

# 變位法에 의한 曲線桁橋의 靜的彈性解析

An Elastic Static Analysis of Curved Girder Bridges  
by the Displacement Method

鄭	振	煥*
Chung,	Jin	Hwan
張	丞	弼**
Chang,	Sung	Pil

## Abstract

The stiffness matrix of circularly curved frame elements including the warping effects is formulated by the solutions of vlasov's differential equations, and the procedure for the elastic static analysis of curved girder systems by the displacement method is presented.

The validity of this method has been demonstrated by comparing the analysis results with other solutions.

And if the tangential lines of the two frame element axes connected at any nodal point coincide, the transformation to the global coordinate system can be omitted when we analyze the structures consisting of circularly curved elements.

The theory introduced in this thesis can be applied with sufficient accuracy to the structures built up with horizontally circular curved frame elements which have closed or open cross sections and are symmetric to the axis perpendicular to the plane of the curvature, such as prestressed concrete box girder bridges.

## 要 旨

뒹(warping)의 效果가 포함된 圓形曲線部材의 部材剛度매트릭스를 微分方程式의 解析的인 解를 使用하여 誘導하고, 圓形曲線部材의 變位法에 依한 靜的彈性解析方法을 提示하였다.

例題를 통하여 얻어진 結果는 다른 方法에 依한 解析結果와 잘 一致하고 있어, 本 論文의 正當性을 입증하였고 圓形曲線部材로 構成된 構造物을 解析할 때 曲線座標系를 使用하므로써, 한 절점에 연결된 양쪽 部材軸의 接線이 一致한다면, 局部座標系로부터 全體座標系로의 變換이 必要없음을 보였다.

本 論文에서 誘導된 理論은 P.S.箱子桁 등의 閉斷面 또는 部材平面과 垂直인 軸에 대하여 대칭인 開斷面을 갖는 水平圓形曲線部材로 이루어진 構造物의 嚴密한 解析에 適用할 수 있다.

\* 正會員 · 釜山大學校 工科大学 專任講師, 土木工學科

\*\* 正會員 · 서울大學校 工科大学 副教授, 土木工學科

## 1. 序 論

複雑한 현대 도시의 교통난을 해결하기 위하여 필연적으로 나타나는 것 중의 하나가 立體交叉路 등에서 볼 수 있는 曲線桁橋이고, 또 여기에 사용되는 曲線部材는 외견상으로는 경제성으로 보아 直線部材를 연결하여 사용하는 것보다 훨씬 더 유리한 형식이다.<sup>(1,2)</sup> 그럼에도 불구하고, 曲線部材는 그것의 解析과 設計에 內包된 복잡성 때문에 널리 보급되지 못하였다. 그러나 曲線部材에 관한 研究는 전자계산기의 발전과 더불어 1960년 경부터 본격적으로 시작되었다.

曲線桁橋에 관한 靜的 解析理論들은, 拘束된 靑(warping)의 效果를 고려하는 靑보理論, 拘束된 靑의 效果를 무시하는 靑보理論, 그리고, 板理論에 의한 方法 등으로 크게 구분할 수 있다.

拘束된 靑의 效果를 무시한 靑보理論에 관한 것으로는, Fickel<sup>(3)</sup>이 1959년에 應力法으로 單一曲線部材를 解析하였고, 뒤를 이어 Lavelle<sup>(4)</sup>, Morris<sup>(5)</sup>들이 假想일과 接침의 原理 등을 利用하여 變位法으로 曲線部材를 해석하였다.

拘束된 靑의 效果를 포함하는 靑보理論에 관한 것으로는, Vlasov<sup>(6)</sup>에 의해 曲線部材의 舉動에 관한 基本微分方程式이 세워졌고, 梁昌鉉<sup>(2)</sup>, Brookhart<sup>(7)</sup>들은 應力法의 형태로 曲線部材를 解析하였는데, 特히 梁昌鉉은 撓角方程式을 適用하여 放射形 橫桁이 있는 水平連續曲線格子桁에 대한 解析을 하였다. Heins<sup>(8,9)</sup>는 Vlasov가 세운 微分方程式중 面外舉動에 관한 微分方程式의 解를 解析적으로 求하고, 이를 有限差分法을 使用하여 曲線部材의 解析에 適用하였다. 또, Master<sup>(10)</sup>들은 曲線部材의 部材剛度매트릭스를 求하여 連續曲線部材를 解析하였고, Reddy<sup>(11)</sup>는 傳達매트릭스法을 使用하여 曲線部材의 部材剛度매트릭스를 구했다. 그리고 中井 博<sup>(12)</sup>들은 曲率面內變形과 面外變形이 連成할 경우의 曲線部材를 傳達매트릭스法으로 解析하였다.

끝으로, 板理論에 依한 方法<sup>(13)</sup>으로는, 直交異方性板理論, 折板理論, 有限帶板要素法, 有限要素法 등이 있으며, 主로 箱子桁 斷面을 가진

曲線部材의 解析에 適用된다.

斷面의 性質 및 曲率이 다른 曲線部材들로 이루어진 구조물(S-字形, 曲線格子桁 등)들의 解析에는 應力法을 사용하는 것 보다는 變位法을 사용하는 것이 유리한 경우가 많다.

本 研究의 目的은 圓形曲線部材의 面內舉動 및 拘束된 靑의 效果가 포함된 面外舉動에 관한 部材剛度매트릭스를 誘導해서, 圓形曲線部材들로 이루어진 曲線桁 및 直線橫桁들로 構成된 曲線桁橋의 變位法에 依한 靜的彈性解析法을 提示하는데 있다.

## 2. 圓形曲線部材의 舉動

### 2.1 概 要

曲率이 一定한 圓形曲線部材의 部材座標系를 그림(2.1)과 같이 曲線座標系(curvilinear coordinate system:  $\xi, \eta, \zeta$ )로 設定한다. 座標軸  $\overline{o\xi}$ ,  $\overline{o\eta}$ ,  $\overline{o\zeta}$ 는 오른손 법칙에 의해 서로 直交하고 있으며, 座標軸  $\overline{o\zeta}$ 는 部材의 材軸과 一致하는 圓形曲線이 되도록 한다. 또, 이 部材에 作用하는 荷重으로는, 각 座標軸에 平行하게 作用하는 等分布荷重  $q_\xi, q_\eta, q_\zeta$  및 등분포모멘트하중  $m_\xi, m_\eta, m_\zeta$ 들이 있다. 그리고, 다음과 같은 假定을 둔다.

1. 材料는 Hooke의 法則을 따른다.

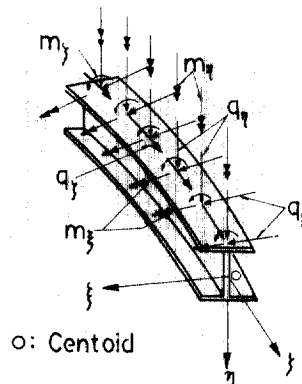


그림 2.1 Curvilinear Coordinate System and Loadings

2. 斷面의 가장 큰 치수는 部材의 曲率半徑에 비하여 충분히 작다.

3. 剪斷變形에 의한 영향은 무시한다.

### 2.2 記號

本 論文에 使用된 記號는 다음과 같다.

$u$  : 曲率中心方向( $\xi$ 軸 方向)變位

$v$  : 部材平面과 直角인 方向( $\eta$ 軸 方向)變位

$w$  : 部材의 材軸方向( $\zeta$ 軸 方向)變位

$\phi$  : 部材軸( $\zeta$ 軸)의 廻轉角

$Q_\xi, Q_\eta$  : 각각  $\xi, \eta$ 軸方向의 剪斷力

$M_\xi, M_\eta$  : " 둘레의 휨모멘트

$M_w$  : 바이모멘트(bimoment)

$N$  : 軸方向力,  $R$  : 部材의 曲率半徑

$\kappa_\xi, \kappa_\eta$  : 각각  $M_\xi, M_\eta$ 에 의한 曲率

$A$  : 部材斷面積

$C_w$  : 휨常數(warping constant)

$E$  : 彈性係數,  $G$  : 剪斷彈性係數

$I_\xi, I_\eta$  : 각각  $\xi, \eta$ 軸에 관한 斷面二次모멘트

$K_T$  : 비틀常數(torsion constant)

$T$  : 비틀모멘트,  $\theta$  : 單位길이당의 비틀각

$\psi$  :  $\eta$ 軸에 관한 部材軸의 기울기

### 2.3. 힘과 變位와의 關係<sup>(6), (8), (9)</sup>

曲線部材에 관한 힘과 變位와의 關係는 다음 의 式(1)~(5)와 같다. (단  $(\prime) = \frac{d(\quad)}{d\zeta}$ ).

$$N = EA\varepsilon_\xi = EA(w' - u/R) \quad \dots\dots(1)$$

$$M_\xi = -EI_\xi\kappa_\xi = -EI_\xi(v'' - \phi/R) \quad \dots\dots(2)$$

$$M_\eta = EI_\eta\kappa_\eta = EI_\eta(u'' + w'/R) \quad \dots\dots(3)$$

$$T = GK_T\theta - EC_w\theta'' = GK_T(\phi' + v'/R) - EC_w(\phi'' + v''/R) \quad \dots\dots(4)$$

$$M_w = EC_w\theta' = EC_w(\phi'' + v''/R) \quad \dots\dots(5)$$

### 2.4. 微分方程式 및 解

曲線部材에 관한 平衡方程式<sup>(6), (8), (9)</sup>에 式(1)~(4)를 代入하면 다음의 式(6)~(9)와 같은 4개의 變位函數들에 관한 聯立微分方程式을 얻을 수 있다.

$$EI_\eta u^{iv} + \frac{EI_\eta}{R} w'''' - \frac{EA}{R} w'' + \frac{EA}{R^2} u = q_\xi \quad \dots\dots(6)$$

$$\frac{EI_\eta}{R} u'' - \frac{EA}{R} u' + \left( EA + \frac{EI_\eta}{R^2} \right) w'' = - \left( q_\zeta + \frac{m_\eta}{R} \right) \quad \dots\dots(7)$$

$$\left( \frac{EC_w}{R^2} + EI_\xi \right) v^{iv} - \frac{GK_T}{R^2} v'' + \frac{EC_w}{R} \phi^{iv} - \frac{EI_\xi + GK_T}{R} \phi'' = q_\eta \quad \dots\dots(8)$$

$$\frac{EC_w}{R} v^{iv} - \frac{EI_\xi + GK_T}{R} v'' + EC_w \phi^{iv} - GK_T \phi'' + \frac{EI_\xi}{R^2} \phi = m_\zeta \quad \dots\dots(9)$$

위의 4개의 微分方程式들로부터, 曲線部材의 部材面內에서의 變位  $u, w$  와 面外의 變位  $v, \phi$  는 서로 독립적이라는 사실을 알 수 있다. 式(6)과 (7)을 聯立해서 풀면 다음의 式(10) 및 (11)과 같은 變位函數  $u$  및  $w$  를 얻을 수 있다.

$$u = C_1 \cos \frac{\zeta}{R} + C_2 \zeta \cos \frac{\zeta}{R} + C_3 \sin \frac{\zeta}{R} + C_4 \zeta^2 \sin \frac{\zeta}{R} + C_5 R - \frac{R^3}{EI_\eta} \zeta \left( q_\zeta + \frac{m_\eta}{R} \right) + \frac{R^2}{EA} q_\xi \quad \dots\dots(10)$$

$$w = C_1 \sin \frac{\zeta}{R} + C_2 \left[ (2 - a_1) R \cos \frac{\zeta}{R} + \zeta \sin \frac{\zeta}{R} \right] - C_3 \cos \frac{\zeta}{R} + C_4 \left[ (2 - a_1) R \sin \frac{\zeta}{R} - \zeta \cos \frac{\zeta}{R} \right] + C_5 \zeta + C_6 - \frac{R^2 \zeta^2}{2EI_\eta} (q_\zeta + m_\eta/R) \quad \dots\dots(11)$$

여기서,  $a_1 = (A \cdot R^2 + 3I_\eta) / (A \cdot R^2 + I_\eta)$ 이다.

또, 式(8)과 (9)를 聯立해서 풀면 變位函數  $v$  및  $\phi$  를 얻을 수 있다. <sup>(8), (9)</sup>

$$\phi = A_1 \cosh \frac{\zeta}{a} + A_2 \sinh \frac{\zeta}{a} + A_3 \cos \frac{\zeta}{R} + A_4 \zeta \cos \frac{\zeta}{R} + A_5 \sin \frac{\zeta}{R} + A_6 \zeta \sin \frac{\zeta}{R} + \frac{R^2}{EI_\xi} m_\zeta - \left( \frac{1}{GK_T} + \frac{1}{EI_\xi} \right) R^3 q_\eta \quad \dots\dots(12)$$

$$v = \frac{a^2}{R} A_1 \cosh \frac{\zeta}{a} + \frac{a^2}{R} A_2 \sinh \frac{\zeta}{a} - A_3 R \cos \frac{\zeta}{R} + A_4 \left[ Y \sin \frac{\zeta}{R} - R \zeta \cos \frac{\zeta}{R} \right] - A_5 R \sin \frac{\zeta}{R} - A_6 \left[ Y \cos \frac{\zeta}{R} + R \zeta \sin \frac{\zeta}{R} \right] + A_7 + A_8 \zeta - \frac{q_\eta R^2}{2GK_T} \zeta^2 \quad \dots\dots(13)$$

여기서,  $a^2 = \frac{EC_w}{GK_T}$ ,  $Y = 2EI_\xi R^4 / (EC_w + EI_\xi R^2 + GK_T R^2)$ 이고  $C_1 \sim C_6$  및  $A_1 \sim A_8$  은 積分常



$$\begin{aligned} \phi_j = & A_1 \cos h \frac{R\alpha}{a} + A_2 \sin h \frac{R\alpha}{a} \\ & + A_3 \cos \alpha + R\alpha(A_4 \cos \alpha + A_5 \sin \alpha) \\ & + A_5 \sin \alpha + \frac{R^2}{EI_t} m_c \\ & - R^3 \left( \frac{1}{GK_T} + \frac{1}{EI_t} \right) q_v \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_i = & \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{R^2} \right) \left( A_1 \sin h \frac{R\alpha}{a} \right. \\ & \left. + A_2 \cos h \frac{R\alpha}{a} \right) + \frac{Y}{R^2} \\ & (A_4 \cos \alpha + A_5 \sin \alpha) + \frac{A_8}{R} - \frac{R^2 \alpha}{GK_T} q_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -v_j' = & \frac{a}{R} \left( A_1 \sin h \frac{R\alpha}{a} + A_2 \cos h \frac{R\alpha}{a} \right) \\ & + A_3 \sin \alpha + A_4 (-R \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha \\ & + \frac{Y}{R} \cos \alpha) - A_5 \cos \alpha \\ & + A_6 \left( \frac{Y}{R} \sin \alpha - R \sin \alpha - R\alpha \cos \alpha \right) \\ & + A_8 - \frac{R^4 \alpha^2}{2GK_T} q_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_j = & \frac{a^2}{R} \left( A_1 \cos h \frac{R\alpha}{a} + A_2 \sin h \frac{R\alpha}{a} \right) \\ & - RA_3 \cos \alpha + A_4 (-R^2 \alpha \cos \alpha + Y \sin \alpha) \\ & - RA_5 \sin \alpha + A_6 (-Y \cos \alpha - R^2 \alpha \sin \alpha) \\ & + A_7 + R\alpha A_8 - \frac{R^3 \alpha}{GK_T} q_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T)_i = & + \left\{ \frac{Y}{R^2} \left( GK_T + \frac{EC_w}{R^2} \right) A_4 \right. \\ & \left. + \frac{GK_T}{R} A_8 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_w)_i = & + EC_w \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right) A_1 \right. \\ & \left. + \frac{Y}{R^3} A_6 - \frac{R}{GK_T} q_v \right] \end{aligned}$$

$$(M_t)_i = \{ EI_t \left( 2 - \frac{Y}{R^2} \right) A_6 + Rm_c - R^2 q_v \}$$

$$(Q_v)_i = + \frac{GK_T}{R^2} A_8$$

$$\begin{aligned} (T)_j = & \frac{Y}{R^2} \left( GK_T + \frac{EC_w}{R^2} \right) (A_4 \cos \alpha \\ & + A_5 \sin \alpha) + \frac{GK_T}{R} A_8 - R^2 \alpha q_v \quad \dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_w)_j = & EC_w \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right) \left( A_1 \cos h \frac{R\alpha}{a} \right. \right. \\ & \left. \left. + A_2 \sin h \frac{R\alpha}{a} \right) - \frac{Y}{R^3} A_4 \sin \alpha \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{Y}{R^3} A_6 \cos \alpha - \frac{R}{GK_T} q_v \right]$$

$$\begin{aligned} (M_t)_j = & -EI_t \left( 2 - \frac{Y}{R^2} \right) (A_4 \sin \alpha \\ & - A_5 \cos \alpha) - Rm_c + R^2 q_v \end{aligned}$$

$$(Q_v)_j = -\frac{GK_T}{R^2} A_8 - R\alpha q_v \quad \dots\dots\dots(17)$$

面外舉動에 관한 部材剛度매트릭스의 첫번째 column의 要素  $k_{11}, k_{21}, \dots, k_{11,1}$  들을 구하기 위해서는, 等分布荷重을 0으로 놓고 ( $q_v = m_c = 0$ ), 式(16)에서  $\phi_1 = 1, \theta_i = \dots = v_j = 0$ 을 境界條件으로 하여 積分常數  $A_1 \sim A_8$ 에 관한 8元1次 聯立方程式을 푼다. 이들 積分常數의 값들을 式(20)에 代入하면 이때의 斷面力의 값들이 각각  $k_{11}, k_{21}, \dots, k_{11,1}$ 로 된다. 따라서 式(16)을 3個의 積分常數  $A_1, A_2, A_4$ 에 관한 3元1次 聯立方程式으로 풀어서 8個의 境界條件에 對하여 매트릭스形態로 表示하면 式(18)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{18} & A_{19} & A_{1,10} & A_{1,11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{28} & A_{29} & A_{2,10} & A_{2,11} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{48} & A_{49} & A_{4,10} & A_{4,11} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^{-1} \\ & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{18} & B_{19} & B_{1,10} & B_{1,11} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{28} & B_{29} & B_{2,10} & B_{2,11} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{38} & B_{39} & B_{3,10} & B_{3,11} \end{pmatrix} \\ & \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

또는,

$$[A] = [C]^{-1} [B]$$

여기서,

$$C_{11} = \frac{Y}{R^2} \left( \cos h \frac{R\alpha}{a} - \cos \alpha \right) \sin \alpha$$

$$- R\alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{R^2} \right) \sin h \frac{R\alpha}{a}$$

$$C_{21} = \frac{Y}{R^2} \left( \sin h \frac{R\alpha}{a} - \frac{R}{a} \sin \alpha \right) \sin \alpha$$

$$- \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{R^2} \right) \left( \cos h \frac{R\alpha}{a} - 1 \right) R\alpha \sin \alpha$$

$$C_{31} = \frac{Y}{R} (\alpha - \sin \alpha) \sin \alpha$$

$$C_{12} = Y(1 - \cos \alpha) \left( \cos h \frac{R\alpha}{a} - \cos \alpha \right)$$

$$- \alpha(a^2 + R^2) \left( \cos h \frac{R\alpha}{a} - 1 \right) \sin \alpha$$

$$C_{22} = Y(1 - \cos \alpha) \left( \sin h \frac{R\alpha}{a} - \frac{R}{a} \sin \alpha \right) - \alpha \left\{ a^2 \sin h \frac{R\alpha}{a} + \frac{R^3 \sin \alpha}{a} - R^3 \alpha \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{R^2} \right) \right\}$$

$$C_{32} = R(Y - Y \cos \alpha - R^2 \alpha \sin \alpha) (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - R\alpha(Y \sin \alpha - R^2 \alpha \cos \alpha - R^2 \sin \alpha - Y\alpha) \sin \alpha$$

$$C_{13} = \left( \frac{Y}{R} \sin \alpha - R \sin \alpha - R\alpha \cos \alpha \right) \left( \cos h \frac{R\alpha}{a} - \cos \alpha \right) - \left( \frac{a}{R} \sin h \frac{R\alpha}{a} - \sin \alpha \right) R\alpha \sin \alpha$$

$$C_{23} = \left( \frac{Y}{R} \sin \alpha - R \sin \alpha - R\alpha \cos \alpha \right) \left( \sin h \frac{R\alpha}{a} - \frac{R}{a} \sin \alpha \right) - R\alpha \left( \frac{R}{a} \cos \alpha + \frac{a}{R} \cos h \frac{R\alpha}{a} - \frac{R}{a} - \frac{a}{R} \right) \sin \alpha$$

$$C_{33} = \left( \frac{Y \sin \alpha}{a} - R \sin \alpha - R\alpha \cos \alpha \right) (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) R - R\alpha \sin \alpha \left( R\alpha \sin \alpha + \frac{Y \cos \alpha}{R} - \frac{Y}{R} \right)$$

$$B_{11} = -\frac{Y}{R^2} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$B_{21} = R^2 \alpha \sin \alpha - Y(1 - \cos \alpha) \cos \alpha$$

$$B_{31} = R\alpha - \left( \frac{Y}{R} - R \right) \cos \alpha \sin \alpha$$

$$B_{12} = R\alpha \sin \alpha - \frac{Y}{R^2} \sin^2 \alpha$$

$$B_{22} = \{R^3 \alpha^2 - YR(1 - \cos \alpha)\} \sin \alpha$$

$$B_{32} = R \{R\alpha - \left( \frac{Y}{R} - R \right) \sin \alpha\} \sin \alpha$$

$$B_{13} = -\frac{Y}{R^2} \sin^2 \alpha$$

$$B_{23} = -Y(1 - \cos \alpha) \sin \alpha$$

$$B_{33} = -\left( \frac{Y}{R} - R \right) \sin^2 \alpha$$

$$B_{14} = 0, B_{24} = R\alpha \sin \alpha, B_{34} = 0$$

$$B_{18} = \frac{Y}{R^2} \sin \alpha, B_{28} = Y(1 - \cos \alpha)$$

$$-R^2 \alpha \sin \alpha, B_{38} = \left( \frac{Y}{R} - R \right) \sin \alpha$$

$$-R\alpha \cos \alpha$$

$$B_{19} = -R\alpha \sin \alpha, B_{29} = B_{39} = 0$$

$$B_{1,10} = B_{2,10} = 0, B_{3,10} = R\alpha \sin \alpha$$

$$B_{1,11} = 0, B_{2,11} = -R\alpha \sin \alpha, B_{3,11} = 0$$

또 8개의 境界條件과 그에 該當하는 積分常數  $A_{1k}, A_{2k}, A_{4k}$ 로부터 式(19)에 依해  $A_{6k}$  및  $A_{8k}$ 를 구할 수 있다.

$$A_{6k} = \frac{1}{R\alpha \sin \alpha} \{d_{1k} - \left( \cos h \frac{R\alpha}{a} - \cos \alpha \right)$$

$$A_{1k} - \left( \sin h \frac{R\alpha}{a} - \frac{R}{a} \sin \alpha \right) A_{2k} - R$$

$$(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) A_{4k}\}$$

$$A_{8k} = R \{d_{2k} - \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{R^2} \right) A_{2k} - \frac{Y}{R^2} A_{4k}\}$$

.....(19)

여기서,  $d_{11} = -\cos \alpha$ ,  $d_{12} = -R \sin \alpha$ ,  $d_{13} = \sin \alpha$ ,  $d_{18} = 1$ ,  $d_{22} = 1$  이고, 나머지는 0이다.

面內舉動에 관한 部材剛度매트릭스의 要素들도 같은 方法에 依해 구할 수 있다.

$$k_{1k} = -\left\{ \frac{Y}{R^2} \left( GK_t + \frac{EC_w}{R^2} \right) A_{4k} + \frac{GK_T}{R} A_{8k} \right\}$$

$$k_{2k} = -EC_w \left\{ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right) A_{1k} + \frac{Y}{R^3} A_{6k} \right\}$$

$$k_{3k} = -EI_f \left( 2 - \frac{Y}{R^2} \right) A_{6k}$$

$$k_{4k} = -\frac{GK_T}{R^2} A_{8k}$$

$$k_{8k} = \frac{Y}{R^2} \left( GK_T + \frac{EC_w}{R^2} \right)$$

$$(A_{4k} \cos \alpha + A_{6k} \sin \alpha) + \frac{GK_T}{R} A_{8k}$$

$$k_{9k} = EC_w \left\{ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right) \left( A_{1k} \cos h \frac{R\alpha}{a} \right. \right.$$

$$\left. + A_{2k} \sin h \frac{R\alpha}{a} \right) + \frac{Y}{R^3} (-A_{4k} \sin \alpha$$

$$+ A_{6k} \cos \alpha)$$

$$k_{10,k} = -EI_f \left( 2 - \frac{Y}{R^2} \right) (A_{4k} \sin \alpha - A_{6k} \cos \alpha)$$

$$k_{11,k} = \frac{GK_T}{R^2} A_{6k} \quad \dots\dots\dots(20)$$

여기서, 曲率面內舉動에 관한 微分方程式 中에서 曲率面內의 曲率  $\kappa$ 에 部材軸方向의 變位  $w$ 에 관한 1次 微分項  $\frac{dw}{d\zeta}$ 가 포함되지 않으면 部材剛度매트릭스는 대칭이 되지 않는다. 즉

變形—變形度의 관계식 중에서  $\zeta$ 軸方向의 變形度  $\epsilon_\zeta = \frac{dw}{d\zeta} - \frac{U}{R}$ 가 매우 작기 때문에 무시할 수 있다( $\frac{dw}{d\zeta} = \frac{U}{R}$ )고 가정하여 이를  $M_\zeta$ 에 대응하는 曲率  $\kappa_\zeta = \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{d\zeta}$ 에 代入하면 처짐  $w$ 에 관한 항을 소거할 수 있기 때문에 이 結果로부터 처짐  $u$ 를 쉽게 구할 수 있다. 그러나, 上記 假定下에서 구한 曲線部材의 部材剛度 매트릭스는 대칭성을 잃게 된다. 따라서 圓形 曲線部材의 部材剛度 매트릭스를 微分方程式의 解를 使用하여 얻으려고 한다면,  $\zeta$ 軸方向의 變形

度  $\epsilon_\zeta$ 는 아주 작아서 무시할 수 있다는 假定을 취할 수 없다.

### 3.2. 曲線桁의 解析

變位法에 依해 構造物을 解析하는 一般的인 과정은 먼저 各 部材의 部材剛度 매트릭스를 計算하여 이것들은 全體座標系(global coordinate

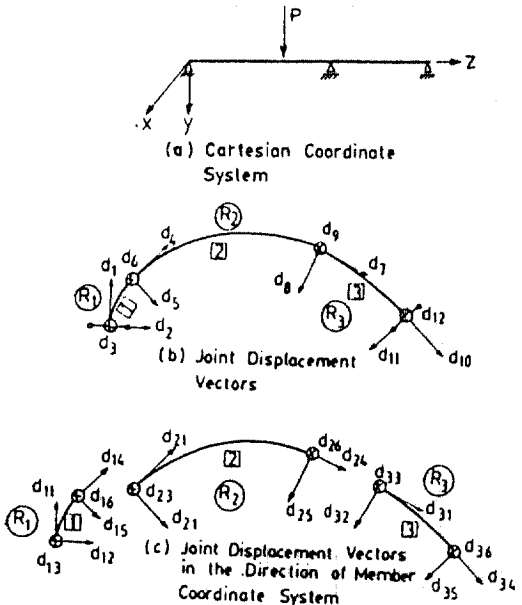


그림 3.2 Cartesian and Curvilinear Coordinate System

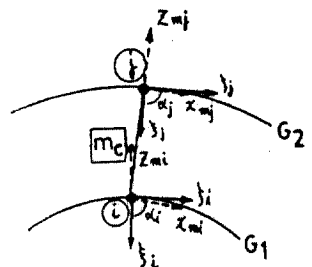
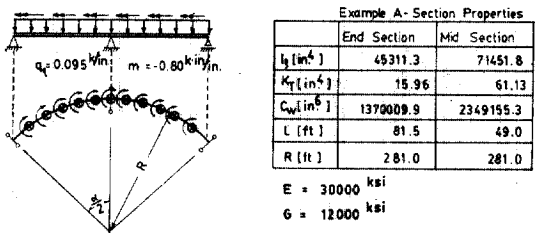
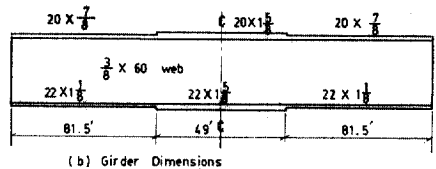


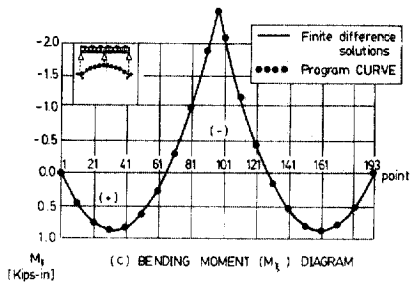
그림 3.3 Grid System with Curved Girder Elements.



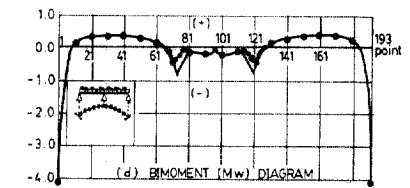
(a) Girder Loading



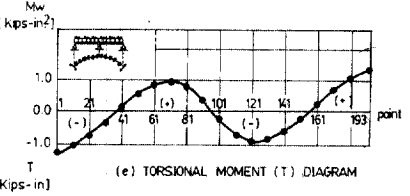
(b) Girder Dimensions



(c) BENDING MOMENT ( $M_1$ ) DIAGRAM



(d) BEMOMENT ( $M_w$ ) DIAGRAM



(e) TORSIONAL MOMENT (T) DIAGRAM

그림 4.1 Example A-Analysis of a Two Span Continuous Curved Girder with Variable Cross Sections

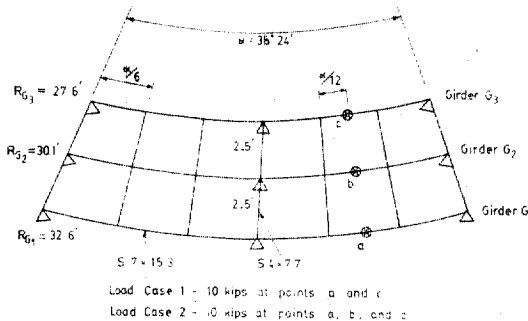


그림 4.2 Example B-Analysis of a Two Span Continuous Curved Girder System

system)로 변환해서, 集합된 部材剛度매트릭스 (assembled member stiffness matrix)를 구한 다음 節點에 作用하는 荷重과 힘의 平衡條件으로 부터 各 節點의 變位量을 구하여 各 部材의 材

端力을 얻는 것이다. 部材座標系로부터 全體座標系로 變換하는 이유는, 한 節點과 連結되어 있는 部材의 材端變位벡터가 全體座標系로 表示되어 있는 節點變位벡터와 一致하지 않기 때문이다. 만일 하나의 直線상에 있는 構造物(例: 直線連續橋 等)에서, 全體座標軸을 部材座標軸과 一致되게 한다면 全體座標系로의 變換이 꼭 必要한 것은 아니다.

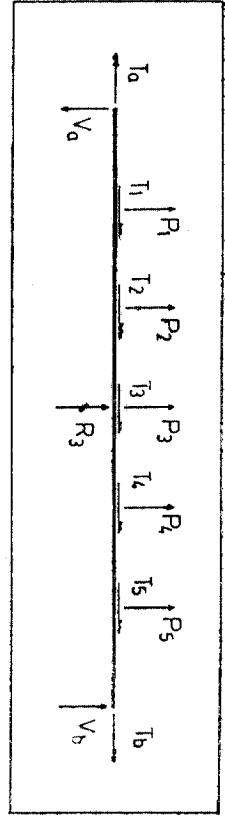
曲線部材는 그 幾何的인 特性으로 인해 部材座標系의 한 軸(本 論文에서는 Z 軸)이 曲線을 이루는 曲線座標系라고 볼 수 있다. 따라서, 그림(3.2a)에 보인 것과 같이 曲率이 다른 圓形曲線部材들이, 그 만나는 節點에서 接線을 共有한다면, 節點變位벡터(그림 (3.2b))와 材端變位벡터(그림 (3.2c))가 一致한다. 따라서, 直角座標系에서 一般的으로 行하는, 局部座標系로부터 全體座標系로의 變換 과정은 曲線部材의 解析에

表 4.1 Example B-Support and Diaphragm Reactions

Girder G<sub>1</sub> [UNIT : kips, in.]

	Load Case 1				Load Case 2			
	Method I		Method II		Method I		Method II	
	Yang	CURVE	Yang	CURVE	Yang	CURVE	Yang	CURVE
T <sub>a</sub>	-0.5141	-0.5066	-0.8144	-0.8072	-0.7317	-0.7223	-1.1906	-1.1818
V <sub>a</sub>	0.8759	0.8763	0.8602	0.8606	1.3065	1.3068	1.2983	1.2988
R <sub>3</sub>	5.4923	5.4920	5.3480	5.3425	6.9028	6.9023	6.9183	6.9178
T <sub>1</sub>	4.1624	4.1628	4.1117	4.1113	6.1275	6.1293	6.0872	6.0894
T <sub>2</sub>	8.6630	8.6657	7.9877	7.9856	11.9336	11.9360	11.2197	11.2220
T <sub>3</sub>	8.7553	8.7740	7.1229	7.1261	10.8249	10.8410	8.9107	8.9177
T <sub>4</sub>	-12.8276	-12.8420	-11.1804	-11.1770	-17.8881	-17.8980	-15.8953	-15.8920
T <sub>5</sub>	-17.3282	-17.3550	-15.0564	-15.0590	-23.6942	-23.7190	-21.0278	-21.0360
P <sub>1</sub>	0.0178	0.0181	0.0389	0.0399	0.1892	0.1893	0.1940	0.1942
P <sub>2</sub>	0.0614	0.0620	0.0421	0.0430	0.4522	0.4525	0.4270	0.4272
P <sub>3</sub>	0.3705	0.3713	0.3089	0.3093	0.5448	0.5456	0.4478	0.4481
P <sub>4</sub>	0.7920	0.7907	0.9436	0.9460	-0.6652	-0.6658	-0.5845	-0.5844
P <sub>5</sub>	0.7484	0.7462	0.9405	0.9428	-0.9282	-0.9293	-0.8174	-0.8172

CURVE : by this Method  
 Method I : including the warping effects.  
 " II : neglecting "





서는 반드시 必要한 것은 아니다. 그러나, 그림 (3.3)과 같이 2개의 曲線 柱형이 橫桁에 依하여 連結되어 있는 경우를 생각해 보자. 節點  $i$  및  $j$ 에서의 自由度는 曲線座標系에 의거하여 設定되어 있으므로 橫桁의 部材座標系에 의거한 部材剛度 매트릭스를 曲線座標系로 變換시켜 주어야 한다. 橫桁의 頂의 영향을 무시할 수 있다고 假定하면 橫桁의 部材剛度 매트릭스는 式(21)에 依하여 曲線座標系로 變換될 수 있다.

$$[\bar{K}_{mc}] = [R]^T [K_{mc}] [R] \quad \dots\dots(21)$$

여기서,  $[\bar{K}_{mc}]$ : 曲線座標系로 變換된 橫桁의 部材剛度 매트릭스

$[K_{mc}]$ : 直線座標系(局部座標系)에 의거한 一般直線部材의 部材剛度 매트릭스

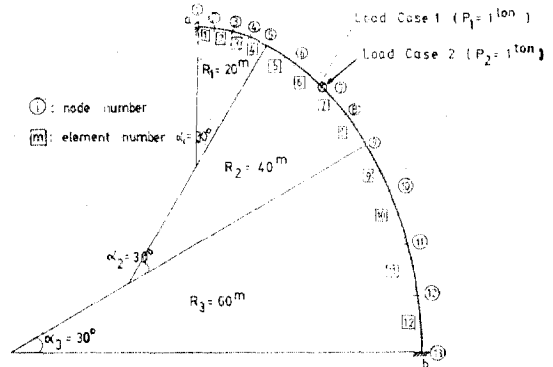
$[R]$ : 變換 매트릭스

$[R]^T$ :  $[R]$ 의 transpose

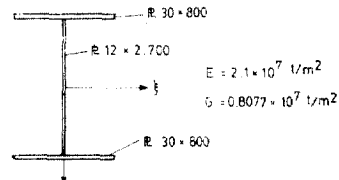
放射形 橫桁인 경우에는  $\alpha_i$  및  $\alpha_j$ 가 모두 直角이 된다.

#### 4. 例題 및 考察

本 論文에서 誘導된 式들을 檢證하기 위하여, 斷面이 變하는 2徑間連續單一曲線部材(例題 A)와 放射形 橫桁을 가진 2徑間連續曲線格子桁(例題 B)에 對한 解析을 遂行하고, 그 結果를 Heins<sup>(8)</sup>와 梁昌鉉<sup>(2)</sup>에 依한 解析結果와 比較하였다. 例題 A 및 B의 解析結果중의 一部分이 그림(4.1) 및 그림(4.2)에 나타나 있다. 例題 A의 경우 斷面의 變化點 부근을 除外하면, 本 研究結果를 基準으로 했을 때의 差異가 1%以內로 상당히 正確하게 一致하고 있다. 그러나, 斷面의 變化點 部近에서는 bimoment를 除外한 처짐 및 斷面力 값들의 差異는 약 5% 이내이나, bimoment의 경우에는, 有限差分法에 의한 Heins의 解析結果의 값이 最大 105%까지 크게 나타



a) Modeling of a Structure



b) Cross Section

그림 4.3 Example C-Analysis of a Curved Girder with Varying Curvature

난다. 이러한 誤差는 曲線部材에 관한 差分式의 誘導時, 그 斷面性質의 變化가 不連續인 것을 連續인 것이라고 假定했기 때문에 생기는 것으로 판단된다.

예제 B의 解析結果들은 梁昌鉉의 解析結果들과 매우 잘 一致하고 있으며 특히 斷面力의 경우에는 대부분 1%以內의 誤差를 나타내고 있다(表(4.1)).

또 그림(4.3)과 같이 曲率이 다른 3개의 圓形曲線部材로 이루어진 構造物을 解析하였다. 이 構造物의 兩端은 完全히 固定되어 있고, 部材의 斷面은 모두 一定하며, 斷面의 性質이 表(4.2)에 정리되어 있다.

點 C에 集中荷重이 作用하며, 部材平面에 수직인 方向으로  $P_1=1\text{ton}$ 이 作用할 때를 Load

表 4.2 Example C-Section Properties

Angle	Area (m <sup>2</sup> )	$K_r$ (m <sup>4</sup> )	$I_r$ (m <sup>4</sup> )	$I_y$ (m <sup>4</sup> )	$C_w$ (m <sup>4</sup> )	Radius (m)
7.5°	0.0804	$1.596 \times 10^{-5}$	0.1091	0.00256	0.00477	20.40.60

단,  $E=2.1 \times 10^7 \text{t/m}^2$   
 $G=0.8077 \times 10^7 \text{t/m}^2$

表 4.3 Comparison of Results for Various Methods

ITEM	point	CURVE	SAP W (error %)	Reilly's Method (error %)	Remarks
Vertical Displacement ( $v$ )	8	0.0052107m		0.0052195m (0.17)	$C_w \neq 0$
		0.22156m	0.22150m (0.03)		$C_w = 0$
Bending Moment ( $M_x$ )	1	-10.969t·m		11.018t·m (0.45)	$C_w \neq 0$
		-8.7540t·m	-8.779t·m (0.29)		$C_w = 0$
Torsional Moment ( $T$ )	1	3.5595t·m		3.4191t·m (-1.92)	$C_w \neq 0$
		1.9347t·m	1.822t·m (-0.58)		$C_w = 0$
Bimoment ( $M_w$ )	1	9.3185t·m <sup>2</sup>		9.3138t·m <sup>2</sup> (-0.05)	$C_w \neq 0$
Radial Displacement	11	-0.0021610m	-0.0021609m (-0.0)		
Bending Moment ( $M_y$ )	7	-3.2192t·m	-3.217t·m (-0.07)		
Axial Force $N$	4	-1.1540t	-1.155t (0.08)		

Case 1, 部材平面내에  $P_2=1\text{ton}$  이 작용할 때를 Load Case 2 라 한다.

이 例題를 本 論文의 理論으로 解析하기 위하여 部材要素의 中心角이  $7.5^\circ$  가 되도록 構造物을 나누었으며, 全體의 節점수는 13 個, 部材要素의 갯수는 12 이다.

또, 本 論文에 의한 解析結果를 비교검토하기 위하여 中心角이  $1.5^\circ$  가 되도록 원호들을 나누고, 이를 直線部材要素(節점수 61, 部材數 60)로 假定한후, 됨의 效果를 무시할 경우에는 SAP W 프로그램을, 됨의 效果를 고려할 때는 Reilly<sup>(14)</sup> 가 제안한 方法(됨의 效果가 包含된 直線部材의 部材剛度매트릭스를 이용하는 方法)을 使用하여 解析하였다.

本 論文에 의한 結果와 SAP W 및 Reilly 의 方法에 依하여 解析된 結果中의 一部를 表(4.3) 에서 읽을 수 있는데, 대부분 매우 잘 一致하고 있다.

## 5. 結 論

本 論文에서는, 拘束된 됨의 效果가 포함된 圓形曲線部材의 部材剛度매트릭스를 微分方程式의 解析的인 解를 使用하여 誘導하고, 變位法에 의한 曲線桁의 靜的彈性解析法을 提示하였다. 本 論文에서 使用된 微分方程式의 解中에서, 面外舉動에 관한 것들은 이미 구해져 있는 것을 사용했고, 面內舉動에 관한 解는 聯立微分方程式

을 직접 풀어서 利用했다.

本 論文의 研究結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) 圓形曲線部材의 部材剛度매트릭스를 微分方程式의 解를 使用하여 얻으려고 한다면, 部材軸方向의 變形도가 아주 작으므로 무시할 수 있다는 가정을 취할 수 없다.

(2) 曲線座標系를 使用함으로써, 한 節點에서 만나는 양쪽 部材의 接線이 一致한다면, 變位法에서 일반적으로 사용되는 것과 같은 座標變換은 생략할 수 있음을 보였다. 따라서 曲率在 다른 圓形曲線部材들로 이루어진 曲線桁도 쉽게 解析할 수 있다.

(3) 本 論文에서 誘導한 理論은 P.C. 箱子桁 등의 閉斷面 또는 部材平面과 垂直인 軸에 對하여 대칭인 開斷面을 갖는 圓形曲線部材로 이루어진 構造物의 엄밀한 解析에 適用될 수 있다.

## 參 考 文 獻

- McManus, P.F., Nasir, G.A., and Culver, C.G., "Horizontally Curved Girder-State of the Art," ASCE, Vol. 95, NO. ST 5, MAY, 1969, pp. 853~870.
- Yang, C.H., "Analytical Investigation of Horizontally Curved Girder Systems," Ph. D. Dissertation, University Alabama, 1972.
- Fickel, H.H., "Analysis of Curved Girders,"

- ASCE, Vol. 85, No. ST 7, SEP., 1959, pp.113~141.
4. Lavelle, F.H., and Boick, J.S., "A Program to Analyze Curved Girder Bridges," *Engineering Bulletin*, No.8, University of Rhode Island, DEC., 1965.
  5. Morris, D.L., "Curved Beam Stiffness Coefficients," *ASCE*, Vol. 94, No. ST 5, MAY, 1968, pp.1165~1174.
  6. Vlasov, V.S., "*Thin-Walled Elastic Beams*," National Science Foundation, Washington, D. C., 1963, pp.448~463.
  7. Brookhart, G.C., "Circular-Arc I-Type Girders," *ASCE*, Vol. 93, No. ST 6, DEC., 1967.
  8. Heins, C.P., "*Bending and Torsional Design in Structural Members*," Lexington Books, D.C. Heath and Company, 1975.
  9. Heins, C.P., and Spates, K.R., "Behavior of a Single Horizontally Curved Girder," *ASCE*, Vol. 96, No. ST 7, JULY, 1970, pp.1511~1524.
  10. Thornton, W.A., and Master, B.G., "Direct Stiffness Formulation for Horizontally Curved Beams," *ASCE*, Vol. 103, No. ST1, JAN., 1977, pp.284~289.
  11. Reddy, M.N., "Stiffnesses of Circular-Arc I-Section Girders," *ASCE*, Vol. 104, No. ST 6, JUNE, 1978.
  12. 中井博, 事口壽男, 谷後寛, "任意荷重を受けり薄肉曲線桁橋のマトリックス構造解析", 日本土木學會論文報告集, 11, No. 255, 1976.
  13. 小西一郎編, "鋼橋", 丸善株式會社, 設計編Ⅱ, 7章, 1976.
  14. Reilly, R.J., "Stiffness Analysis of Grids Including Warping," *ASCE*, Vol. 98, No. ST 7, JULY, 1972, pp.1511~1523.

(接受: 1986. 5. 14)