

흐름함수파이론에 의한 파랑 에너지의 계산

Computations of Wave Energy by Stream Function Wave Theory

李	正	烈*
Lee,	Jung	Lyul
片	宗	根**
Pyun,	Chong	Kun

Abstract

This paper introduces the nonlinear Stream Function Wave Theory for design waves efficiently to compute the wave energy and energy transport quantities and to analyze the effects of nonlinearities on them.

The Stream Function Wave Theory was developed by Dean for case of the observed waves with assymmetric wave profiles and of the design waves with symmetric theoretical wave profiles. Dalrymple later improved the computational procedure by adding two Lagrangian constraints so that more efficient convergence of the iterative numerical method to a specified wave height and to a zero mean free surface displacement resulted. And the Stream Function coefficients are computed numerically by the improved Marquardt algorithm developed for this study.

As the result of this study the effects of nonlinearities on the wave quantities of the average potential energy density, the average kinetic energy density result in overestimation by linear wave theory compared to the Stream Function Wave Theory and increase monotonically with decreasing L^*/L_0 and with increasing H/H_B . The effects of nonlinearities on the group velocity and the wavelength quantities result in underestimation by linear wave theory and increase monotonically with increasing H/H_B . Finally the effect of nonlinearity on the average total energy flux results in overestimation for shallow-water waves and underestimation for deep-water waves by linear wave theory.

요 지

본 연구에서는 파랑의 에너지 및 에너지 수송과 관련된 변량들의 계산과 그 비선형효과의 분석을 능률적으로 수행하기 위하여 설계파에 대한 비선형 흐름함수파이론을 도입한다. 흐름함수파이론은 비대칭성 파형을 갖는 실측파와 이론적인 대칭 파형을 갖는 설계파. 두 경우 모두에 사용할 수 있는 이론으로 Dean 에 의해 처음 창안되었다. 후에 Dalrymple 이 특정한 파고의 조건과 0의 평균해 수면 변위의 조건을 만족하도록 하는 두 라그랑지 승수를 사용하여 기존의 수치계산 과정을 개량함

* 正會員 · 서울大學校 大學院

** 正會員 · 明知大學校 工科學 副教授

으로써 수치계산이 좀 더 효율적으로 수행되도록 하였다. 그리고 흐름함수의 계수(Stream function coefficient)들은 본 연구를 위해 개량한 Marquardt algorithm 을 사용하여 수치계산된다.

본 연구의 결과로서 평균 위치에너지와 평균 운동에너지, 평균 전에너지의 비선형효과는 L^*/L_0 의 감소와 H/H_0 의 증가에 한결같이 증가하며 흐름함수이론과 비교하여 선형파이론이 항상 과대평가된다. 군속도와 파장의 비선형효과는 H/H_0 의 증가에 한결같이 증가하되 선형파이론이 항상 과소평가된다. 마지막으로 평균 전에너지 Flux의 비선형효과는 천해파(shallow-water waves)에 대해서는 선형파이론이 과대평가되고 심해파(deep-water waves)에 대해서는 선형파이론이 과소평가되는 양면성을 지닌다.

1. 서 론

규칙파는 선형파이론(linear wave theory)으로 접근하여 해석하는 선형파(미소진폭파)와 비선형파이론(nonlinear wave theory)으로 접근하여 해석하는 비선형파(유한진폭파)가 개념상으로 존재한다. 선형파이론은 근사 이론이므로 실제 문제에 적용시 오차의 크기가 문제시 된다. 따라서 좀 더 정확한 결과를 낼 수 있는 여러 비선형파이론이 대두되었다.

이러한 비선형파이론이 거의 모두 급수 등을 이용한 해석적 방법을 사용하고 있는 반면 Dean의 흐름함수파이론(Stream Function Wave Theory)은 비선형파를 수치적 방법으로 다루고 있어 고속의 계산능력을 가진 computer의 도움으로 비교적 간단한 이론으로도 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있다.

본 연구에서는 실제파(파고 H , 주기 T , 수심 h)의 에너지 및 에너지 수송에 관련된 모든 변량들을 흐름함수파이론에 의하여 계산하며 그 값들을 선형파이론에 의한 것들과 비교함으로써 그 비선형성도 논의하고자 한다.

흐름함수파이론은 1965년 Dean에 의해 처음 창안되어⁽¹⁾ 그 후 40 가지 파의 제원에 대한 거의 모든 변량들의 무차원치를 표로 제시하는데 기초가 되었고⁽²⁾ Dean 등에 의해 파력계산에^(3,4,5), Hudspeth 등에 의해 파거동(wave action)의 비선형성을 조사하는 데 또한 응용되었다^(6,7).

최근에는 B.L. Mehaute 등이 흐름함수파이론식과 유사한 식의 매개변수(parameter)를 수식으로 표현하여 그 타당성을 이론적으로, 그리고

실험적으로 증명하기도 하였다⁽⁸⁾.

이 흐름함수파이론의 응용이 국내에서는 그 필요성에 비해 비교적 낙후되어 1982년 崔恒洵 등과⁽⁹⁾ 그리고 1984년 이한배에⁽¹⁰⁾ 의해 소개된 정도이므로 본 연구에서는 그 세부적인 특성과 한계성을 고찰하고, 보다 효율적인 수치계산법을 고안함으로써 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과를 보다 정확히 분석하는데 도움이 되도록 하였다.

2. 흐름함수파이론의 개요

유체가 비압축성, 비점성이며 유체운동이 비회전성이라면 2차원 평면주기파에서 흐름함수 ψ 가 존재하며

$$\nabla^2 \psi = 0 \dots\dots\dots(2-1)$$

를 만족한다.

파의 전파속도와 같은 속도로 움직이는 좌표계를 생각하면 그림 (2-1)과 같이 이 움직이는 좌표계에 대해 파랑은 정상운동을 하므로 속도 성분과 경계조건, 즉 해지면 경계조건(BBC)과 운동학적 자유표면 경계조건(KFSBC), 동력학적 자유표면 경계조건(DFSBC), 주기성(Periodicity)은 다음 식(2-2), (2-3)과 같이 표시할 수 있다.

$$u+U-C = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial\psi}{\partial x} \dots\dots\dots(2-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{BBC} &: \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad z = -h \\ \text{KFSBC} &: \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &, \quad z = \eta(x) \\ \text{DFSBC} &: \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &+ \eta(x) = Q, \quad z = \eta(x) \\ \text{Periodicity} &: \psi(x+L, z) = \psi(x, z) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2-3)$$

여기서 U 는 일반적인 흐름 속도이며 본 연구에서 고려치 않는다.

Q 는 Bernoulli의 상수이다.

Laplace equation인 식(2-1)을 만족하는 흐름함수를 변수분리법(Separation of variable Method)을 이용하여^(11,12) 경계조건 BBC와 KFSBC, Periodicity로부터 구하면 설계파의 경우 식(2-4)와 같다⁽¹³⁾.

$$\psi = (L/T - U)z$$

$$-\sum_{n=4}^{N-2} X(n) \sin h \frac{2\pi(n-3)(h+z)}{L} \cdot \cos(n-3)\theta \dots (2-4)$$

$$\theta = 2\pi x/L$$

식(2-4)의 미지수 $X(n)$, 파장 L 은 동력학적 자유표면 경계조건(DFSBC)의 특성으로 보아 수치해석에 의한 접근으로 구할 수 밖에 없다. 그러나 이 이론은 운동학적 자유표면 경계조건을 자동적으로 만족하고 동력학적 자유표면 경계조건도 일반적으로 다른 비선형파이론들보다 잘 만족시키므로 경계조건에 관한 한 매우 우수하다

고 할 수 있다.

N 는 흐름함수파이론의 order로서 무한한 숫자일수록 자연파랑현상과 유사한 흐름함수를 구할 수 있으나 computer의 계산능력 한계와 그 효율성으로 충분히 큰 값을 취하도록만 한다.

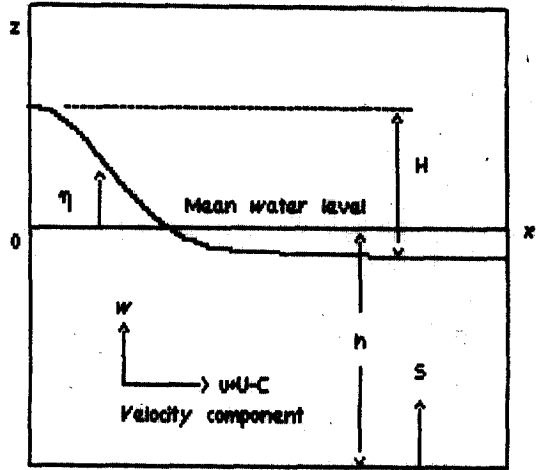


그림 2-1. Galilean transformation을 취한 파계의 정의도

3. 흐름함수파이론의 수치해석

3.1. Lagrange 함수의 유도

동력학적 자유표면 경계조건을 근사적으로 만족시키기 위해서는 다음 오차함수를 최소화한다.

$$e = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (Q(\theta) - \bar{Q})^2 d\theta \dots (3-1)$$

$$\text{여기서 } Q(\theta) = \eta(\theta) + \frac{1}{2g} [(u(\theta, \eta) + U - C)^2 + w(\theta, \eta)^2] \dots (3-2)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q(\theta) d\theta \dots (3-3)$$

$$\eta(\theta) = \frac{\psi_\eta}{L/T - U} + \sum_{n=4}^{N+2} \frac{X(n)}{L/T - U} \sin h \frac{2\pi(n-3)(h+\eta(\theta))}{L} \cos(n-3)\theta \dots (3-4)$$

$$\theta = 2\pi x/L$$

$$u(\theta, \eta) = \sum_{n=4}^{N+2} X(n) \frac{2\pi(n-3)}{L} \cos h \frac{2\pi(n-3)(h+\eta(\theta))}{L} \cos(n-3)\theta \dots (3-5)$$

$$w(\theta, \eta) = \sum_{n=4}^{N+2} X(n) \frac{2\pi(n-3)}{L} \sin h \frac{2\pi(n-3)(h+\eta(\theta))}{L} \sin(n-3)\theta \dots (3-6)$$

식(3-4)는 $z = \eta(\theta)$ 일 때 식(2-4)로부터 유도할 수 있으며 그 계산은 Newton-Raphson 반복법으로 해결한다.

동력학적 자유표면 경계조건에서 다음 두 제한조건이 필요하다.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\theta) d\theta = 0$$

$$H = \eta(0) - \eta(\pi) \dots (3-7)$$

따라서 수치해석의 기본 모델은 다음과 같다.

목적 함수 :

$$\begin{aligned} \text{Min } e &= F(X(3), X(4), \dots, X(N+3)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (Q(\theta) - \bar{Q})^2 d\theta \end{aligned}$$

제한조건 :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\theta) d\theta = 0$$

$$\eta(0) - \eta(\pi) - H = 0$$

여기서, $X(3) = L$, $X(N+3) = \psi$,

이 문제를 해결하는 방법으로 가장 직접적인 방법의 하나는 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 사용하는 것으로 새로운 함수 Lagrange L 이 유도된다⁽¹⁴⁾.

$$\begin{aligned} L &= F(X(1), X(2), \dots, X(n+3)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (Q(\theta) - \bar{Q})^2 d\theta + \frac{X(1)}{\pi} \int_0^{\pi} \eta(\theta) d\theta \\ &\quad + X(2)(\eta(0) - \eta(\pi) - H) \dots \dots (3-8) \end{aligned}$$

여기서 $X(1)$, $X(2)$ 는 라그랑지 승수이다.

새로운 항이 라그랑지 승수로 인해 포함되었으나 제한조건이 만족되는 한 결과에는 하등 영향을 미치지 않는다. 이 Lagrange L 의 필요조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial X(n)} = 0, \quad n=1, 2, \dots, N+3 \quad \dots (3-9)$$

3.2. 비선형 매개변수의 추정법

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (R(\theta) + \sum_{n=3}^{N+3} \frac{\partial R(\theta)}{\partial X(n)} X(n))^2 d\theta + \frac{(X(1) + \delta X(1))}{\pi} \int_0^{\pi} (\eta(\theta) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{N+3} \frac{\partial \eta(\theta)}{\partial X(n)} X(n)) d\theta + (X(2) + \delta X(2)) (-H + \eta(0)) \quad \dots \dots (3-10) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{N+3} \frac{\partial \eta(0)}{\partial X(n)} X(n) - \eta(\pi) - \sum_{n=3}^{N+3} \frac{\partial \eta(\pi)}{\partial X(n)} X(n) \end{aligned}$$

이 된다.

여기서 $R(\theta) = Q(\theta) - \bar{Q}$

새로운 미지수 $\delta X(n)$ 를 구하기 위한 근사 Lagrange L 의 필요조건은 다음과 같이 바뀌어질 수 있고

$$\frac{\partial L}{\partial \delta X(n)} = 0, \quad n=1, 2, \dots, N+3 \quad \dots (3-11)$$

식(3-10)을 식(3-11)에 대입하면 $X(n)$ 를 구할 수 있으며 이 연립방정식은 다음 행렬의 형식으로 표시할 수 있다^(6, 10, 13).

$$[A] \bar{X} = \bar{b} \quad \dots \dots (3-12)$$

식(3-12)의 수치계산법으로 Gauss 소거법(Gauss elimination method)을 사용하였다.

Gauss-Newton 법과 같은 비선형방법들은 수치계산이 자연 필요하며 반복계산단계 j 에서 근사 $X(n)$ 값과 $\delta X(n)$ 값과의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X(n)^{j+1} &= K^j \cdot \delta X(n)^j + X(n)^j, \\ n &= 3, 4, \dots, N+3 \quad \dots \dots (3-13) \end{aligned}$$

여기서 K 는 발산을 방지하는 한도내에서 수렴

최소자승법으로 비선형 매개변수를 구하는 방법군(group of method)에 두 가지가 있다. 즉, steepest descent 방법에 기초를 둔 여러 변형된 방법군과 식을 선형화하기 위하여 Taylor 급수 전개를 사용하는 방법군으로 이 두번째 방법군은 비선형 규정식(normal equation)을 선형화하여 Newton-Raphson 반복법으로 푸는 법과 회귀식(regression equation)을 선형화하고 규정식에 대입하여 그 연립방정식을 푸는 방법(Gauss-Newton method)으로 또 나뉜다. steepest descent procedure는 비적절한 출발치(starting point)에도 수렴하리라 기대되나 긴 시간이 필요하다는 단점이 있고, Gauss-Newton 법은 적절한 출발치에는 빠르게 수렴하나 그 값이 적절하지 않을 경우는 발산의 염려가 있다⁽¹⁵⁾.

본 연구에서는 문제의 특성상 Marquardt algorithm을 개량하여 사용하였다⁽¹⁶⁾.

Marquardt algorithm은 라그랑지 승수를 사용하여 그 값이 클 경우는 steepest descent 방법과 유사하고 작을 경우는 Gauss-Newton 법과 유사함으로 수렴하지 않을 경우는 라그랑지 승수를 크게 하여 수렴시키고 수렴이 원활할 경우는 그 값을 작게 환원시켜 빨리 수렴시킨다.

식(3-8)을 $N+3$ 개의 매개변수에 대해 Taylor 급수로 전개하고 1계 도함수만 취하면 근사 Lagrange L 는

속도가 빠르도록 적절히 조절할 수 있으며 본 연구에에서는 Marquardt algorithm 을 개량하여 매 반복계산단계마다 자동 조절되도록 하였다⁽¹³⁾. 식(3-13)의 수차계산은 수렴기준이 만족될 때까지 계속 수행되며 결국 구하고자 하는 $X(3)$ 와 $X(4) \dots X(N+3)$ 을 근사적으로 얻을 수 있다.

4. 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과

4.1. 파랑의 에너지 및 에너지 수송

파랑이 가지는 에너지는 위치에너지 (potential energy)와 운동에너지 (kinetic energy)가 있으며 위치에너지는 자유표면의 변위로부터 운동에너지는 물입자의 운동으로부터 발생한다.

평균 위치에너지와 평균 운동에너지는 식(4-1), (4-2)와 같으며 평균 전에너지는 식(4-1)과 (4-2)의 합이므로 식(4-3)과 같이 표시된다.

$$Ep = \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2 d\theta \quad \dots\dots\dots(4-1)$$

$$Ek = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} (u^2 + w^2) dS d\theta \quad \dots\dots(4-2)$$

$$Et = Ep + Ek \quad \dots\dots\dots(4-3)$$

파랑의 진행방향으로 동력압 (dynamic pressure) p_d 가 하는 일의 시간적 변화율을 Energy Flux 라고 하므로 진행방향에 대한 평균 전에너지 Flux Ef 는 다음과 같다.

$$Ef = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} (p_d \cdot u) dS d\theta \quad \dots\dots(4-4)$$

여기서 $p_d = p + \gamma \cdot z$

평균 전에너지 Flux Ef 와 평균 전에너지 Et 와의 관계로부터 군속도, 즉 에너지 속도 G 를 구할 수 있다.

$$G = Ef/Et \quad \dots\dots\dots(4-5)$$

이상의 적분식과 선형파 이론식을 비교 나열하면 <표 4.1>과 같다.

4.2. 흐름함수파이론에 의한 비선형효과의 분석

파랑 문제를 다루는 데 가장 포괄적인 40 가지 경우의 파의 제원을 Dean 이 참고 문헌 2에 제시하였다. 본 연구에서는 이를 <표 4.2>와 그림(4-1)에 인용한다. 단, $H/H_b=1$ 에서 평균 전에너지 Flux Ef 값이 수렴하지 않고 계속 감

소하므로 어느 order에서 그 값을 결정할 지가 문제되나 Chaplin⁵⁾에 의해 시도된 $H/H_b=0.9$ 정도에서는 적절한 order를 결정할 수 있도록 Ef 값이 수렴하므로 $H/H_b=0.9$ 를 $H/H_b=1$ 대신 비선형효과의 대상으로 삼는다. 대체로 h/L_0 가 천해파 (shallow-water waves)로 H/H_b 가 1로 접근할수록 수렴기준을 만족시키는 order는 커진다. 따라서 천해파 (shallow-water waves), 중간수심파 (transitional-water waves), 심해파 (deep-water waves)에 대해 order를 각각 21, 13, 7로 적절히 결정하였다.

흐름함수파이론이 적용되는 영역은 Dean이 제시한 그림과 본 연구의 결과가 크게 차이 나지 않으므로 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과를 분석하는 상대수심의 영역을 0.01로부터 1.0까지로 하여 그 대상을 28 가지 경우로 제한한다. 이외의 영역은 그 특성의 연장으로 비선형효과를 추적한다.

4.2.1 평균 에너지의 비선형 효과

참고 문헌 7에서 Hudspeth와 Slotta는 평균 위치에너지와 평균 운동에너지, 평균 전에너지를 무차원인 H/L_0 와 h/L_0 의 함수로 처리하였으나 본 연구에서는 그들을 식(4-6)~(4-8)과 같이 비선형효과함수를 도입하여 무차원인 H/H_b 와 L^*/L_0 의 함수로 나타냄으로써 그 비선형성이 좀 더 명확하게 분석되도록 하였다.

$$Ep = f_p(L^*/L_0, H/H_b) \gamma H^2 / 16 \quad \dots\dots(4-6)$$

$$Ek = f_k(L^*/L_0, H/H_b) \gamma H^2 / 16 \quad \dots\dots(4-7)$$

$$Et = f_t(L^*/L_0, H/H_b) \gamma H^2 / 8 \quad \dots\dots(4-8)$$

여기서 $0 < f_p, f_k, f_t < 1$

함수 f_p 와 f_k, f_t 는 비선형효과함수로서 1보다 작을수록 선형파이론에 의한 Ep 와 Ek, Et 가 실제파에 더욱 가까운 흐름함수파이론에 의한 것들 보다 과대평가 된다.

그림(4-2)와 같이 파고 H 가 쇄파고 H_b 와 같은 $H/H_b=1$ 에 가까울수록 또 수심 h 의 함수인 선형파이론의 파장 L^* 가 더 이상 h 의 함수가 아닌 심해파의 파장 L_0 보다 작을수록 평균 전에너지의 비선형효과는 증가되어 비선형효과함수치는 1보다 작아진다. 반대로 $H/H_b \rightarrow 0$ 이며 $L^*/L_0 \rightarrow 1$ 이면 비선형효과는 감소되어 비선

형효과함수치는 1로 접근한다.

즉, $\lim f_i(0, 1) = 0$, $\lim f_i(1, 0) = 1$ 이다.

그러나, 수심에 따른 비선형성이 비교적 무시될 수 있는 심해파일지라도 H/H_B 가 1에 가까우면 비선형성이 발휘되어 $\lim f_i(1, 1) < 1$ 이 된다.

<표 4.3>으로부터 $f_p = f_s = f_i$ 임을 알 수 있으며 그 특성은 평균 전에너지의 비선형효과함수와 비슷하다.

그림(4-4)는 $f_i = 0.95$ 인 곡선과 $f_i = 0.99$ 인 곡선을 보여주며 이 곡선들은 평균 전에너지의 전체적인 비선형효과도의 정도를 인식하는 데 도움을 준다.

4.2.2. 평균 전에너지 Flux의 비선형효과

참고 문헌 6에서도 평균 전에너지 Flux를 무차원인 H/L_0 와 h/L_0 의 함수로 하였으나 본 연구에서는 이를 H/H_B 와 L^*/L_0 의 함수로 한다.

$$Ef = f_i(L^*/L_0, H/H_B) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \gamma L^* H^2 / 8 T \dots \dots \dots (4-9)$$

그림(4-3), (4-4)와 같이 선형파이론에 의한 Ef 가 흐름함수파이론에 의한 Ef 보다 천해파측에서는 과대평가, 심해파측에서는 과소평가되며 중간수심과영역내에서 그 판단이 분리된다. 즉,

$\lim f_i(0, 1) < 1$, $\lim f_i(1, 1) < 1$ 이다. 그리고 H/H_B 가 1에 가까울수록 그림(4-3)과 같이 비선형효과도는 대체로 증가되고, 그림(4-4)와 같이 $f_i = 1$ 이 되는 상대수심 h/L_0 도 점점 증가한다.

f_i 의 값은 <표 4.3>에 주어졌으며, f_i 가 1보다 크면 선형파이론의 평균 전에너지 Flux 값이 과소평가되며, 1보다 작으면 과대평가됨을 의미한다.

4.2.3. 균속도 및 파장의 비선형효과

균속도는 식(4-5)와 (4-8), (4-9)로부터 그리고 파장은 비선형효과함수를 도입하여 H/H_B 와 L^*/L_0 의 함수로 다음과 같이 표시된다.

$$G = Ef/Ez = \frac{f_i}{f_i} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) L^*/T = f_s(L^*/L_0, H/H_B) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) L^*/T \dots (4-10)$$

$$L = f^*(L^*/L_0, H/H_B) L^* \dots \dots \dots (4-11)$$

여기서 $f_s, f_i > 1$

<표 4.3>에서 $f_s, f_i > 1$ 이므로 선형파이론에 의한 균속도와 파장은 항상 과소평가된다. 그리고 균속도와 파장의 비선형효과도는 H/H_B 가 1에 가까울수록 증가되며, 상대수심 $h/L_0 = 0.1$ 근처에서 최소값을 갖고 상대수심에 따른 그 변화는 비교적 작다.

표 4.1. 파장의 에너지 및 에너지 수송의 적분식과 선형파이론식과의 비교

에너지 변량	적분식	선형파이론식
평균 위치에너지	$E_p = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma^2(\theta) d\theta$	$rH^2/16$
평균 운동에너지	$E_k = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} (u^2 + w^2) dS d\theta$	$\gamma H^2/16$
평균 전에너지 Flux	$Ef = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} (p_s \cdot u) dS d\theta$	$\frac{\gamma H^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$

Note: 적분식의 수치적분은 Gaussian Quadrature를 사용한다.

표 4.2. 50 가지 경우의 파의 계원

Case	H/L_0	h/L_0	Case	H/L_0	h/L_0
1A	0.000390	0.002	6A	0.018312	0.10
B	0.000779		B	0.036631	
C	0.001169		C	0.054927	
D	0.001408		D'	0.065737	
D	0.001564		D	0.073041	

2A	0.000973	0.005	7A	0.031267	0.20
B	0.001946		B	0.062490	
C	0.002925		C	0.093785	
D'	0.003469		D'	0.112043	
D	0.003884		D	0.124492	
3A	0.001948	0.01	8A	0.041995	0.50
B	0.003886		B	0.083974	
C	0.005821		C	0.125988	
D'	0.006978		D'	0.151278	
D	0.007753		D	0.168087	
4A	0.003902	0.02	9A	0.042615	1.0
B	0.007772		B	0.085197	
C	0.011678		C	0.128025	
D'	0.013998		D'	0.152695	
D	0.015553		D	0.169650	
5A	0.009752	0.05	10A	0.042602	2.0
B	0.019505		B	0.085218	
C	0.029163		C	0.127534	
D'	0.035097		D'	0.153361	
D	0.038997		D	0.170401	

표 4-3. 파랑의 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과함수치

Case		3	4	5	6	7	8	9
f_s	A	0.726	0.860	0.954	0.976	0.984	0.984	0.984
	B	0.562	0.688	0.850	0.918	0.948	0.960	0.968
	C	0.458	0.556	0.704	0.794	0.858	0.894	0.894
	D'	0.376	0.466	0.580	0.654	0.734	0.818	0.822
f_h	A	0.758	0.886	0.968	0.986	0.992	0.992	0.992
	B	0.602	0.744	0.898	0.954	0.978	0.990	0.990
	C	0.506	0.616	0.778	0.866	0.922	0.956	0.956
	D'	0.432	0.530	0.658	0.710	0.812	0.896	0.898
f_t	A	0.741	0.874	0.961	0.981	0.988	0.988	0.898
	B	0.581	0.719	0.874	0.936	0.964	0.974	0.974
	C	0.482	0.586	0.741	0.830	0.890	0.925	0.925
	D'	0.404	0.498	0.619	0.693	0.773	0.857	0.860
f_l	A	0.799	0.926	0.999	1.016	1.030	1.043	1.046
	B	0.712	0.845	0.999	1.068	1.128	1.188	1.188
	C	0.663	0.775	0.956	1.084	1.226	1.361	1.358
	D'	0.581	0.700	0.858	0.985	1.187	1.426	1.424
f_r	A	1.076	1.058	1.040	1.035	1.042	1.055	1.058
	B	1.225	1.196	1.146	1.142	1.172	1.220	1.220
	C	1.377	1.325	1.290	1.305	1.379	1.472	1.468
	D'	1.436	1.407	1.386	1.420	1.537	1.663	1.656

f_i	A	1.044	1.031	1.018	1.012	1.012	1.016	1.017
	B	1.113	1.092	1.064	1.047	1.047	1.063	1.065
	C	1.182	1.156	1.122	1.102	1.102	1.129	1.133
	D'	1.214	1.187	1.154	1.135	1.138	1.172	1.178

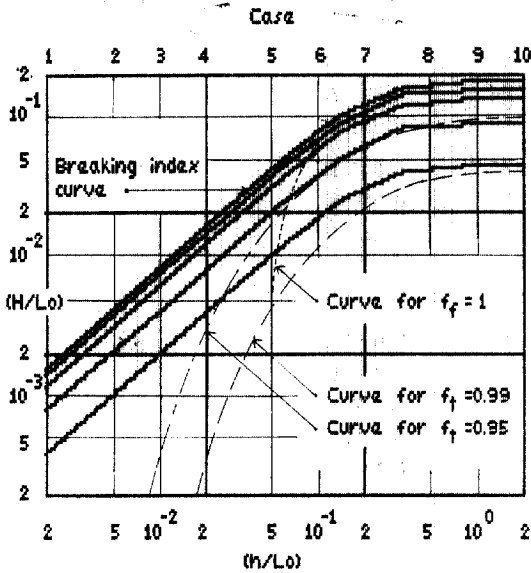


그림 4-1. 50 가지 경우의 파의 제원

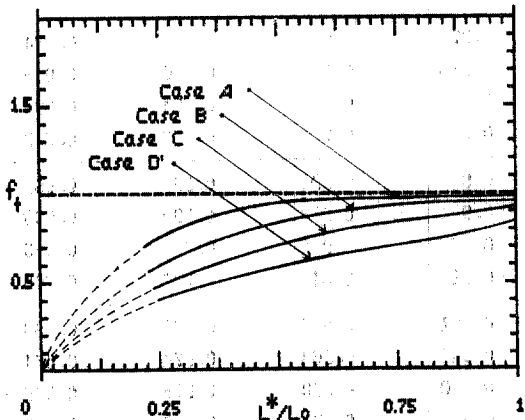


그림 4-2. Case A와 B, C, D에 대한 $f_f - L^*/L_0$ 곡선

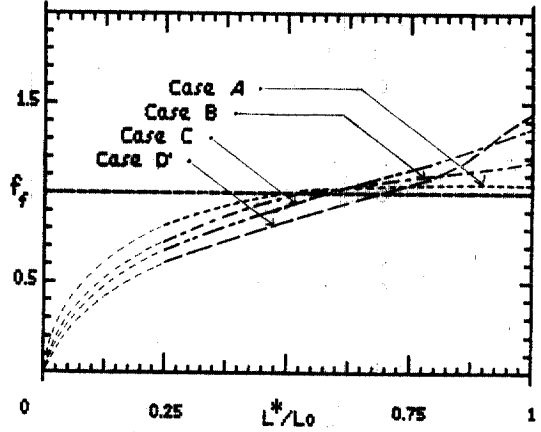


그림 4-3. Case A와 B, C, D에 대한 $f_f - L^*/L_0$ 곡선

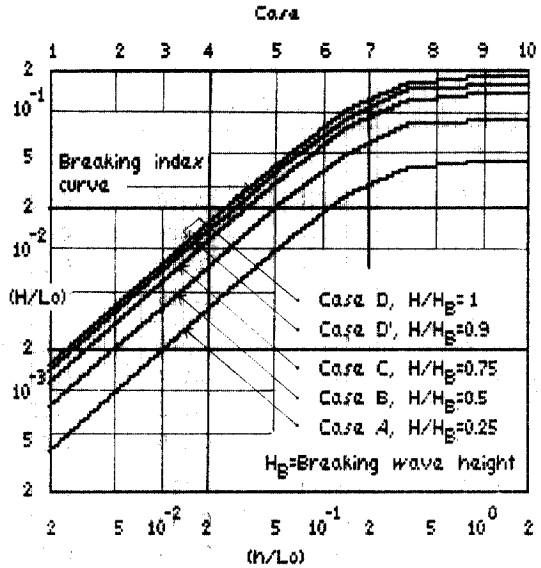


그림 4-4. 비선형효과함수 f_f 와 f_i , f_i 가 각각 1, 0.99, 0.95인 곡선

5. 결 론

흐름함수파이론에 의한 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과는 계산 결과의 분석으로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 심해파(Deep-water waves)의 경우
 - 파고가 높을수록 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과는 증가하지만 수심의 변화에 따른 비선형효과는 비교적 무시할 수 있다.
 - 선형파 이론에 의한 평균 전에너지는 비선형 흐름함수파이론에 의한 것보다 과대평가되

고 평균 전에너지 Flux와 군속도, 파장은 과소 평가된다.

2) 중간수심파(Transitional-water waves)의 경우

· 평균 전에너지와 군속도·파장의 비선형효과는 일정 파고에서 수심이 낮을수록, 그리고 일정 수심에서 파고가 높을수록 증가한다.

· 선형파이론에 의한 평균 전에너지는 흐름함수파이론에 의한 것보다 과대평가되고 군속도와 파장은 과소평가된다. 평균 전에너지 Flux의 비선형효과는 과도적인 양면성을 지닌다.

3) 천해파(Shallow-water waves)의 경우

· 일정 파고에서 수심이 낮을수록, 일정 수심에서 파고가 높을수록 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과는 증가한다.

· 선형파이론에 의한 평균 전에너지와 평균 전에너지와 평균 전에너지 Flux는 흐름함수파이론에 의한 것보다 과대평가되고 군속도와 파장은 과소평가된다.

감사의 말씀

본 연구는 문교부의 연구비 지원으로 수행된 것이며 이에 깊은 감사를 드립니다. 그리고 연구 여건을 마련해 주신 충남대학교 토목공학과에도 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Dean, R.G., "Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves," *J. of Geophys. Res.*, Vol. 70, No. 18, Sep. 15, 1965, pp. 4561~4572.
2. Dean, R.G., "Evaluation and Development of Water Waves Theories for Engineering Application," Vols. 1 and 2, *Special Report No. 1*, U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center. Fort Belvoir, Va., Nov., 1974.
3. Dean, R.G., "Application of Stream Function Wave Theory to Offshore Design Problems," *Offshore Technology Conference*. Paper No. OTC 1613, 1972.
4. Hudspeth, R.T., Dalrymple, R.A., and Dean, R.G., "Comparison of Wave Forces Computed by Linear and Stream Function Methods,"

Offshore Technology Conference, Paper No. OTC 2037, 1974.

5. Huang, M.C., "Stability Pipelines under shoaling Finite Amplitude Waves," *Ocean Engineering Wave Research Facility T.R. 12*, School of Engineering Oregon State University, Corvallis, Oregon 97331, Dec., 1980.
6. Hudspeth, R.T., "Effects of Nonlinearities on Wave Power Estimates," *J. of the power Div., ASCE*, Vol. 103, No. PO1, July, 1977, pp. 51~64.
7. Hudspeth, R.T. and Slotta, L.S., "Linear and Nonlinear Wave Action Estimates," *J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE*, Vol. 104, No. EM2, April, 1978.
8. Mehaute, B.L., Lu, C.C., and Ulmer, E.W., "Parameterized Solution to Nonlinear Wave Problem," *J. of Water ways, Port, Coastal and Ocean Engineering Div., ASCE*, Vol. 110, No. WW3, Aug., 1978.
9. 方潤奎, 張仁和, 崔恒洵: "해양파의 운동학에 대한 중력파이론과 Stream Function Method의 비교연구." 대한조선학회지 제19권 제2호 1982. 6, pp. 33~39.
10. 이한배: "Stream Function Wave 이론에 의한 파랑의 해석," 명지대학교 공학석사학위논문, 1984.
11. Weinberger, H.F., "Partial Differential Equation," Blaisdell Publishing Company, 1965.
12. Madson, O.S., "Basic Wave Theory," MIT Lecture Note.
13. 李正烈: "흐름함수파이론에 의한 에너지 및 에너지 수송의 비선형효과," 서울대학교 공학석사학위논문, 1986.
14. Smith, A.A., Hinton, E., and Lewis, R.W., "Civil Engineering Systems Analysis and Design," John Wiley & Sons, 1983.
15. Kuester, J.L., and Mize, J.H., "Optimization Techniques with Fortran," McGraw-Hill Book Company, 1973.
16. Marquardt, D.W., "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters," *J. of Society of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 11, No. 2, June, 1963.

(接受: 1986. 3. 12)