

낮은 拋物線 아치의 動的 安定領域에 관한 研究

A Study on Dynamic Stability Regions for Parabolic Shallow Arches

朴	光	圭*
Park, Kwang		Kyou
金	文	謙**
Kim, Moon		Kyum
黃	鶴	周***
Hwang, Hak		Joo

Abstract

Dynamic stability of parabolic shallow arches, which are supported by hinges at both ends, is investigated. The Runge-Kutta method is used to perform time integrations of the differential equations of motion with proper boundary conditions.

Based on Budiansky-Roth criterion, dynamic critical load combinations are evaluated numerically for cases of step loads of infinite duration and impulse loads, individually. The results are plotted to get interaction curves. The loci of the dynamic critical loads, which are obtained in this study, are proposed as boundaries between the dynamic stability and instability regions for the parabolic shallow arches.

The results for the parabolic shallow arches are also compared with those for sinusoidal arches of the same arch rises. According to the investigation, the dynamic stability regions for the parabolic arches are larger than those for the sinusoidal arches. However, it is shown that the arch rise is the more governing factor than the shape.

要 旨

動荷重을 받는 兩端 힌지 拋物線 아치의 運動方程式을 Runge-Kutta 方法으로 數值解析하므로써 動的 臨界荷重을 구했다. 낮은 兩端 힌지 拋物線 아치에 step 荷重과 impulse 荷重이 作用하는 경우에 관해 Budiansky-Roth criterion 을 적용하여 動的 臨界荷重을 定義하고, 이를 相關曲線으로써 動的 安定領域을 제안하였다.

拋物線 아치에 대하여 얻어진 결과를 正弦 아치의 경우와 比較하여 아치의 幾何學的 形狀이 動的 安定領域에 미치는 영향을 밝혔고, 動的 安定領域은 아치의 높이에 큰 영향을 받는다는 것을 밝혔다.

* 正會員·延世大學校 大學院 博士課程

** 正會員·延世大學校 工科學 助教授, 土木工程學科

*** 正會員·延世大學校 工科學 教授, 土木工程學科

1. 序 論

아치는 古代 로마시대 이래로 石材로 많이 建造되었을 뿐만아니라, 鐵과 콘크리트의 시대에 들어와서도 가장 먼저 나타난 構造形式으로서 經濟적이고, 構造의으로도 理想的이며, 外觀도 아름답다⁽¹⁾. 19世紀 後半부터는 鋼材 壓延技術의 발전에 따라 高張力 鋼材가 개발되어 鋼材 아치는 급속한 발전을 가져왔고, 今世紀 前半에는 支間의 長大化라는 점에서 아치의 構造解析과 施工技術의 비약적인 발전이 있었다⁽²⁾. 따라서 아치의 斷面은 작아지고, 支間은 길어져 가늘고 긴 아치의 施工이 빈번하게 되었다.

아치가 가늘고 길어질수록 그 強度는 座掘強度에 의하여 결정되고, 또한 座屈強度는 座掘形態에 支配되므로 座掘形態 및 座掘強度의 解析, 즉 安定解析은 아치의 強度 결정에 중요한 인자가 된다.

安定解析은 그 支配方程式이 時間의 函數인가의 여부에 따라 靜的 安定解析과 動的 安定解析으로 분류할 수 있다.

아치의 靜的 安定에 관한 研究는 여러 學者들에 의하여 이루어졌으나^(3, 4, 5, 6), 實際의 構造物에는 일반적으로 動荷重이 作用하기때문에 아치의 動的 安定에 관하여도 研究되어야 할 것이다. 특히 최근에는 아치의 斷面은 점차 작아지는 반면에 荷重은 重量化되고, 車量의 速度는 增加됨에 따라 아치橋梁에 있어서 動的 安定에 관한 研究의 必要性이 점차 인식되고 있다.

아치의 動的 安定에 대한 研究는 대부분이 圓弧아치^(7, 8, 9, 10) 또는 正弦아치^(11, 12, 13)에 국한되어 있다는 점에서 本 研究는 낮은 아치의 일반적인 形式인 拋物線 아치⁽¹⁴⁾를 研究 對象으로 선정하여, 그 動的 臨界荷重을 구하고자 한다. 또한 이를 正弦 아치⁽¹¹⁾의 경우와 비교하므로써 아치의 幾何學的 形狀에 따른 動的 安定性的 變化를 비교하고, 아치의 높이 變化에 따른 動的 安定性的 變化를 고찰하고자 한다.

本 研究에 사용된 基本假定 및 制限事項은 다음과 같다.

- 1) 아치는 平面 내에 있고 對稱構造를 갖는다.
- 2) 荷重은 아치의 平面 내에서 垂直으로 作用

하고 아치의 變形과 無關하다.

- 3) 아치 斷面의 性質은 一定하다.
- 4) 減衰效果는 고려하지 않는다.
- 5) 아치의 兩端은 힌지로 支持되어 있다.
- 6) 아치의 解析은 微小變形 彈性理論에 따른다.

動的 荷重으로서는 그 時間 및 空間的 分布가 주어진 step 荷重과 impulse 荷重을 취하여 그 運動方程式을 각각 數値解析한 결과를 荷重相關圖에 安定領域(stability region)으로 표시하도록 한다. 荷重相關圖는 設計의 基礎資料로 이용될 수 있고, 여러가지 載荷條件에 관련된 安全限界를 구하는데 사용될 수 있다⁽¹⁵⁾. 따라서 여러가지 위치에 動的 荷重이 組合되어 作用할 때 動的 臨界荷重(dynamic critical load)를 구하고, 組合된 荷重相互間의 影響을 파악하는 것은 아치 構造物의 動的 安定에 관하여 종합적인 정보를 준하는 점에서 중요하다 할 수 있다.

2. 運動方程式

2.1 낮은 아치의 基本 運動方程式

그림 1은 對稱인 拋物線 아치의 幾何學的 形狀을 보인다. 그림 1과 같은 아치의 運動方程式은 다음과 같다^(11, 16).

$$EI(Y_{,xxxx} - Y_{0,xxxx}) + NY_{,xx} + P(X, T) + \rho Y(X, T)_{,TT} = 0 \quad (1)$$

여기서 X, Y 는 水平軸 및 垂直軸의 길이이고, T 는 時間이다. 또한 ρ 는 X 軸單位길이당 아치의 質量이고, N 는 水平 thrust로 다음과 같다.

$$N = \frac{EA}{2L} \int_0^L [(Y_{0,x})^2 - \{Y(X, T)_{,x}\}^2] dX \quad (2)$$

여기서 다음과 같은 無次元量을 사용한다.

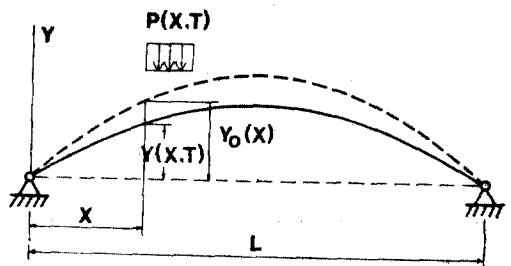


그림 1. Geometric shape of a parabolic shallow arch with both ends hinged

$$x = \frac{X}{L} \quad (3)$$

$$y = \frac{Y}{2r} \quad (4)$$

$$y_0 = \frac{Y_0}{2r} \quad (5)$$

$$t = \frac{T}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (6)$$

$$p_i = \frac{P_i L^3}{2EI\pi^4 r} \quad (7)$$

$$p_u = \frac{P_u L^4}{2EI\pi^4 r} \quad (8)$$

$$w(x, t) = y_0(x) - y(x, t) \quad (9)$$

式(4), (5), (7) 및 (8)에서 r 은 회전반경(radius of gyration)으로

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (10)$$

이다. 이상의 무次元量들을 式(1)과 式(2)에 대입하면 運動方程式은 다음과 같이 무次元化된다.

$$w(x, t),_{tt} + w(x, t),_{xxxx} + nw(x, t),_{xx} - ny_0(x),_{xx} = \pi^4 p(x, t) \quad (11)$$

式(11)에서

$$n = 2 \int_0^1 [2w(x, t),_x y_0(x),_x - \{w(x, t),_x\}^2] dx \quad (12)$$

이다.

2.2 兩端 힌지 拋物線 아치의 運動方程式

拋物線 아치의 變形 前 幾何學的 形態는 그림 1과 같은 座標系에서 다음과 같이 표현된다.

$$Y_0(X) = 4 \frac{H}{L^2} (LX - X^2) \quad (13)$$

여기서 H 는 아치 頂點의 높이(rise)이고, L 은 아치의 支間이다. 式(3)으로부터 式(5)까지를 式(13)에 대입하여 무次元化하면

$$y_0(x) = 4hx(1-x) \quad (14)$$

이 된다. 여기서 h 는 무次元 아치의 높이로서

$$h = \frac{H}{2r} \quad (15)$$

이다. 式(14)을 式(11) 및 式(12)에 대입하면

$$w(x, t),_{tt} + w(x, t),_{xxxx} + nw(x, t),_{xx} + 8hn = \pi^4 p(x, t) \quad (16)$$

$$n = 2 \int_0^1 [8h(1-2x)w(x, t),_x - \{w(x, t),_x\}^2] dx \quad (17)$$

이 된다. 式(16)과 式(17)은 낮은 拋物線 아치의 動的 安定에 관한 無次元 運動方程式이다.

兩端이 힌지도 支持된 경우, 이 아치의 境界條件은 다음과 같이 된다.

$$w(0, t) = 0, w(0, t),_{xx} = 0 \quad (18)$$

$$w(1, t) = 0, w(1, t),_{xx} = 0 \quad (19)$$

따라서, 本研究의 問題는 式(18)과 式(19)을 만족시키는 偏微分方程式인 式(16)과 式(17)의 解 $w(x, t)$ 의 安定性을 檢討하는 것이다.

2.3 運動方程式의 變數變換

偏微分方程式으로 표시된 運動方程式을 常微分方程式으로 變換하기 위하여 無次元 처짐 $w(x, t)$ 를 다음과 같이 近似化한다.

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \phi_k(x) \quad (20)$$

여기서 m 은 modes 數이고, $\phi_k(x)$ 는 mode k 의 形狀函數이며, $a_k(t)$ 는 mode k 의 振幅이다. 函數 $\phi_k(x)$ 는 式(18) 및 式(19)으로 表示된 境界條件을 만족시켜야 한다. 따라서 k mode의 形狀函數는 다음과 같이 선택한다.

$$\phi_k(x) = \sin k\pi x \quad (21)$$

그러므로

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \sin k\pi x \quad (22)$$

이 된다.

式(22)을 式(16) 및 式(17)에 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^m \ddot{a}_k \sin k\pi x + \sum_{k=1}^m k^4 \pi^4 a_k \sin k\pi x - n \sum_{k=1}^m k^2 \pi^2 a_k \sin k\pi x + 8hn = \pi^4 p(x, t) \quad (23)$$

$$n = 2 \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^m 8hk\pi a_k \cos k\pi x (1-2x) - \left(\sum_{k=1}^m a_k k\pi \cos k\pi x \right)^2 \right] dx \quad (24)$$

式(23)과 式(24)을 三角函數의 直交性을 이용하여 간단히 정리하면

$$\ddot{a}_k + k^4 \pi^4 a_k - nk^2 \pi^2 a_k + \frac{16hn}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = 2\pi^4 \int_0^1 p(x, t) \sin k\pi x dx \quad (25)$$

$$n = -\frac{32h}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} a_k (\cos k\pi - 1) - \sum_{k=1}^m k^2 \pi^2 a_k^2 \quad (26)$$

이 된다.

2.4 動的 荷重의 數式化 및 數值解析 方法

式(25)의 右邊은 아치에 作用되는 動的 荷重 項이다. 本 研究에서는, 動的 荷重으로서 step 荷重과 impulse 荷重을 택하여 式(25)를 解析한다. 集中 step 荷重일 경우에는 單位 step 函數를 導入하는 것이 有用하므로 本 研究에서는 集中 step 荷重은 單位 step 函數를 써서 數式化하고⁽¹⁷⁾, 等分布 step 荷重은 積分이 可能하므로 直接 積分하였다. Impulse 荷重에 대하여는 集中 impulse 荷重은 Dirac delta 函數를 이용하여 數式化하고⁽¹⁷⁾, 等分布 impulse 荷重은 直接 積分하였다.

式(25)을 數值解析하는데는 本 研究에서는 他 方法에 비하여 精密度가 높고, 初期值 問題에 광범위하게 이용되는 Runge-Kutta method⁽¹⁸⁾를 사용하였다.

3. 動的 安定性

3.1 動的 臨界荷重

本 研究의 目的은 拋物線 아치에 作用되는 荷重의 時間 및 空間의 分布가 주어져 있을 때, 어떠한 크기의 荷重에서 아치가 不安定하게 되는 가를 決定하는 것이다. 즉 여러가지 載荷變數에 대하여 運動方程式을 解析할 때 荷重의 增加에 따라 應答變位도 變化하는데, 時間의 變化에 따라 變形 前의 形態로 돌아가지 못하는 荷重의 크기(動的 臨界荷重)를 구하고자 하는 것이다.

動的 臨界荷重은 學者에 따라 그 基準이 相異하다. Hoff 와 Bruce⁽¹⁹⁾는 運動의 微小動搖(disturbance)에 따른 位置에너지의 變化는 가장 급격한 傾斜(path of steepest descent)를 따라 다른 靜的 平衡狀態에 이른다는 snap through 形式의 基準을 設定하였고, 이는 Hsu⁽¹⁶⁾에 의하여 phase 空間上에서 일반化되었다. 그러나 이 基準은 impulse 荷重에 制限되어 적용되었고, 數值解析에 적용하기 어려운 점이 있다. Budiansky 와 Roth⁽²⁰⁾는 荷重과, 個個 荷重에 대한 構造物의 平均 應答變數중 最大値의 相關圖에서 荷重의 微

小增加에 따른 應答變數의 급격한 增加가 발생 하는 荷重을 動的 臨界荷重으로 定義하였다. 이 基準은 아치와 曲面板 構造의 動的 安定性의 數值解析에서 많이 사용되는 것^(11,21)으로 本 研究의 基準으로 한다. 本 研究은 應答變數로서 다음 變數를 사용한다⁽²²⁾.

$$u(t) = \left[\int_0^1 w^2(x,t) dx \right]^{1/2} \quad (27)$$

즉 比例의으로 增加하는 荷重에 대하여, 荷重에 따른 $w(x,t)$ 의 時間的 變化중 $u(t)$ 의 最大値 $u_{max}(t)$ 를 구하였을 때, 荷重과 $u_{max}(t)$ 의 相關圖에서 $u_{max}(t)$ 의 增加가 最大인 荷重을 動的 臨界荷重으로 定義한다.

5.2 動的 安定領域

安定解析의 主要한 目的은 構造物에 대한 外部 荷重의 臨界荷重을 구하는 것이다. 그림 2 와 같이 荷重變數 P_i 와 P_j 로 표현되는 荷重系를 생각한다. P_i 와 P_j 가 각각 獨立的으로 作用될 때, 臨界荷重은 각각 A 및 B 點으로 표시할 수 있다. P_i 와 P_j 가 比例의으로 增加할 때 P_i 와 P_j 의 組合된 荷重은 載荷線 λ 에서 增加하게 되고 C 點에서 不安定하게 된다. 이 때 OACB 로 둘러 쌓인 荷重領域은 動的 安定領域을 구성한다.

實際 問題에 있어서 安定領域의 境界를 엄밀히 구하는 것은 간단한 문제가 아니므로 上限界 또는 下限界를 구하여 추정하게 된다^(7,23).

4. 數值計算

荷重의 空間의 分布는 무수히 많은 경우가 존재하나 本 研究에서는 荷重이 아치 支間의 4分

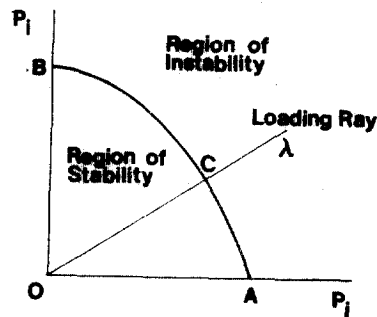


그림 2. Stability region of load space

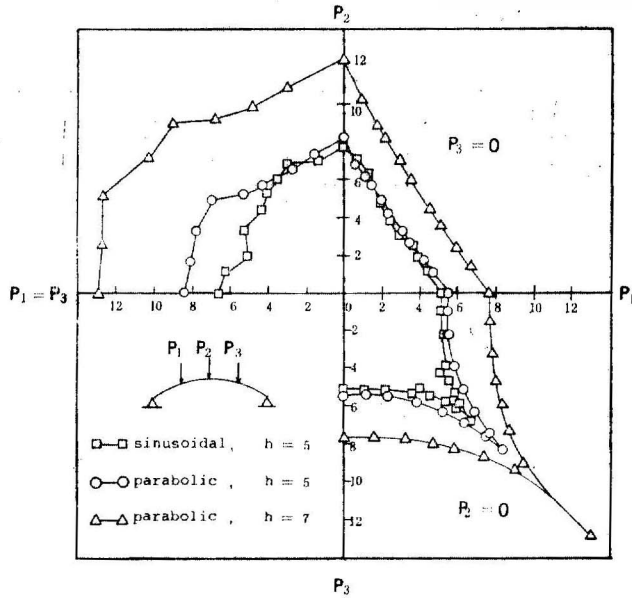


그림 3. Dynamic stability regions for the concentrated step loads($h=5.0$, $h=7.0$)

點에 集中으로 作用하는 경우와 支間의 3分點에 集中으로 作用하고, 支間 全體에 等分布하는 경우를 對象으로 한다. 이런 荷重 分布는 拱의 安定性 檢討에 重要한 分布로서 拱에 對한 靜的 解析이나 正弦 拱의 動的 安定解析 등이 많이 사용된 바 있다^(45,11,24).

4.1. Step 荷重을 받는 拋物線 拱

集中 step 荷重이 拋物線 拱의 各 4分點에 作用하는 경우(그림 3 참조)에 對하여 初期 拱의 無次元 높이 h 가 5.0 및 7.0인 경우에 對한 動的 臨界荷重이 그림 3에 相關曲線으로 표시하였다. 그림 3에서 p_1-p_2 ($p_3=0$)面과 p_1-p_3 ($p_2=0$)面의 動的 安定領域은 正弦 拱와 拋物線 拱가 비슷한 形狀과 크기를 보이나 $p_2-(p_1=p_3)$ 面에서는 拋物線 拱의 動的 安定領域이 正弦 拱의 動的 安定領域보다 매우 크다. 拱에 있어서 頂點을 中心으로한 非對稱座屈型이 가장 취약하고⁽²⁵⁾, 이러한 意味에서 p_1 과 p_3 의 作用點($x=1/4$, $x=3/4$)은 相對的으로 座屈 荷重의 결정에 重要한 位置임에 反하여, 正弦 拱와 拋物線 拱의 幾何學的 差異는 이들 點에서 가장 크다는 것으로부터 $p_2-(p_1=p_3)$ 面에서의 差異가 說明될 수 있다. 그림 4에서 보는

바와 같이 拱의 높이가 매우 낮을 때($h=1.5$; 즉 $x=1/4$, $x=3/4$ 點의 높이 의 正弦 拱에 對한 차이가 미소할 때)는 正弦 拱와 拋物線 拱의 動的 安定領域의 形狀이 거의 비슷하고, 그 크기는 拋物線 拱의 경우가 좀 크며, 動的 安定境界는 線形에 接近하는 것을 볼 수 있다.

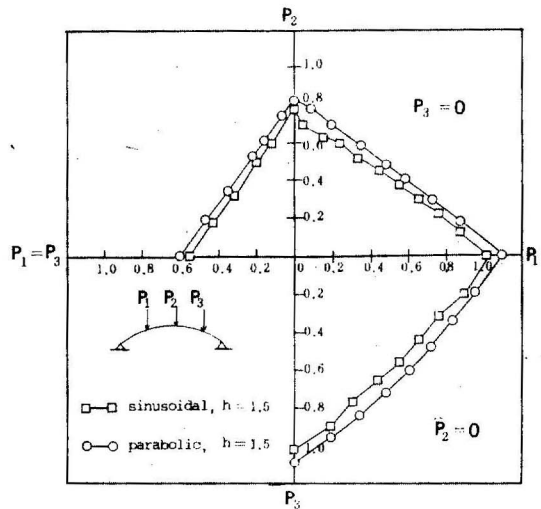


그림 4. Dynamic stability regions for the concentrated step loads($h=1.5$)

표 1. Non-dimensionalized values of dynamic critical loads when step loads are applied

Critical loads	Load types		Concentrated step			Concentrated and Uniformly step	
	Shapes	Rises	1.5	5.0	7.0	3.0	5.0
p_1	Parabolic		1.09	5.47	7.73	2.70	5.08
	Sinusoidal		1.02	5.18	—	2.67	—
p_2 (or p_u)	Parabolic		0.82	8.15	12.26	7.34	22.70
	Sinusoidal		0.79	7.71	—	6.95	—
$p_1=p_2$ (or p_u)	Parabolic		0.48	3.12	4.46	1.88	3.60
	Sinusoidal		0.45	3.10	—	1.81	—
$p_1=p_3$	Parabolic		0.60	8.38	12.95	2.54	6.62
	Sinusoidal		0.56	6.64	—	2.60	—
$p_1=p_2$ (or p_u)= p_3	Parabolic		0.35	5.19	9.01	1.89	5.09
	Sinusoidal		0.33	4.40	—	1.90	—

표 1에서는 5개의 荷重分布에 대한 動的 臨界荷重을 拋物線 아치와 正弦 아치에 대하여 비

교하였다.

拋物線 아치 支間의 3分點에 集中 step 荷重과 支間 全體에 等分布 step 荷重이 作用하는 경우에 대하여 $h=3.0$ 및 $h=5.0$ 인 경우에 대한 動的 安定領域을 그림 5에 표시하였다. 그림 5에서 p_1-p_u 面의 動的 安定領域은 p_1 이 p_u 의 약 10% 미만일 때 급격히 增大하는 것을 제외 하면 대략 線型이며, 原點에 대하여 非對稱하다. $p_u-(p_1=p_3)$ 面에서 無次元 아치 높이 h 가 3.0 以上이면 動的 安定領域이 $p_1=p_3$ 軸에 대하여 對稱이며, 特異點이 存在하여 bifurcation instability가 일어나고, $p_1=p_3$ 軸 근처에서 動的 安定領域이 매우 커지는데 이는 荷重의 對稱에 따른 荷重相互間의 非對稱 座屈에 대한 저항때문으로 사료된다.

4.2. Impulse 荷重을 받는 拋物線 아치

初期의 無次元 높이 h 가 5.0 및 7.0인 拋物線 아치 支間의 4分點에 集中 impulse 荷重이 作用하는 경우에 대하여 그림 6에 표시하였다. 集中 step 荷重이 作用될 때 그림 3과 比較하면 그림 3에서 p_1-p_2 相關曲線은 線型인데 비해 그림 6에서는 原點에 대하여 오목하다. 이는 隣接 荷重의 相互干涉이 impulse 荷重의 경우는 相對的으로 弱함을 나타낸다. p_1-p_3 相關曲線도 그 形狀과 크기에 있어서 매우 다름을 알 수 있다.

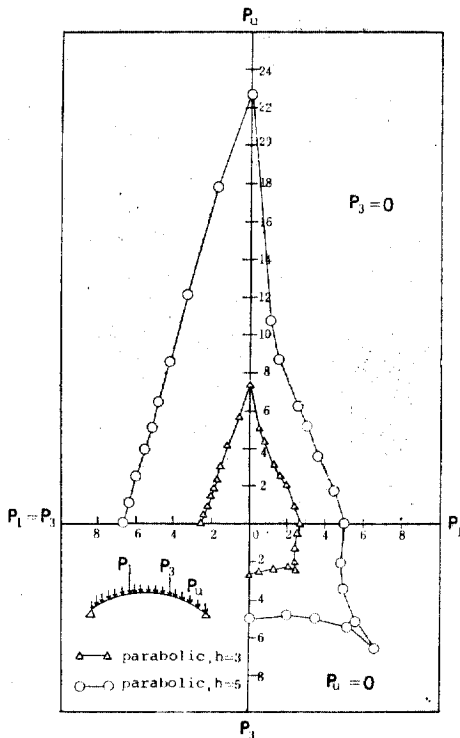


그림 5. Dynamic stability regions for the concentrated step loads and an uniformly step load ($h=3.0$, $h=5.0$)

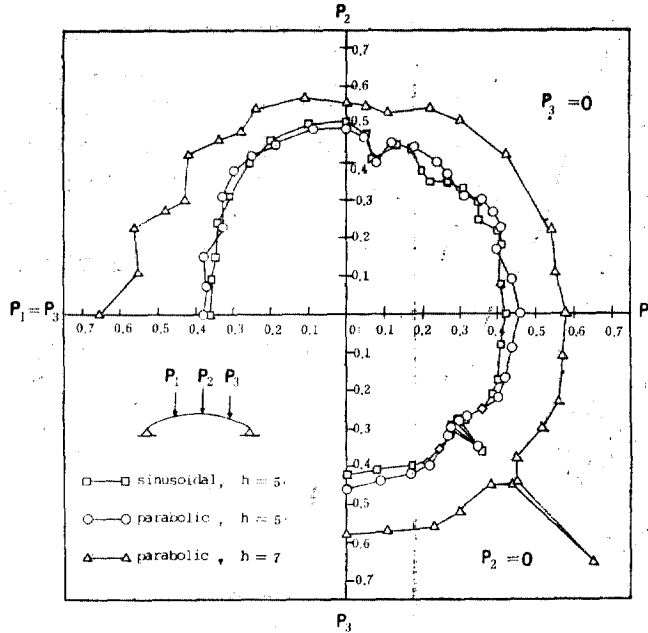


그림 6. Dynamic stability regions for the concentrated impulse loads ($h=5.0$, $h=7.0$)

$p_2-(p_1=p_3)$ 相關曲線의 形狀은 類似하나 impulse 荷重의 경우의 動的 安定領域은 같은 空間의 分布를 갖는 step 荷重의 경우와 비해 動的 安定領域의 범위가 대단히 좁다. 또한 아치의 無次元 높이가 같을 경우, 正弦 아치와 拋物線 아

치의 集中 impulse 荷重에 대한 動的 安定領域의 差異는 step 荷重의 경우와 비교하여 微小함을 볼 수 있다.

그림 7은 拋物線 아치 支間의 3分點에 集中 impulse 荷重이 作用하고, 支間 全體에 等分布

표 2. Non-dimensionalized values of dynamic critical loads when impulse loads are applied

Critical loads	Load types		Concentrated impulse		Concentrated and uniformly impulse	
	Rises	Shapes	5.0	7.0	3.0	5.0
p_1	Parabolic		0.46	0.58	0.26	0.46
	Sinusoidal		0.43	—	0.26	—
p_2 (or p_u)	Parabolic		0.49	0.56	0.55	1.06
	Sinusoidal		0.50	—	0.54	—
$p_1=p_2$ (or p_u)	Parabolic		0.37	0.42	0.19	0.34
	Sinusoidal		0.36	—	0.18	—
$p_1=p_3$	Parabolic		0.38	0.56	0.19	0.38
	Sinusoidal		0.36	—	0.19	—
$p_1=p_2$ (or p_u)= p_3	Parabolic		0.30	0.42	0.15	0.29
	Sinusoidal		0.31	—	0.15	—

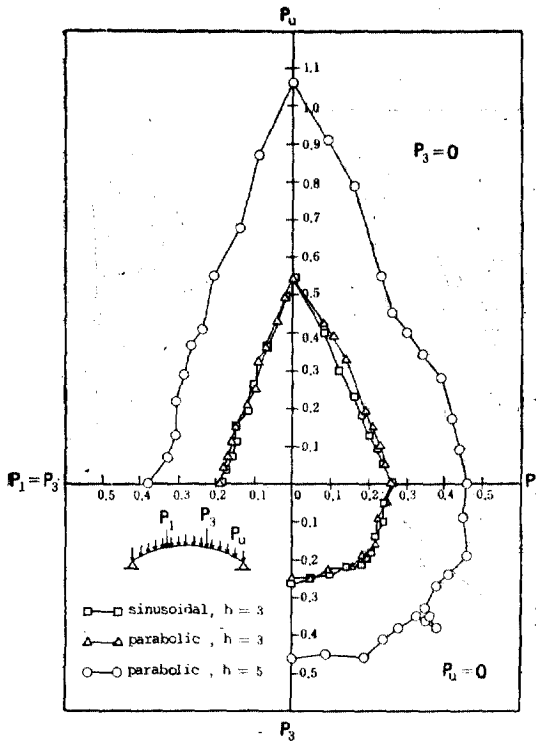


그림 7. Dynamic stability regions for the concentrated impulse loads and an uniformly impulse loads ($h=3.0$, $h=5.0$)

impulse 荷重이 작용하는 경우에 대한 動的 安定領域을 나타낸다. 이 경우 역시 그림 5와 比較하여 荷重間 相互干涉이 相對的으로 弱하고, 또한 安定領域이 좁은 것을 알 수 있다. 正弦아치와 比較하였을 때 그 差異는 微小함을 볼 수 있다. 표 2에는 impulse 荷重이 작용할 경우 5 個의 荷重分布에 대한 動的 臨界荷重을 표시하였다.

5. 結 論

本 研究은 兩端이 힌지로 支持된 낮은 拋物線 아치에 관한 動的 安定領域의 特性을 究明하여 그 結果를 낮은 正弦 아치의 動的 安定領域과 比較하였다. 本 研究을 行하여 얻어진 結果는 다음과 같다.

1. 낮은 拋物線 아치의 step 荷重과 impulse 荷重에 대한 動的 安定性을 荷重의 여러 分布에 대하여 數值解析하여 圖表로 보였다.

2. 낮은 拋物線 아치와 낮은 正弦 아치의 動的 安定領域을 比較하여 impulse 荷重이 作用될 때는 그 差異가 微小하나 step 荷重이 作用될 때는 相對的으로 差異를 보여 拋物線 아치의 경우가 더 安定되어 있음을 밝혔다.

3. 낮은 아치의 動的 安定領域은 아치의 線型 보다는 아치의 높이, 荷重의 時間的, 空間的 分布에 의하여 크게 지배됨을 보였다.

參 考 文 獻

1. 黃鶴周, "水平橫荷重을 받는 圓弧 Arch 에 대하여", 大韓土木學會誌, 第15卷 2號, 1967, p.23~26.
2. 伊藤學, "橋梁의 形態—その 材料·工法·時代に伴ら 變遷", 카ラム, No. 89, 1983, pp.46~53.
3. Hsu, C.S., "Stability of Shallow Arches Against Snap-Through Under Timewise Step Loads," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 35, No. 1, March, 1968, pp.31~39.
4. Schreyer, H.L., "The Effect of Initial Imperfection on Buckling Load of Shallow Circular Arches," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 39, No. 2, June, 1972, pp.445~450.
5. Plaut, R.H., "Stability of Shallow Arches Under Multiple Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 92, No. EM4, October, 1978, pp.1015~1026.
6. Cassidy, J.R. and Plaut, R.H., "Buckling of Shallow Arches Under Combined Distributed and Concentrated Loads," *Mechanics Research Communications*, Vol. 8, No. 1, 1981, pp.41~45.
7. Humphereys, J.S., "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches," *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 5, May, 1966, pp.878~886.
8. Sundararajan, V. and Kumani, D.S., "Dynamic Snap-Buckling of Shallow Arches under Inclined Loads," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 8, August, 1972, pp.1090~1091.
9. Lo, M.K. C. and Masur E.F., "Dynamic Buckling of Shallow Arches," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 102. No. EM

- 5, October, 1976, pp.901~917.
10. Johnson, E.R. and McIvor, I.K., "The Effect of Spatial Distribution on Dynamic Snap-Through," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 45, No. 3, September, 1978, pp.612~618.
 11. Gregory, W.E. and Plaut, R.H., "Dynamic Stability Boundaries for Shallow Arches," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE. Vol. 108, No. EM6, December, 1982, pp.1036~1050.
 12. Lock, M.H., "Snapping of a shallow Sinusoidal Arch under a Step Pressure Load," *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, July, 1966, pp.1249~1256.
 13. Popelar, C.H. and Abraham, G.M., "Comparison of Initial Velocities for Dynamic Instability of a Shallow Arch," *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 5, Proc. Southeast Conf. Raleigh-Durham, Nc, Apr., 1970, pp.745~762.
 14. Parme, A.L. and Holland, E.P., "Parabolic Arches of Variable Thickness," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 90, No. St6, December, 1964, pp.65~87.
 15. Holzer, S.M., Plaut, R.H. and Somers, A.E. Jr., "Stability of Lattice Structures Under Combined Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 106, No. EM2, April, 1980, pp.289~305.
 16. Hsu, C.S., "On Dynamic Stability of Elastic Bodies with Prescribed Initial Conditions," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 4, No. 1, 1966, pp.1~21.
 17. Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., 1980, pp.186~192.
 18. Hamming, R.W., *Numerical methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973, p.641.
 19. Hoff, N.J. and Bruce, V.G., "Dynamic Analysis of the Buckling of Laterally Loaded Flat Arches," *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 32, 1953, pp.276~288.
 20. Budiansky, B. and Roth, R.S., "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells." *NASA TN D-1510*, December, 1966, pp.597~606.
 21. Kao, R. and Perrone, N., "Dynamic Buckling of Axisymmetric Spherical Caps with Initial Imperfections," *Computers and Structures*. Vol. 9, February, 1978, pp.463~473.
 22. Plaut, R.H. and Infante, E.F., "Bounds Motions of Some Lumped and Continuous Dynamic System," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 39, No. 1, March, 1972, pp.251~256.
 23. Huseyin, K., *Vibrations and Stability of Multiple Parameter Systems*, Noordhoff International Publishing, 1978, pp.68~72.
 24. Leontovich, V., *Frames and Arches*, McGraw-Hill Book Company, New York, pp.152~153.
 25. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1961, pp.278~318.

(接受: 1986. 2. 12)