega\theta} \end{bmatrix} dx \dots\dots\dots(44)$$

$$R_{e, I} = \sum_{I=1}^2 \int_{B^e} \rho \begin{bmatrix} -N^I_{\theta\omega} & -z N^I_{\theta\theta} \\ N^I_{\omega\omega} & N^I_{\omega\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_z \end{Bmatrix} dv + \sum_{I=1}^2 \int_{\partial B^e} \begin{bmatrix} -z N^I_{\theta\omega} & -z N^I_{\theta\theta} \\ N^I_{\omega\omega} & N^I_{\omega\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_z \end{Bmatrix} dA \dots\dots\dots(45)$$

여기서  $N'_{(x)}$ 는 (30)식에 주어져 있으며  $I$ 는 斷面 2次모멘트,  $A$ 는 橫斷面積, 그리고  $K$ 는 剪斷係數이다.

#### 4. 數值解析 및 考察

3.2에서 誘導한 새로운 形狀函數의 正確度와 效率性을 考察하기 위해서 이 形狀函數를 使用한 보 有限要素 모델을 開發하여 캔티레버 보의 兩端 固定보의 靜的解析과 單純支持보의 自由振動解析을 수행하였다. 보 要素의 要素매트릭스는 2個의 積分法을 利用한 Gauss 積分法으로 數值積分하였으며, double precision을 使用한 FEAP 프로그램<sup>(7)</sup>(1985 Version)을 利用하여 VAX-11/750 컴퓨터로 解析하였다.

##### 4.1. 보의 靜的 解析

自由端에 單位集中荷重을 받는 캔티레버 보와 支間中央에 單位集中荷重을 받는 兩端固定보의 靜的처짐을 剪斷係數  $K=5/6$ 을 使用하여 보의 두께가 깊은 경우( $GA=375$ )와 얇은 경우( $GA=375 \times 10^5$ )에 대하여 解析하였다. 表 1, 2, 그리고 3에서 보는 바와 같이 本 研究에서 提案된 形狀函數를 利用한 보 有限要素의 解는 보의 두께에 關係없이 正確解와 一致하며, 단 하나의 要素만으로도 正確解를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

그리고 鉛直처짐과 回轉角에 대하여 모두 線型的 形狀函數를 使用한 Hughes<sup>(8)</sup> 등의 보 要素보다 越等히 正確한 結果를 나타내고 있음을 알 수 있다.

表 1. Normalized(by exact solution) tip deflections and rotations of the thick cantilever beam under a unit tip point load; length=4, depth=1,  $E=1,000$ ,  $GA=375$

Number of elements	Present Beam Element		Linear Beam Element (8)	
	Displacement	Rotation	Displacement	Rotation
1	1.0000	1.0000	0.7618	1.0000
2	1.0000	1.0000	0.9357	1.0000
4	1.0000	1.0000	0.9351	1.0000
16	1.0000	1.0000	0.9992	1.0000

表 2. Normalized(by exact solution) tip deflections and rotations of the thin cantilever beam under a unit tip point load; length=4, depth=1,  $E=1,000$ ,  $GA=375 \times 10^5$

Number of elements	Present Beam Element		Linear Beam Element (8)	
	Displacement	Rotation	Displacement	Rotation
1	1.0000	1.0000	0.9500	1.0000
2	1.0000	1.0000	0.9357	1.0000
4	1.0000	1.0000	0.9844	1.0000
16	1.0000	1.0000	0.9992	1.0000

表 3. Normalized (by exact solution) central displacement of the clamped end beam; length=4, depth=1,  $E=1,000$

Number of elements	Deep beam ( $GA=375$ )		Thin beam ( $GA=375 \times 10^5$ )	
	Present Beam Element	Linear Beam Element (8)	Present Beam Element	Linear beam Element (8)
2	1.0000	0.1668	1.0000	$0.2009 \times 10^{-5}$
4	1.0000	0.7917	1.0000	0.7500
8	1.0000	0.9479	1.0000	0.9375
16	1.0000	0.9870	1.0000	0.9844
32	1.0000	0.9968	1.0000	0.9961

##### 4.2 보의 自由振動解析

길이 242 m, 外徑 26 m, 두께 0.42 m의 中空 圓形斷面을 갖는 이 보의 單位重量은  $2.4 \text{ t/m}^3$ , 單性係數  $E=2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ , 그리고 剪斷係數  $K=$

表 4. Natural frequencies(rad/sec) and their percentage discrepancies of the simply-supported beam

Mode Number	Circular frequency(rad/sec)		Discrepancy (%)
	10 proposed beam elements	Exact Theory (9)	
1	4.1791	4.1797	0.014
2	15.290	15.285	0.033
3	30.543	30.509	0.111
4	48.020	47.777	0.509
5	66.373	65.593	1.189
6	86.124	84.476	1.951
7	105.67	103.08	2.513
8	125.89	121.65	3.483
9	146.96	140.13	4.875
10	155.72	147.45	5.609

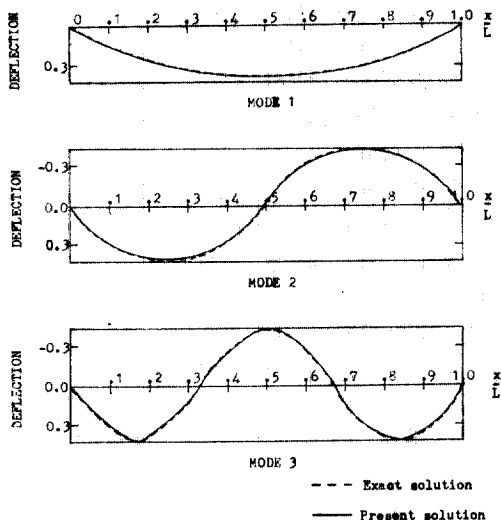


그림 3. Comparison of the first three mode shapes of the simply supported beam.

0.5145를 사용하였다.

表 4와 그림 3에서 보는 바와 같이 본 연구에서 제안된 形狀函數를 이용한 보 有限要素의 振動數와 振動形狀은 初期 mode에는 正確解와 거의 一致함을 나타내고 있으며, 後期 mode에서도 매우 近似한 結果를 주고 있음을 알 수 있다.

## 5. 結 論

本 研究에서는 포텐셜에너지 定理를 利用하여 제차 Euler 方程式을 滿足하는 새로운 形狀函數를 提案하였으며 이 形狀函數의 適合成을 檢討하기 위하여 보 有限要素를 解析하여 結果를 考察하였다. 考察 結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) 本 研究에서 提案된 제차 Euler 方程式을 滿足하는 形狀函數를 使用한 보 有限要素는 靜의 解析이나 振動解析의 경우 모두 越等히 正確한 結果를 보여주었다. 이러한 正確성은 假定한 形狀函數가 반드시 제차 Euler 方程式을 완벽히 滿足해야 한다는 條件하에서 얻어질 수 있다.

(2) 제차 Euler 方程式을 滿足하는 形狀函數를 使用한 보 有限要素 모델들은 剪斷變形에너

지를 완벽하게 包含할 수 있기 때문에 소위 shear-locking 現象<sup>(10)</sup>을 피하기 위한 減次積分(reduced integration)이 必要하지 않다.

(3) 따라서 本 研究에서 提案된 形狀函數의 概念은 有限要素 모델을 利用하여 正確한 結果를 얻기 위한 경우에 形狀函數의 假定에 適用될 수 있으며 單純從屬變數뿐 아니라 많은 從屬變數를 갖는 彈性靜力學의 問題의 경우에도 전혀 제한없이 適用할 수 있다고 사료된다.

## 參 考 文 獻

1. J.A. Stricklin, 'Computation of stress resultants from the element stiffness matrices', *AIAA Journal*, Vol. 4, 1095~1096 (1965).
2. F.V. Filho, "Comment on computation of stress resultants from element stiffness matrices", *AIAA Journal*, Vol. 6, 571~572 (1963).
3. P. Tong, "Exact solutions of certain problem by finite element method", *AIAA Journal*, Vol. 7, 178~180 (1969).
4. T.H. Richards, "*Energy Methods in Stress Analysis*", Ellis Horwood Ltd., London (1977).
5. I.H. Shames and C.L. Dym, "*Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*", McGraw-Hill, New York (1985).
6. M.R. Spiegel, "*Vector Analysis, Schaum' Outline Series*", McGraw-Hill, New York (1974).
7. O.C. Zienkiewicz, "*The Finite Element Method*", 3rd Ed., McGraw-Hill, New York (1977).
8. T.J. R. Hughes, R.L. Taylor and W. Fanok-Nukulchai, "A simple and efficient finite element for plate bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11, 1529~1543 (1977).
9. S.P. Timoshenko and D.H. Young, "*Vibration Problems in Engineering*", 3rd Ed., D. Van Nostrand, New Jersey (1961).
10. T. Iwakuma, M. Ai and F. Nishno, "On derivation of Timoshenko beam stiffness equation", *Proc. JSCE*, 312, 119~128 (1981).
11. W. Kanok-Nukulchai and Young Shik Shin, "Versatile and improved higher-order beam element", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 110, No. 9, September, 2234~2248 (1984).

12. Gelu Onu, "Shear effect in beam stiffness matrix" *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 109, No. 9, 2216~2220 (1983).
13. W. Kanok-Nukulchai, P.H. Dayawansa and P. Karasudhi, "An exact finite element model for deep beam", *Int. Journal of Structures*, 1, 1~7 (1981).
14. C.L. Dym and I.H. Shame, "*Solid Mechanics: A Variational Approach*", McGraw-Hill, New York (1973).
15. R.W. Clough and J. Penizen, "*Dynamics of Structures*", McGraw-Hill, New York (1975).
16. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "*Theory of Elasticity*, 3rd Ed", McGraw-Hill (1970).
17. I.S. Sokolnikoff, "*Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd Ed.", McGraw-Hill (1978).
18. K.J. Bathe and E.L. Wilson, "*Numerical Methods in Finite Element Analysis*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
19. K.H. Huebner, "*The Finite Element Method for Engineering*", Wiley-Interscience, New York (1975).
20. L.E. Malvern, "*Introduction to The Mechanics of A Continuous Medium*", Prentice-Hall, Englewood, New Jersey (1969).
21. 申英湜, "高次變位를 考慮한 보 要素의 解析", 大韓土木學會論文集, 第2卷 第3號, 75~85 (1982).
22. 邊東均, 申英湜, 蔣鍾卓, "剪斷變形과 回轉慣性を 考慮한 Timoshenko 보의 自由振動 解析", 大韓土木學會論文集, 第3卷 第4號, 109~122(1983).

(接受: 1986. 1. 14)