非線型 有限要素方程式의 解法을 위한 組合알고리즘

A Combined Algorithm for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations

柳 演 善*
Ryu, Yeon Sun

Abstract

The purpose of this paper is to devise an efficient and economic solution algorithm for the nonlinear finite element equations. First, procedures and characteristics of the solution methods of ordinary nonlinear equations are described and discussed. Based on the discussion, some promising nonlinear finite element analysis procedures are presented as an algorithmic form. Finally, a conceptually combined algorithm for a solution of nonlinear finite element equations is proposed and analyzed, in which the computational effort is minimized and numerical difficulties can be avoided.

要 旨

本 論文의 目的은 效率的이고도 經濟的인 非線型 有限要素方程式의 解法알고리즘을 考案하는데 있다. 먼저 非線型 聯立方程式의 解析過程 및 特性을 考察하고, 이를 바탕으로 有望한 非線型 有限要素方程式의 解法들을 알고리즘化한 後 이들의 長點을 最大限 活用하여 計算量을 最小化하고 數値解析上의 難點을 克服할 수 있는 組合알고리즘을 提案하였다.

1. 序 論

근래에 非線型的 擧動의 構造物이 增加함에 따라 이들의 解析 및 設計의 必要性이 절실하게 되었다. 有限要素解析法과 最適化技法이 設計過程에 도입되어 信賴性과 經濟性을 갖춘 構造物의 設計가 가능하게 되었다. 構造最適設計過程에서 必須段階인 設計敏感度解析은 構造解析方法과 밀접한 관계를 가진다[1,2]. 이제까지 非線型構造解析을 위한 有限要素方程式의 效率的인 解法開發에 많은 硏究努力이 있었으며 다양한 技法들이 提案되고 있으나[3-13] 어느 한 方法이 各種의 非線型有限要素方程式에 汎用될 수는 없는 실정이다. 따라서 대부분의 非線型有限要素解析 프로그램에서는 使用者가 構造物의 非線型特性 및 解法알고리즘을 선택하게 되어 있으므로[14] 기존 프로그램의 使用者 또는 새 프로그램의 開發者는 各 解法의 特性을 파악하고 있어야 한다. 非線型有限要素解析에서는 反復計算法이 주로 사용되고 있으며[13] 이들은 非線型 聯立方程式의 一般解法에 그 근거를 두고 있기 때문에 聯立方程式에 대한 反復解法의 基本的 特性을 理解하고 이를 非線型 有限要素方程式에 應用하는 것은 매우 중요하다.

本 硏究에서는 非線型 聯立方程式의 다양한 解法을 檢討하고 이를 土臺로 非線型 有限要素方程式의 解法알고리즘을 比較考擦한 다음, 이들의 長點을 取合・活用한 組合알고리즘을 考案하여 效率的이고도 一般性있는 非線型 有限要素

* 正會員・釜山水産大學 助敎授, 海洋工學科

解析過程을 提示하고자 한다.

2. 非線型方程式의 解法

n次元 未知數벡터 $x=(x_1, \cdots, x_n)^T$에 관한 非線型 行立方程式의 一般型은

$$F(x) \equiv (f_1(x), \cdots, f_n(x))^T = 0 \qquad (1)$$

여기서 F는 n개의 成分函數 $f_i(x)$를 갖는 非線型 벡터함수이다. 式(1)의 嚴密解를 위한 一般的 解析解法은 아직까지 알려져 있지 않으며, 近似解를 구하기 위해 주로 使用되는 數値反復法(numerical iterative method)은 線型化法(linearization method), 最小化(minimization)法 및 其他方法으로 大別할 수 있다[15,16].

線型化法에는 Netwton類의 方法, 割線(secant)法, 逐次近似法 等이 포함되고, 最小化法으로는 降下(descent)法, 共軛方向(conjugate directions)法, Gauss-Newton 型의 方法 等을 들 수 있다. 또 接續(continuation)法 및 高次化(higher-order)法 等은 其他方法에 속한다. 近來에 割線法과 最小化法을 結合한 修正法(update method 또는 modification method)이 개발되었는 데 이는 類似 Netwon(quasi-Netwton)法 또는 變計量(variable metric)法이라고도 하며, Broyden 法, PSB (Powell's symmetric Broyden)法, DFP(Davidon-Fletcher-Powell) 法, 그리고 BFGS (Broyden-Fletcher-Goldffarb-Shanno)法 等이 여기에 속한다[17-26].

한편 대부분의 反復法에서는 式(1)의 嚴密解 x^*에 대한 初期推定値 $x^{(0)}$로부터 시작하여 近似解벡터의 數列 $\{x^{(i)}\}$, $i=0, 1\cdots$를 구성해 나간다. 旣知의 $x^{(i)}$로부터 다음 近似解 $x^{(i+1)}$는 增分벡터 $\Delta x^{(i)}$를 計算함으로써 구해진다.

$$\Delta x^{(i)} = x^{(i+1)} - x^{(i)}$$

또는

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta x^{(i)} \qquad (2)$$

여기서 괄호속의 上添字 i는 反復番號이다.

2.1 線型化法

式(1)의 i번째 近似解 $x^{(i)}$ 근방에서 F의 線型化 近似式은,

$$L_i(x) = B_i(x - x^{(i)}) + F^{(i)} \qquad (3)$$

여기서 $F^{(i)} = F(x^{(i)})$, B는 線型演算子로서 $n \times n$ 行列이다. 近似式(3)은 $x^{(i)}$에서 벡터함수 F와 一致하며, $L_i(x)=0$의 解 $x^{(i+1)}$은 式(1)의 새로운 近似解가 된다. 따라서, 式(3)의 演算子行列 B_i, $i=0, 1, \cdots$가 모두 可逆的이면 方程式(1)을 풀기 위한 非特異(non-singular) 線型化法은

$$\Delta x^{(i)} = -B_i^{-1} F^{(i)}, \quad i=0, 1, \cdots \qquad (4)$$

式(4)의 수행과정에서는 일반적으로 n개의 $F^{(i)}$ 成分과 B_i의 n^2개 要素를 計算해야 하며, n系 線型聯立方程式을 풀어서 $\Delta x^{(i)}$를 구한다. 한편 解의 安定性과 過程의 非特異性을 위해 緩和(relaxation) 및 正規化(regularization)를 式(4)에 도입하는 경우도 있다. 緩和란 係數 $\alpha_i > 0$를 使用하여 增分벡터 $\Delta x^{(i)}$의 크기를 조정함을 의미하고, 正規化란 적당한 母數 λ_i와 單位行列 I를 利用하여 B_i 대신 $B_i + \lambda_i \mathrm{I}$를 使用함으로써 演算子의 非特異性을 企圖하는 것으로서, 이 때의 變形된 式(4)는

$$\Delta x^{(i)} = -\alpha_i (B_i + \lambda_i \mathrm{I})^{-1} F^{(i)} \qquad (5)$$

線型化法中 Netwon 類의 方法에서 使用되는 線型演算子는,

$$B_i = F'^{(h(i))} \equiv \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right]_{x=x^{(h(i))}} \qquad (6)$$

여기서 $h(i) \leqslant i$는 整數函數이고 F'은 Jacobi 行列이다. 式(4)와 (6)에서 $h(i)=i$이면 式(7)의 NR(Newton-Raphson) 法이 얻어지며 $h(i) < i$(보통 $h(i)=0$)이면 修正 NR(modified NR) 法이 定義된다.

$$\Delta x^{(i)} = -[F'^{(i)}]^{-1} F^{(i)} \qquad (7)$$

式(7)의 NR 法에서 얻어지는 近似解數列 $\{x^{(i)}\}$은 일반적인 경우 超一次的(supler linear), 극히 제한적 條件下에서는 二次的(quadratic)으로 收斂하며, 修正 NR 法은 보통의 경우 一次的(linear), 극히 제한적 경우에만 超一次的으로 收斂한다[15]. 또한 NR 法은 每反復回마다 n^2개의 偏導函數 F'을 計算하지만 修正 NR 法에서는 同一한 F'을 數回 反復使用함으로써 計算量을 줄일 수 있다. 한편 偏導函數 F'의 直接計算을 피하기 위하여 一般化된 割線法을 利用할 수도 있으나 이는 過程自體가 不安定한 경향이 있으며 收斂性 또한 만족스럽지 못하다[15,16].

2.2 最小化法

式(1)의 解를 구하는 문제는 式(8)의 汎函數

g를 最小化하는 문제로 代置할 수 있다.

$$g(x)=0.5||F(x)||^2=0.5(F,F) \qquad (8)$$

여기서 $||\cdot||$과 $(\cdot,\cdot)$은 각각 벡터의 norm과 스칼라곱을 表示한다. 實函數벡터 F에 대하여 $g(x)\geq 0$이며, g를 最小化하기 위한 必要條件은 式(1)이 된다. 따라서 式(1)의 解는 g를 最小化하는 x값과 같다.

汎函數 g를 最小化하는 x를 구하기 위한 反復計算過程은,

$$\Delta x^{(i)}=\alpha_i d^{(i)},\ i=0,\ 1,\ \cdots \qquad (9)$$

여기서 d는 方向벡터, α는 d方向에서 g를 最小化시키는 移動길이이다. 式(9)의 計算過程은 주된 2개의 알고리즘, 即 $d^{(i)}$의 決定과 α_i의 決定過程으로 構成된다. 方向벡터 $d^{(i)}$의 決定方法에 따라 一聯의 最小化法이 定義되는데, 만약 $g(x^{(i+1)})\leq g(x^{(i)}),\ i=0,\ 1,\ \cdots$이 成立하도록 $d^{(i)}$를 결정한다면 이를 降下法이라 한다. 또한 $x^{(i)}$에서 微分可能한 g에 대하여 式(10)을 만족하는 $d^{(i)}$는 g값의 局部的 最大減少를 일으킨다[16].

$$||g'^{(i)}||=-\frac{(g'^{(i)},\ d^{(i)})}{||d^{(i)}||} \qquad (10)$$

여기서 $g'^{(i)}$는 $x=x^{(i)}$에서의 g의 傾斜(gradient)벡터이다. 式(10)을 만족하는 $d^{(i)}$를 最速降下(steepest descent)벡터라 하며 이러한 $d^{(i)}$만을 使用하는 方法을 最速降下法이라 한다. 한편 最速降下벡터는 使用 norm에 따라 다르게 定義되는 데, 특히 對稱陽定(symmetric positive-definite)行列 B에 관한 norm $||x||_B=(x,Bx)^{0.5}$을 사용할 경우 最速降下벡터는 $-B^{-1}g'(x)$이고 이에 따른 最速降下法은,

$$\Delta x^{(i)}=-\alpha_i B_i^{-1} g'^{(i)} \qquad (11)$$

여기서 B_i는 每反復回마다 對稱 및 陽定性을 유지하도록 修正될 수도 있는데 이러한 발상이 後에 論議될 修正法의 根本槪念이다.

이 外에도 모든 $i\neq j$에 대하여 $(d^{(i)},\ d^{(j)})=0$을 만족하는 共軛方向法이 있으며 共軛方向벡터의 計算에는 Daniel 및 Fletcher-Reeves의 共軛傾斜알고리즘이 널리 使用되고 있다[16].

方向벡터 $d^{(i)}$가 결정되었다면 式(9)의 移動길이 α_i를 구하기 위한 最小化 原理는,

$$g(x^{(i)}+\alpha_i d^{(i)})=\min_{\alpha}\{g(x^{(i)}+\alpha d^{(i)})\} \qquad (12)$$

만일 $x^{(i)}+\alpha_i d^{(i)}$가 有用領域(feasible region) 內에 존재하면 式(12)를 만족하는 α_i는 다음 一元方程式의 根이다.

$$(g'(x^{(i)}+\alpha d^{(i)}),\ d^{(i)})=0 \qquad (13)$$

α에 관한 非線型方程式(13)의 近似解는 黃金率探索(golden search)과 같은 直線探索(line search)法을 이용하여 구할 수 있다.

2.3 修正法

式(1)의 近似解를 위한 反復計算時 主된 計算量을 차지하는 F' 또는 그 逆行列을 效率的이고도 經濟的으로 近似化해 가는 것이 修正法의 根本槪念이다. 前述한 Broyden 法, PSB 法, DFP 法 및 BFGS 法 等이 代表的인 方法들이며 이들은 모두 線型問題에서는 全域的으로, 非線型問題에서는 局部的으로, 超一次的 收斂性을 가진다[17~20].

近似解 $x^{(i)}$ 및 $x^{(i+1)}$에 대한 함수 F의 增分벡터를

$$\Delta F^{(i)}=F^{(i+1)}-F^{(i)} \qquad (14)$$

라면 m-階數 直接修正(direct update) 法의 一般型은,

$$\Delta x^{(i)}=-\alpha_i B_i^{-1} F^{(i)} \qquad (15)$$

$$B_{i+1}\,\Delta x^{(i)}\ \Delta F^{(i)} \qquad (16)$$

$$B_{i+1}=B_i+\Delta B_i \qquad (17)$$

式(15)와 NR 方程式(7)을 비교하면 B_i는 $F'^{(i)}$의 直接近似임을 알 수 있기 때문에 式(17)을 直接修正이라 한다. 또 修正된 B_{i+1}이 만족시켜야 할 式(16)을 類似 Newton(quasi-Netwon) 式이라 부르기 때문에 修正法을 類似 Netwon 法이라고도 한다[17~19, 25, 26]. 한편 式(15)~(17)은 모든 反復回에서 $B_i^{-1}=H_i$가 存在해야만 定義可能하며, 이 때 使用可能한 逆修正(inverse update) 法의 一般型은,

$$\Delta x^{(i)}=-\alpha_i H_i F^{(i)} \qquad (18)$$

$$H_{i+1}\,\Delta F^{(i)}=\Delta x^{(i)} \qquad (19)$$

$$H_{i+1}=H_i+\Delta H_i \qquad (20)$$

式(15)와 (18)에서 緩和係數 $\alpha_i=1$을 보통 使用한다. 또 式(17) 및 (20)의 ΔB_i와 ΔH_i의 係數 m은 통상 1 또는 2이며, 이의 여러 가지 公式이 제안되고 있으나 對稱性과 陽定性을 겸비한 修正公式으로는 係數 $m=2$인 DFP 法이나 BFGS

法이 有用하다[19]. 直接 DFP 修正公式은,

$$B_{i+1}=A_i B_i A_i^T \tag{21}$$

$$A_i=I+w^{(i)} v^{(i)T} \tag{22}$$

$$v^{(i)}=\left[\frac{(\Delta x^{(i)},\ \Delta F^{(i)})}{(\Delta F^{(i)},\ H_i \Delta F^{(i)})}\right]^{\frac{1}{2}} H_i \Delta F^{(i)}-\Delta x^{(i)} \tag{23}$$

$$w^{(i)}=\frac{\Delta F^{(i)}}{(\Delta x^{(i)},\ \Delta F^{(i)})} \tag{24}$$

한편 式(1)의 解를 위해서는 B_i를 修正한 후 逆行列을 구하는 式(15)보다는 逆行列 H_i를 修正하는 것이 效率的이다. 式(19)를 만족하며 對稱性 및 陽定性을 繼承維持하는 BFGS 修正公式이 이 目的에 가장 적합한 것으로서 이는 式(21)～(24)에 다음과 같이 置換함으로써 얻어진다.

$$\Delta x \leftrightarrow \Delta F,\ B \leftrightarrow H \tag{25}$$

2.4 其他方法

대부분의 反復法에서 收斂性 및 反復回數에 대한 初期値 $x^{(0)}$의 영향은 대단히 크다. 따라서 反復近似解의 收斂域(domain of convergence)을 擴張함으로써 이러한 初期値 依存度를 줄이자는 것이 接續法의 根本槪念이다[27]. 이를 위하여는 어떤 方程式 $F_0(x)=0$의 解 $x^{(0)}$로부터 式(1)의 解 x^*로 연결시킬 誘導原理가 必要하게 된다. 적당한 母數 $t\in[0,\ 1]$에 대하여 $G(x,0)\equiv F_0(x)$ 및 $G(x,1)\equiv F(x)$인 函數族 $G(x,t)$를 定義하면 $G(x,t)=0$의 解 $x=x(t)$는 $x^{(0)}=x(0)$와 $x^*=x(1)$을 연결하는 經路가 된다. 따라서 t의 區間 $[0,\ 1]$을 $0=t_0<t_1<\cdots<t_l=1$로 나눈 후 $G(x,t_i)=0$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$을 임의의 反復法을 使用하여 풀면 $x(t_l)\equiv x(1)=x^*$를 구할 수 있게 된다. 이 때 $G(x,\ t_i)=0$의 反復解法을 위한 初期値로서는 $G(x,\ t_{i-1})=0$의 解 $x(t_{i-1})$을 利用한다. 이러한 방법이 대부분의 反復法에 結合시켜 收斂域을 擴張시킬 수 있는 數値接續(numerical continuation)法이다.

한편 高次化法의 根本槪念은 線型化法에서 使用하는 1次近似式(3) 대신 高次近似多項式을 利用한 高次方程式의 解를 次期 反復回의 初期値로 사용하여 收斂率을 높이자는 것이다. 高次化法의 槪念을 有用한 方法으로 變換시킬 수 있는 여러 技法이 提案되고 있으나[15], 高次方程式의 解法 및 高階偏導函數 計算등의 難點 때문에 實用的 價値는 의문시 된다.

2.5 各 方法의 比較

효율적인 非線型方程式의 反復解法은 收斂率이 높고 每反復回當의 計算量이 적어야 한다. 理論上 高次化法의 收斂率은 다른 方法에 비해 월등하지만 計算量이 과도하다. 超一次的으로 收斂하는 方法들 중 NR 法이 槪念的으로 簡明하고 또 특수조건하에서는 二次的 收斂率을 가지지만 每反復回當의 計算量이 많은 편이다. 修正 NR 法의 計算量은 NR 法에 비해 매우 줄지만 낮은 收斂率이 그 短點이다. 또 各種의 最小化法의 收斂率은 아직 확인되지 않은 것이 대부분이며 汎函數의 形成에도 難點이 있다.

따라서 적당한 計算量과 超一次的 收斂性을 가진 修正法에 관심이 모아진다. 方程式系의 Jacobi 行列 計算보다는 解를 구하는 것이 主된 문제이므로, 直接修正法보다는 BFGS 法과 같은 逆修正法이 더 效率的일 것이다. 또 BFGS 法은 遂行過程上의 修正行列이 對稱性 및 陽定性을 維持하므로 有限要素方程式의 解法으로도 有用하리라 기대된다. 한편 非線型方程式의 解法에서 收斂域의 擴張을 위해서는 數値接續法을 效率的으로 活用할 수 있다[28].

3. 非線型 有限要素方程式

3.1 定式化 方法

變位法을 利用한 構造解析에서는 주어진 外力 R에 대한 變位 U를 구한 후, 變位-變形率 및 變形率-應力 關係式을 利用하여 構造內部變量을 決定한다. 따라서 構造의 非線型性은 變量間의 關係式 및 境界條件에서 발생하며, 이러한 非線型 構造解析을 위한 定式化 過程을 大別하면 에너지函數法, 全體平衡法 및 增分平衡法을 들 수 있다[29].

에너지函數法은 構造의 에너지函數 $E(R,\ U)$를 最小化하는 U를 찾는 것으로서 前述한 最小化法이 應用될 수 있으나 全體 에너지함수의 設定에 어려움이 있어 特別한 경우를 제외하고는 構造解析에 直接 使用되지 않고 있다[30].

全體平衡法에서는 外力 R과 內力 Q의 平衡條件을 利用한다.

$$Q\equiv K_s U=R \tag{26}$$

여기서 K_s는 割線(secant) 剛度行列로서 變位

U 및 그 履歷의 함수이다. 式(26)은 不均衡力을 利用하여 平衡狀態의 U를 구할 수 있는 非線型方程式이지만, 이 경우 사용 가능한 反復解法의 收斂域이 극히 제한되어 있으므로 實用化에 어려움이 적지 않다.

增分平衡法에서는 最終荷重의 크기를 몇 단계로 나누어 단계별로 증가시켜 가면서 載荷하고 各 단계에서의 平衡變位를 구한다. 荷重段階 t에서의 荷重크기 ${}^tR$에 의한 平衡變位 ${}^tU$를 알았을 때, 하중을 ΔR만큼 증가시킨 다음 단계 $t+\Delta t$에서의 平衡條件은,

$$ {}^{t+\Delta t}R \equiv {}^tR+\Delta R={}^{t+\Delta t}Q \equiv {}^tQ+\Delta Q \qquad (27) $$

여기서 ΔQ는 外力增分 ΔR에 대응하는 內力增分으로서, 變位增分을 ΔU, t에서의 接線(tangent) 剛度行列을 ${}^tK$라 하면,

$$ \Delta Q \equiv {}^tK\Delta U=\Delta R, \quad {}^{t+\Delta t}U={}^tU+\Delta U \qquad (28) $$

增分平衡式(28)에서 ${}^tK$는 ${}^tU$의 함수로서 계산되며, ΔR은 初期變位 ${}^tU$가 ${}^{t+\Delta t}U$에 대한 收斂域內에 있도록 제어되어야 한다. 따라서 增分平衡法은 2.4 節에 記述된 數値接續法에 속하며, 每增分에서의 不均衡力 補正을 위한 反復過程을 定式化하면,

$$ {}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}\Delta U^{(i)}={}^{t+\Delta t}P^{(i-1)} \equiv {}^{t+\Delta t}R-{}^{t+\Delta t}Q^{(i-1)} \qquad (29) $$

$$ {}^{t+\Delta t}U^{(i)}={}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}+\Delta U^{(i)} \qquad (30) $$

式(29)와 (30)의 初期條件은,

$$ {}^{t+\Delta t}U^{(0)}={}^tU, \quad {}^{t+\Delta t}Q^{(0)}={}^tQ, \quad {}^{t+\Delta t}K^{(0)}={}^tK \qquad (31) $$

여기서 ${}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}$은 荷重段階 $t+\Delta t$의 $(i-1)$번째 反復回에서의 不均衡力이다.

3.2 收斂基準

式(29)의 反復計算時 荷重段階 $t+\Delta t$에서의 平衡狀態에 관한 收斂基準은 :

(1) 變位基準

$$ \varepsilon_D^{(i)}=||\Delta U^{(i)}||/||{}^{t+\Delta t}U^{(i)}|| \leqslant \varepsilon_{0D} \qquad (32) $$

(2) 不均衡力基準

$$ \varepsilon_F^{(i)}=||{}^{t+\Delta t}P^{(i)}||/||{}^{t+\Delta t}P^{(0)}|| \leqslant \varepsilon_{0F} \qquad (33) $$

(3) 內部에너지基準

$$ \varepsilon_E^{(i)}=(\Delta U^{(i)},\ {}^{t+\Delta t}P^{(i-1)})/(\Delta U^{(1)},\ {}^{t+\Delta t}P^{(0)}) \leqslant \varepsilon_{0E} \qquad (34) $$

許容限度 ε_{0D}, ε_{0F} 및 ε_{0E}에 대하여 式(32)～(34)가 만족되면 荷重段階 $t+\Delta t$에서의 平衡變位 ${}^{t+\Delta t}U$가 구해진 것으로 간주하며, 이 때 許容限度는 문제의 특성이 잘 반영되도록 설정해야 한다. 卽, 硬化構造(stiffening structure)의 경우에는 ε_{0F}를 작게 하고 軟化(softening) 構造에는 ε_{0D} 또는 ε_{0E}를 작게 함이 효율적이다[3].

3.3 解法 알고리즘

3.3.1 Newton 類의 方法

非線型 有限要素方程式의 解法으로서 가장 흔히 使用되는 反復技法이 NR法 또는 修正 NR法이다[6,7,10-14]. 初期條件(31)로부터 增分平衡式(29)와 (30)을 풀기 위한 NR法을 단계적 알고리즘化하면 :

<u>ALG 1 : NR法</u>

$\boxed{0}$ (i) 反復番號 $i=1$, 荷重段階 $(t=0)$

(ii) 外力벡터 ${}^{t+\Delta t}R={}^tR+\Delta R$ $({}^0R=0)$

(iii) 初期條件 ${}^{t+\Delta t}U^{(0)}={}^tU$ $({}^0U=0)$

${}^{t+\Delta t}Q^{(0)}={}^tQ$ $({}^0Q=0)$

(iv) ${}^{t+\Delta t}K^{(0)}={}^tK$ (${}^0K$=線型剛度行列)

$\boxed{1}$ 式(29)에서 變位增分 $\Delta U^{(i)}$ 계산

$\boxed{2}$ 式(30)에서 總變位 ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$ 계산

$\boxed{3}$ ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$를 이용하여 內力 ${}^{t+\Delta t}Q^{(i)}$ 계산

$\boxed{4}$ ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$에 대응하는 要素剛度行列을 구하고 이를 組合하여 ${}^{t+\Delta t}K^{(i)}$ 계산

$\boxed{5}$ 收斂基準式(32)～(34)가 모두 만족되면 $\boxed{0}$으로 돌아가고$(t=t+\Delta t)$, 그렇지 않으면 $\boxed{1}$로 돌아간다$(i=i+1)$.

ALG 1의 NR法은 收斂速度가 빠른 반면 수행과정에 不利한 점도 있다. 卽, 剛度行列 및 分解(factorization)의 反復的 計算에는 대단한 노력이 소요된다. 따라서 全體計算量을 줄이기 위해 荷重增分 ΔR을 증가시킬 수 있으나, 이는 解의 數値的 安定性 및 精度 때문에 제한을 받는다[3]. ALG 1의 또 다른 短點은 遂行過程이 初期條件에 매우 민감하다는 것이다. 만약 反復過程의 剛度行列이 特異行列에 접근하면 解는 갑자기 數値的 安定性을 잃고 發散하거나 振動할 可能性이 있는데 이 現象은 有限要素系가 微細할수록 심해진다[7]. 따라서 剛度行列의 計算回數를 줄이고 非特異性을 유지하기 위한 式(29)의 修正式은,

$$ {}^{\tau}K\Delta U^{(i)}={}^{t+\Delta t}P^{(i-1)} \qquad (35) $$

여기서 τ로서는 이미 얻어진 平衡狀態中의 하나를 이용하며 보통 $\tau=t$를 사용한다. 式(35)를 이용하여 AiLG 1을 變形하면 :

ALG 2 : 修正 NR 法

0 (i)~(iii) ALG 1과 同一
(iv) ${}^{\tau}U$를 선택하고 대응하는 ${}^{\tau}K$ 계산
1 式(35)에서 $\Delta U^{(i)}$ 계산
2~3 ALG 1과 同一
4 수행하지 않음
5 ALG 1과 同一

ALG 2에서는 每荷重段階에서 剛度行列 및 分解計算이 1회만 행해지고, 일단 安定平衡(stable equilibrium) 상태의 ${}^{\tau}K$를 이용하게 되면 反復過程의 數値的 安定性이 보장된다. 그러나 解近處에서 修正 NR 法의 느린 收斂 때문에 이를 加速化하는 技法들이 提案되고 있다[6,10]. 이들 중에서 비교적 효율적인 Crisfield[6]의 加速修正 NR 法의 變位計算式은,

$$\Delta\overline{U}^{(i)}=a_i\Delta U^{(i)}+b_i\Delta\overline{U}^{(i-1)} \tag{36 a}$$

$$^{t+\Delta t}U^{(i)}={}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}+\Delta\overline{U}^{(i)} \tag{36 b}$$

여기서 $\Delta U^{(i)}$는 式(35)의 解이고 $\Delta\overline{U}^{(i)}$는 加速變位增分이며,

$$a_i=\frac{(\Delta\overline{U}^{(i-1)},\ {}^{t+\Delta t}P^{(i-2)})}{(\Delta\overline{U}^{(i-1)},\ \Delta P^{(i-1)})}\quad(a_1=1) \tag{37}$$

$$b_i=a_i\left[1-\frac{(\Delta U^{(i)},\ \Delta P^{(i-1)})}{(\overline{U}^{(i-1)},\ \Delta P^{(i-1)})}\right]-1\quad(b_1=0) \tag{38}$$

$$\Delta P^{(i)}={}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}-{}^{t+\Delta t}P^{(i)} \tag{39}$$

ALG 3 : 加速修正 NR 法

0~1 ALG 2와 同一
2 (i) 式(36)~(39)에서 $\Delta\overline{U}^{(i)}$ 및 ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$ 계산
(ii) $\Delta\overline{U}^{(i)}$ 및 ${}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}$ 저장
3~5 ALG 2와 同一

ALG 2에 비해 ALG 3에서는 $\Delta\overline{U}^{(i)}$와 ${}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}$의 記憶場所 및 부가적인 常數計算을 필요로 하지만, 各 荷重段階에서 反復回數가 상당히 줄어서 收斂이 加速化됨이 보고되어 있다[6].

비록 加速化 技法을 通하여 修正 NR 法의 收斂率은 개선되었다 하더라도 發散의 制御는 아직 難題로 남아있다. 反復解析過程에서 不均衡力이 增加하면 發散의 징조로 보아야 하며, 이러한 現象은 變位增加에 따라 構造剛度가 커질 때 발생한다. 몇가지의 安定化技法이 ALG 2, 3에 使用될 수 있으나 그 어느 것도 수렴을 보증하기에는 미흡하다[3].

3.3.2 修正法

NR 法의 收斂率을 維持하면서 可及的 적은 計算으로 剛度行列 또는 分解形態를 얻기 위한 技法은 2.3節에 記述된 方法들이 있으나, 效率的인 非線型 有限要素解析을 위하여는 修正剛度行列이 對稱 및 陽定이면서 類似 Newton 方程式 $({}^{t+\Delta t}K^{(i)}\Delta U=\Delta P^{(i)})$을 만족시키고 變位增分 $\Delta U^{(i)}$의 계산이 쉬워야 한다[9]. 이러한 점에서 가장 적합한 BFGS 法에서 逆剛度行列의 修正公式은[29]

$$[{}^{t+\Delta t}K^{(i)}]^{-1}=A^{(i)T}[{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}]^{-1}A^{(i)} \tag{40}$$

여기서

$$A^{(i)}=I+v^{(i)}w^{(i)T} \tag{41}$$

$$v^{(i)}=-C_i{}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}\Delta U^{(i)}-\Delta P^{(i)} \tag{42}$$

$$w^{(i)}=\Delta U^{(i)}/(\Delta U^{(i)},\ \Delta p^{(i)}) \tag{43}$$

式(42)에서 C_i는 修正行列 $A^{(i)}$의 狀態數(condition number)로서[9]

$$C_i=\left[\frac{(\Delta U^{(i)},\ \Delta P^{(i)})}{(\Delta U^{(i)},\ {}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}\Delta U^{(i)})}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

만약 C_i가 매우 크면($\geq 10^6$ 정도), 式(40)의 修正剛度行列은 特異行列에 가까와져서 數値的 不安定을 유발하므로 修正을 중단하는 것이 좋다.

한편 式(40)의 反復修正은 荷重段階 t에 대응하는 平衡狀態로부터 시작되므로 式(40)을 다시 쓰면,

$$[{}^{t+\Delta t}K^{(i)}]^{-1}=\overline{A}^{(i)T}[{}^{t}K]^{-1}\overline{A}^{(i)} \tag{45}$$

여기서 $\overline{A}^{(i)}$는 全體修正行列로서

$$\overline{A}^{(i)}=\overline{A}^{(i-1)}A^{(i)},\quad \overline{A}^{(0)}=I \tag{46}$$

式(41)을 式(46)에 代入하면,

$$\overline{A}^{(i)}=\overline{A}^{(i-1)}+\overline{A}^{(i-1)}v^{(i)}w^{(i)T} \tag{47}$$

全體修正行列 $\overline{A}^{(i)}$가 계산되면 變位增分의 方向벡터 $d^{(i)}$를 구하고, 이 方向에서의 直線探索을 通하여 移動거리 β를 결정한 후 變位增分 $\Delta U^{(i)}$를 계산한다.

$$d^{(i)}=\overline{A}^{(i-1)T}[{}_{i}K]^{-1}\overline{A}^{(i-1)}\,{}^{t+\Delta t}P^{(i-1)} \tag{48}$$

$$\Delta U^{(i)}=\beta d^{(i)} \tag{49}$$

實際計算에서 式(48)의 遂行順序는,

(i) $y^{(i-1)}=\overline{A}^{(i-1)}\,{}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}$ (50)

(ii) ${}^{t}Kz^{(i)}=y^{(i-1)}$ (51)

(iii) $d^{(i)}=\overline{A}^{(i-1)T}Z^{(i)}$ (52)

式(51)에서 보는 바와 같이 ${}^{t}K$를 계수행렬로 하고 右邊벡터만이 바뀌는 線型聯立方程式을 풀어야 하기 때문에 分解된 ${}^{t}K$를 계속 이용함으로써 計算量은 매우 적어진다. 한편 式(49)의 β를 구하기 위한 直線探索은 逐次內部에너지 增分이 許容限度 ε_L에 대한 式(53)을 만족할 때까지 수행하거나, $\beta=1$로 고정할 수 있다.

$$(d^{(i)},\ {}^{t+\Delta t}P^{(i)})\leqslant\varepsilon_L(d^{(i)},\ {}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}) \quad (53)$$

ALG 4 : BFGS法

[0] (i)~(iv) ALG 1과 同一

(v) $\overline{A}^{(0)}=I$

[1] 式(50)~(52)로부터 $d^{(i)}$ 계산

[2] 移動거리 β를 결정하고 式(49)와 (30)을 이용하여 ${}^{t+\Delta t}u^{(i)}$ 계산

[3] 不均衡力 ${}^{t+\Delta t}P^{(i)}$ 계산

[4] (i) 狀態數 C_i 계산(式(44)에서 ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ $\Delta U^{(i)}=\beta\,{}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}$임을 利用할 것)

(ii) 式(47)에서 $\overline{A}^{(i)}$ 계산(C_i가 許容限度보다 크면 $\overline{A}^{(i)}=\overline{A}^{(i-1)}$로 둠)

[5] ALG 1과 同一

3.3.3 組合 알고리즘

非線型 有限要素方程式의 解法알고리즘의 선택은 다양한 측면에서 검토되어야 한다. 每反復回마다의 計算量의 측면에서는 修正 NR法이나 加速修正 NR法이 有利하지만 이들의 收斂特性이 NR法이나 BFGS法에 비해 劣等하므로, 문제의 性格(非線型性의 根源 및 程度, 문제의 크기, 解의 精度 等)을 고려한 解法의 선택이 필요하다.

大部分의 非線型 有限要素解析에서 먼저 BFGS法을 시도하는 것이 바람직하다. 그 이유는 每反復回의 計算量이 過度하지 않고 理論上 超一次的 收斂率이 보장되기 때문이다[22,23]. 解析過程에서 發散 또는 數値的 不安定의 징조가 보이면 解法을 NR法 또는 (加速)修正 NR法으로 代置하여야 한다. 따라서 各 解法의 長點을 최대한 활용할 수 있는 解法의 概念的 組合알고리즘 模型을 考案·提示할 수 있다.

ALG 5 : 組合解法

[0] (i)~(v) ALG 4와 同一

(vi) MS=4

[1] 變位增分 $\Delta U^{(i)}$ 및 總變位 ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$ 계산

이 때 MS=1이면 NR法 이용

MS=2이면 修正 NR法 이용

MS=3이면 加速修正 NR法 이용

MS=4이면 BFGS法 이용

[2] ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$에 대응하는 不均衡力 ${}^{t+\Delta t}P^{(i)}$ 계산

[3] 式(32)~(34) 및 (44)로부터 收斂基準値 $\varepsilon_D^{(i)}$, $\varepsilon_F^{(i)}$, $\varepsilon_E^{(i)}$ 및 狀態數 C_i를 계산

[4] 收斂基準式(32)~(34)가 모두 만족되면 다음 荷重段階($t=t+\Delta t$) 解析을 위하여 [0]으로 돌아감

[5] $\varepsilon_F^{(i)}\geqslant 1$ 또는 $\varepsilon_E^{(i)}\geqslant 1$이면 發散可能性이 있으므로 MS=1로 놓고 [8]로 건너뜀

[6] $C_i\geqslant 10^6\sim 10^8$이면 數値的 不安定의 可能性이 있으므로 MS=2 또는 MS=3으로 놓고 [8]로 건너뜀

[7] MS=4

[8] 現荷重段階의 다음 反復($i=i+1$)을 위해 [1]로 돌아감

3.3.4 數値例-트러스의 幾何學的 非線型 解析

提示된 組合알고리즘의 有用性 및 效率性을 검토하기 위하여 간단한 트러스의 幾何學的 非線型 解析을 수행하였다.

트러스의 諸元 및 유한요소모델은 그림 1과 같다. 解析을 위한 非線型 變位-變形率 關係式은,

$$\epsilon_x=\partial u/\partial x+0.5(\partial v/\partial x)^2 \quad (54)$$

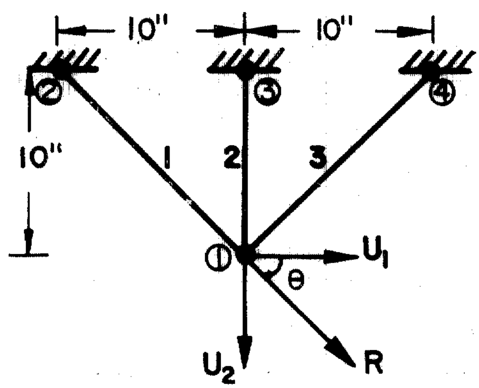

그림 1. 例題 트러스

따라서 各 部材의 變形率을 節點 1의 變位 U_1과 U_2를 이용하여 표현하면,

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_1&=(U_1+U_2)/\sqrt{2}L_1\\&\quad+0.5[(U_1-U_2)/\sqrt{2}L_1]^2\\\epsilon_2&=U_2/L_2+0.5(U_1/L_2)^2\\\epsilon_3&=(-U_1+U_2)/\sqrt{2}L_3\\&\quad+0.5[(U_1+U_2)/\sqrt{2}L_3]^2\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

또한 構造全體의 線型 및 非線型剛度行列은,

$$K^L=\frac{E}{20\sqrt{2}}\begin{bmatrix}b_1+b_3 & b_1-b_3\\ b_1-b_2 & b_1+2\sqrt{2}b_2+b_3\end{bmatrix}\quad(56)$$

$$K^{NL}=\frac{1}{20\sqrt{2}}\begin{bmatrix}F_1+2\sqrt{2}F_2+F_3 & -F_1+F_2\\ -F_1+F_3 & F_1+F_3\end{bmatrix}\quad(57)$$

式 (55)~(57)에서 E는 彈性係數: L_i, b_i 및 F_i, $i=1, 2, 3$은 각각 部材의 길이, 斷面積 및 部材內力으로서, 材料의 線型彈性을 가정하면,

$$F_i=Eb_i\epsilon_i,\quad i=1,\ 2,\ 3\quad(58)$$

한편 그림 1의 트러스는 自由度가 2인 간단한 構造物이므로 에너지函數의 設定이 可能하고 이로부터 解析的 解를 구할 수 있다. 構造全體의 에너지函數는,

$$\pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}E\,b_i\,L_i\,\epsilon_i^2\ -\sum_{i=1}^{3}R_i\,U_i\quad(59)$$

따라서 π를 최소화하기 위한 必要條件은

$$\partial\pi/\partial U_j=0=E\sum_{i=1}^{3}b_iL_i(\partial\epsilon_i/\partial U_j)\epsilon_i-R_j\quad(60)$$

式(55)를 式(60)에 대입하고 $j=1, 2$에 대한 연립방정식을 풀면 解析的으로 U_1 및 U_2를 구할 수 있게 된다.

數值資料로서 $E=10,000$ ksi ; $b_1=0.1\ \text{in}^2$, $b_2=b_3=0.2\ \text{in}^2$; $R=400$ kips, $\theta=45°$를 使用하고 解析的 方法 및 超一次的 收斂率을 가진 ALG 1, ALG 4, ALG 5를 이용하여 얻은 結果를 表 1에 수록하였다.

表에 보인 바와 같이 ALG 1, 4, 5를 利用하여 同一한 精度의 解를 얻기 위한 反復回數는 ALG 1(NR法)보다 ALG 4(BFGS法) 및 ALG 5(組合解法)에서 감소되어 있으며, 따라서 ALG 5는 計算量이 最小化되는 알고리즘임을 보여주고 있다. 한편 ALG 4와 ALG 5의 反復回數가 같은 것은 본 例題의 경우에서 ALG 5의 단계 5 및 6에 해당되는 상태가 없었기 때문이다.

비록 數値例는 매우 작은 규모의 간단한 非線型 解析例에 불과하지만 본 연구에서 提示된 組合알고리즘의 有用性 및 効率性은 確認된 셈이다.

表 1. 解 析 結 果

成分	變 位 (in)		反 復 回 數		
	解析解	ALG 1,4,5	ALG 1	ALG 4	ALG 5
U_1	2.59478	2.41024	34	26	26
U_2	1.00778	1.26155			

4. 要約 및 結論

非線型 構造의 解析·設計 및 이의 最適化를 위해서는 非線型解析法의 철저한 이해가 필요하게 되어, 非線型 有限要素方程式의 解法을 검토하고 効率的인 組合알고리즘의 考案硏究가 수행되었다. 한편 非線型 有限要素方程式의 解法은 非線型 聯立方程式의 解法에 근거하므로, 다양한 反復解法을 遂行過程, 收斂性 및 工學的 應用측면에서 고찰하였다.

非線型 聯立方程式에서는 그 함수꼴을 미리 알고 있지만 非線型 有限要素解析에서는 未知變位 相互間의 함수형태를 미리 알 수 없으므로, 有限要素法을 이용한 非線型解析에서는 反復的인 非線型有限要素方程式의 設定이 필요하게 된다. 即, 非線型 有限要素系의 剛度行列은 荷重狀態에 따른 變位履歷의 함수이므로 剛度行列의 數値的 反復計算 및 不均衡力에 의한 平衡調整等에 必要한 計算量이 過多하게 된다. 또 每反復回마다의 計算量을 줄였다 하더라도 要求精度의 解를 얻기 위한 反復回數가 增加한다면 全體的인 解析費用의 감소는 기대하기 어렵게 된다. 따라서 現在 通用되는 非線型 有限要素方程式의 解析알고리즘(ALG 1~4)을 考察하고 이들의 長點만을 最大限 活用할 수 있는 組合알고리즘(ALG 5)을 考案하였다.

提案된 組合알고리즘에서는 全體的인 計算量을 最小化할 수 있을 뿐 아니라 解析過程에서 발생 가능한 發散 및 數値的 不安定性 等을 効率的으로 制御할 수 있게 되었다.

謝 辭

이 研究는 1985年度 韓國科學財團의 研究費 支援에 의해 수행되었으며, 이에 財團當局에 感謝드린다.

參 考 文 獻

1. Ryu, Y.S., Haririan, M., Wu, C.C. and Aroa, J.S., "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Computers and Structures*, Vol. 21, No. 1/2, 1985, pp. 245~255.
2. Ryu, Y.S., "*A Study of Nonlinear Structural and Design Sensitivity Analysis Methods*", Ph.D Thesis, The Univ. of Iowa, 1984.
3. Bathe, K.J., and Cimento, A.P., "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, 1980, pp. 59~85.
4. Bathe, K.J., and Dvorkin, E.N., "On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Computers and Structures*, Vol. 17, No. 5~6, 1983, pp. 871~879.
5. Bergan, P.G., et al., "Solution Techniques for Nonlinear Finte Element Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 1978, pp. 1677~1696.
6. Crisfield, M.A., "A Faster Modified Newton-Raphson Interation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 20, 1979, pp. 267~278.
7. Felippa, C.A., "*Procedures for Computer Analysis of Large Nonlinear Structural Systems*", Large Engineering Systems, A. Wexler, Ed., Pergamon Press, New York, N.Y., 1976, pp. 60~101.
8. Geradin, M., Idelsohn, S., and Hogge, M., "Computational Strategies for the Solution of Large Nonlinear Problems via Quasi-Newton Methods", *Computers and Structures*, Vol. 13, 1981, pp. 73~81.
9. Matthies, H., and Strang, G., "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *International for Numberical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp. 1613~1626.
10. Mondkar, D.P., and Powell, G.H., "Evaluation of Solution Schemes for Nonlinear Structures", *Computers and Structures*, Vol. 9, 1978, pp. 223~236.
11. Powell, G., and Simons, J., "Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp. 1455~1467.
12. Schmidt, W.F., "Extending the Convergence Domain of the Newton-Raphson Method in Structural Analysis", *Computers and Structures*, Vol. 9, 1978, pp. 265~272.
13. Wunderlich, W., Stein, E., and Bathe, K.J., Eds., *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag, 1981.
14. Noor, A.K., "Survey of Computer Programs for Solution of Nonlinear Structural and Solid Mechanics Problems", *Computers and Structures*, Vol. 13, 1981, pp. 425~465.
15. Rheinboldt, W.C., *Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, SIAM*, Philadelphia, Pa., 1974.
16. Ortega, J.M., and Rheinboldt, W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, N.Y., 1970.
17. Broyden, C.G., "*Quasi-Nexton, or Modification Methods*", Numerical Soultion of Systems of Nonlinear Algebraic Equations, G.D. Bryne and C.A. Hall, Edso, Academic Press, New York, N.Y., 1973.
18. Broyden, C.G., Dennis, J.E., and More, J.J., "On the Local and Superlinear Convergene of Quasi-Netwon Methods", *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, Vol. 12, 1973, pp. 223~245.
19. Dennis, J.E., and More, J.J., Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory", *SIAM Review*, Vol. 19, No. 1, 1977.
20. Dennis, J.E., and Walker, H.F., "Convergence Theorems for Least-Change Secant Update Methods", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 18, No. 6, 1981.
21. Fletchər, R., "A New Approach to Variable

Metric Algorithms", *Computer Journal,* Vol. 6, 1970, pp. 163~168.

22. Goldfarb, D., "A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means", *Mathematics of Computation,* Vol. 2,4, 1970, pp. 23~26.
23. Grandinett, L. "A Compact Updating Formula for Quasi-Newton Minimization Algorithms", *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 36, No. 4, Apr., 1982.
24. Powell, M.J.D., "*Some Properties of the Variable Metric Algorithm*", Numerical Methods for Non-linear Optimization, F.A. Lootsma, Ed., Academic Press, 1972.
25. Sachs, E., "Global Convergence of Quasi-Newton-Type Algorithms for Some Nonsmooth Optimization Problems", *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 40, No. 2, 1983, pp. 201~219.
26. Shanno, D.F., "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization", *Mathematics of Computation,* Vol. 24, 1970. pp. 647~656.
27. Ryu, Y.S., and Arora, J.S., *Methods of Nonlinear Strucural Analysis by Finite Element Techniques,* TR CAD-SS-84. 2, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The University of Iowa, 1984.
28. Ryu, Y.S. and Arora, J.S., "Review of Nonlinear FE Methods with Substructures", *J. of EM, ASCE,* Vol. 111, No. 11, pp. 1361~1379, 1985.
29. Bathe, K.J., *Finite Element Preccduress in Engineering Analysis* Prentice-Hall Engelwood Cliffs, N.J., 1982.
30. Dvornik, J., "Generalization of the CG Method Applied to Linear and Nonlinear Problems", *Computers and Structures,* Vol. 10, 1979, pp. 217~223.

(接受 : 1986. 3. 19)