

非正規分布工程에서 特殊管理圖의 適用研究 A Study on the Special Purpose Control Chart for Non-normal Distribution

辛 容 伯*
黃 義 徹**

ABSTRACT

Whereas in non-symmetrical distribution manufacturing process they are not plotted relatively on the central line but plotted on the skew of right-hand side or left-hand side.

That is to say, for the purpose of producing either upper-specification-oriented items or lower-specification-oriented items, and when we carry out tighter control so as to have them pass only its specifications, the distribution shape naturally has a non-normal distribution.

In these cases, we could use either compressed control limits or variable transformed logarithm control charts. If the above mentioned methods were not available, we should use special purpose control chart-Mode control chart or Gram-Charlier control chart.

These are proper methods for manufacturing process control which uses control chart method. In spite of these methods, domestic manufacturing and mining companies are utterly ignorant about these methods. That invites practical problems in their companies.

To enhance this improvements, I proved the property of practical applications of control chart method by comparing and analyzing the case studies of practical application of special purpose control chart method, and also by introducing the application methods.

1. 序 論

非對稱分布工程狀態에서는 平均值와 範圍의 傳統的管理圖上에서도 다음과 같은 特異성을 發見할 수 있다.

① 左尖性인 分布에서는 平均值에 대한 管理

下限(LCL)은 負가 되고 平均值分布의 非對稱程度는 $\bar{x} - 3\sigma_x < 0$ 의 크기이다.

② 非對稱分布데이터중 \bar{x} 는 典型的인 中心의 傾向성을 測定한 것은 아니며 平均值의 2/3 程度가 中心線(CL) 下限 또는 上限 한쪽에 치우

* 亞洲大學校 工大 産業工學科 教授
** 漢陽大學校 工大 産業工學科 教授

치는 傾向이 많다.

③ 몇개의 點들은 平均值와 範圍의 兩管理圖의 管理上限(UCL) 또는 管理下限(LCL)을 벗어 나고 있다.

④ 以上の 原因은 規格上限(S_U) 또는 規格下限(S_L)만 指定된 製品生産의 製造工程에 많이 나타나며

⑤ 製造工程이 安定되지 않을수록 非正規分布 狀態를 이룬다.

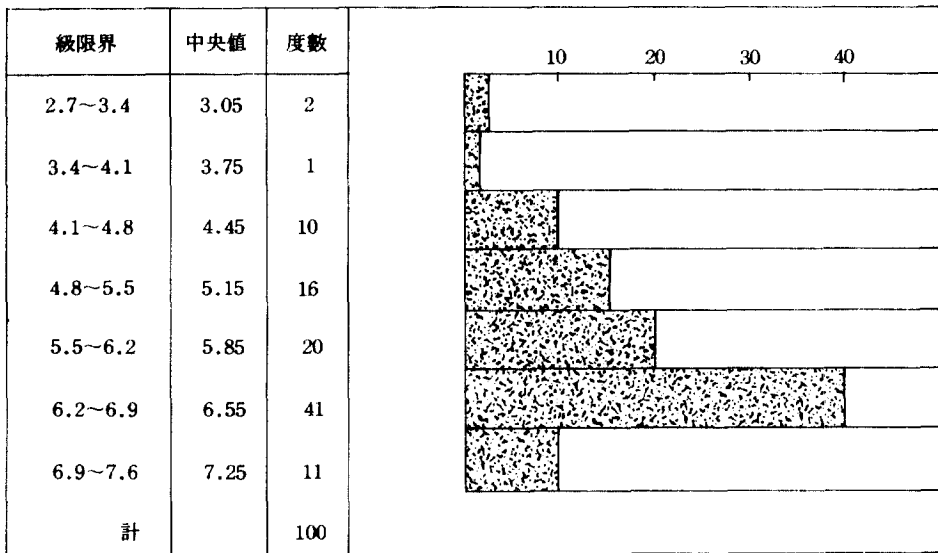
⑥ 製造工程中 特殊分野에 대한 重點的인 管理 및 檢査를 엄격하게 할 경우에 많이 나타난다.

以上の 特殊性이 標準型管理圖($\bar{x}-R, x, \bar{x}-R$ 등)와 다른點이며 이로 인하여 標準型管理圖 適用이 맹목적으로 되어버리며 또한 「管理圖解析 (보는) 方法」의 原則에 어긋나게 되어 適正한 조처를 할 수 없게 된다. 이러한 경우를 위하여 本 論文에서는 非對稱分布確率을 利用한 特殊管理圖의 適用으로 올바른 管理圖法 適用效果를 도모하고 또한 그 理論的 適用方法을 提示하는데 그 目的을 두었다.

2. 非對稱分布狀態의 $\bar{x}-R$ 管理圖

非對稱分布狀態에서 더욱 重要한 事項은 母集團이 상당히 非對稱的으로 되었다면 平均值의 分布도 마찬가지로 歪曲되어 있기 때문이다. 여기서 實際 M-C工場 발효工程에서 샘플링하여 測定한 농축부로스(CB)중 조단백질(GA)%를 調査한 結果가 <Table 1>의 Data Sheet와 같다.

Table 1의 데이터群에 대한 分布狀態를 Histogram으로 表示하면 Fig 1과 같이 左尖性을 나타내고 解析用管理圖로 $\bar{x}-R$ 管理圖를 그려보면 規格에 適合하였으나 管理圖만으로 製造工程을 管理한다면 Fig 2와 같이 管理限界를 벗어난 點들이 많고, 標準型管理圖를 보는 原則으로 分析檢討하면 大波中 小波를 이루고 波形이 均一하지 못하여 安定狀態(Controlled State)로 해석할 수 없는 判斷이 쉽게 내려질 것이다. 그러므로 管理用 管理圖를 위한 管理限界로 利用하기에는 不適合함을 알 수 있겠다.



자료근거: Table 1에 의한 것임

Fig 1. GA-Histogram

Table 1 $\bar{x}-R$ 관리도 Data Sheet

제품명칭	CB(농축부로스)	제조명령번호		기간	× × ×
품질특성	GA(조단백질)	공장	M-C 공장		× ○ ○
측정단위	%	기준일산고		기계번호	
규격최대		시료	크기	4	작업원
한계최소	3.0		간격	24	검사원
규격번호		측정기번호		성명인	

일시	시료군의 번호	측정치					계 Σx	평균치 \bar{x}	범위 R	적요
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
	1	6.3	6.1	5.5	5.4	23.3	5.8	0.9		
	2	4.4	6.3	4.8	6.3	21.8	5.5	1.9		
	3	6.8	6.5	7.0	5.3	25.6	6.4	1.7		
	4	5.0	5.3	4.9	6.8	22.0	5.5	1.9		
	5	6.3	6.7	6.9	6.5	26.4	6.6	0.6		
	6	6.7	6.7	6.8	6.5	26.7	6.7	0.3		
	7	6.4	6.3	6.0	5.7	24.4	6.1	0.7		
	8	5.8	6.0	7.0	6.5	25.3	6.3	1.2		
	9	6.6	6.4	6.8	6.5	26.3	6.6	0.4		
	10	4.5	6.2	5.8	5.6	22.1	5.5	1.7		
	11	5.2	6.2	5.8	5.6	22.8	5.7	1.1		
	12	5.2	6.3	5.4	5.3	22.2	5.6	1.0		
	13	5.7	5.9	4.5	5.8	21.9	5.5	1.4		
	14	6.2	6.0	7.2	5.5	24.9	5.5	2.2		
	15	6.6	4.5	6.4	4.4	21.9	6.2	1.7		
	16	4.4	4.7	7.0	6.4	22.5	5.6	2.6		
	17	6.9	5.4	7.3	7.3	26.9	6.7	1.9		
	18	6.0	6.8	5.0	6.3	24.1	6.0	1.8		
	19	6.5	6.9	7.3	6.5	27.2	6.8	0.8		
	20	6.7	6.7	6.4	6.4	26.2	6.6	0.3		
	21	6.3	6.0	6.6	6.3	25.2	6.3	0.6		
	22	7.0	7.0	6.5	7.3	27.8	7.0	0.8		
	23	6.4	6.6	6.2	5.4	24.5	6.2	1.2		
	24	7.0	6.7	6.2	6.3	26.2	6.6	0.8		
	25	5.7	5.8	5.3	6.0	22.8	5.7	0.7		
\bar{x} 관리도		R 관리도					계	153.0	30.2	
LCL = $\bar{x} - A_2 \bar{R} = 5.24$		UCL = $D_4 \bar{R} = 2.76$					$\bar{\bar{x}} = 6.12$		$\bar{R} = 1.21$	
UCL = $\bar{x} + A_2 \bar{R} = 7.00$		LCL = $D_3 \bar{R} = -$					$\frac{n}{4}$	$\frac{A_1}{0.73}$	$\frac{D_1}{2.28}$	$\frac{D_2}{-}$
							5	0.58	2.11	-

記事 : 계산수치는 소수점 3 자리에서 반올림한 것임.

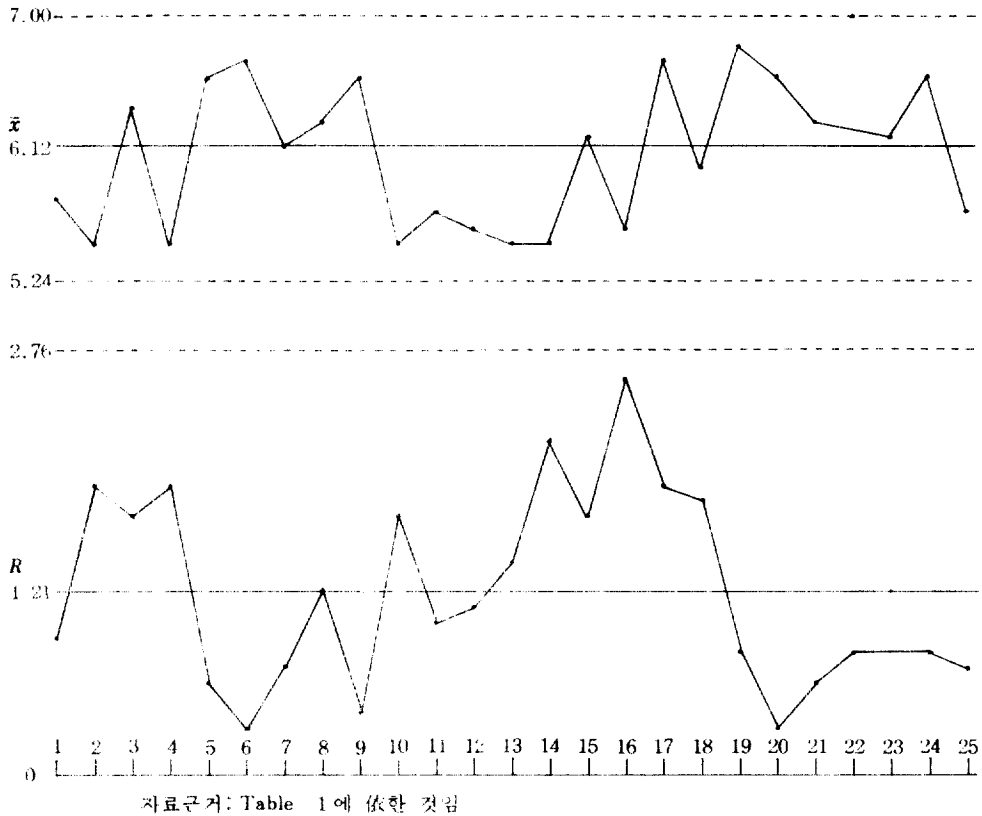


Fig 2. \bar{x} -R 管理圖(標準型管理圖)

3. 最頻數(Mode) 管理圖를 利用한 分散方法

非對稱的인 管理限界를 얻는 간단한 方法은 非對稱的인 分布가 正規分布에서 왼쪽으로 기울었든지 아니면 바른쪽으로 치우쳤을때 또는 이들 分布가 最頻數(또는 平均值)는 같으나 標準偏差가 달라지는 任意의 結果에 대한 條件위에서 考慮되어야 한다.

이 過程에서 2個의 標準偏差를 計算하면 그 한가지가 最頻數와 크기가 같거나 또는 더 큰 試料群에 대한 것이며, 다른 한가지는 最頻數와 같거나 적을때의 두 경우이다.

이를 數式¹⁾으로 表示하면

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_1^{n_j} (x - \text{Mode})^2}{n_j - \frac{1}{2}}} \dots\dots\dots (1)$$

여기서 n_j 는 記錄된 觀察個數를 上記와 같은 條件으로 半으로 나눈 觀察個數의 1/2이다.

이러한 경우의 管理限界는 다음 公式²⁾으로 表示된다.

$$\left. \begin{aligned} \text{UCL} &= \text{Mode} + A \cdot S_2 \\ \text{CL} &= A \\ \text{LCL} &= \text{Mode} - A \cdot S_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

여기서

A : 算術平均

S_2 및 S_1 : S_j 에 대한 두개의 값

이 方法은 標準偏差나 範圍에 대한 管理圖로 나눌 수 없는 경우에 平均值를 管理하는데 有效

註1)2) D.J. cowden (1957), Statistical Methods in Quality Control, prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. p. 319.

한 特殊管理圖이다. 여기서 最頻數의 計算公式³⁾은 K. Pearson에 의하여 非對稱分布일 경우에는

$$\left. \begin{aligned} Ma - Mo &= 3(Ma - Me) \\ Me - Mo &= 2(Ma - Me) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

로 表示된다.

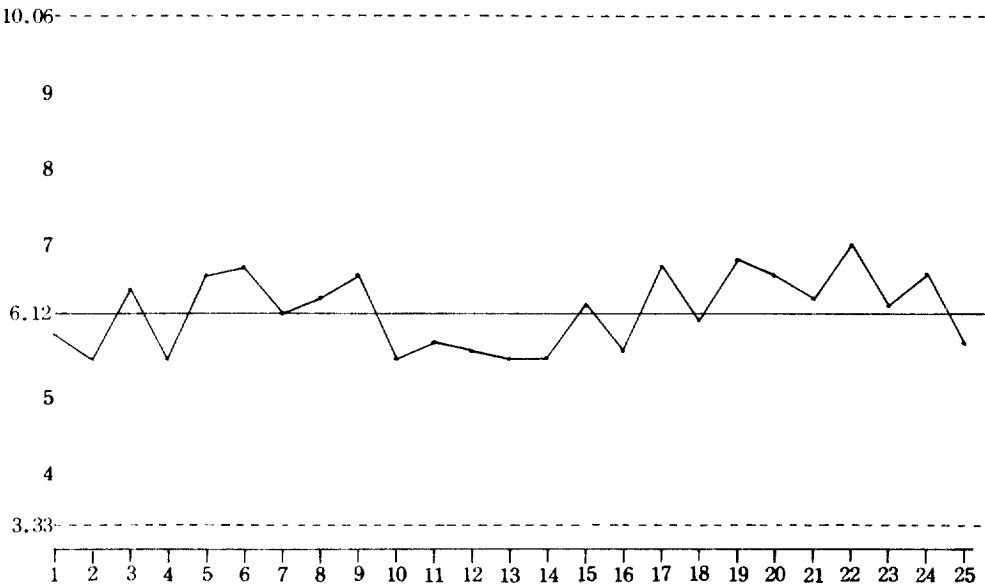
(3)式은 經驗的 事實에 의해서 確立된 式이다. (Table 1)의 데이터를 (2)(3)式에 의거하여 管理限界를 計算하면

$$\begin{aligned} M_o &= 7.00 & S_2 &= 0.5 \\ A &= 6.12 & S_1 &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UCL &= 7.00 + (6.12)(0.5) = 10.06 \\ CL &= 6.12 \\ LCL &= 7.00 - (6.12)(0.6) = 3.96 \end{aligned}$$

上記 結果에 대한 最頻數를 利用한 特殊管理圖는 Fig 3과 같다.

이는 管理限界의 幅이 標準型管理圖(Fig 1)보다 넓고, 中心線은 약간 낮은(여기선 0.12 정도) 위치에 존재한다. 이는 規格下限值만 規定된 右尖性的 경우에 點의 分布狀態는 中心線을 中心으로 均等하게 分散되어 있으므로 管理用 管理圖로 使用 可能함을 알 수 있다.



자료근거: Table. 1의 자료와 管理限界는 公式(2)를 利用한 것임.

Fig 3. 最頻數를 利用한 特殊管理圖

4. 試料平均의 歪曲도와 尖度の 統計的 推定

어떤 平均值分布의 非對稱度를 一義적으로 表現하려 할 때 이는 傳統的인 두가지 方法이 있다.

즉 「Pearson의 方法」과 「Bowley의 方法」이 있는데 Pearson은 「어떠한 分布가 非對稱分布

인가를 결정함에 있어 算術平均值, 中位數 그리고 最頻數가 일치되는가 그렇지 않으면 일치되지 않는가에 의한다」⁴⁾ 라고 정의하였다.

따라서 非對稱도가 크면 클수록 算術平均值와 最頻數와의 거리가 分布上에 있어서 멀리 떨어지게 될 것이라는 分명한 事實에 의하여 Pearson은 非對稱度를 規定하였다.

註 3) 尹起重(1966) 統計學, 法文社, P.61~62.

註 4) 尹起重(1966) 統計學, 法文社, P.68~71.

非對稱度 즉 歪曲度を 公式로 表現하면 「Pearson의 方法」에서

$$S_k = \frac{Ma - Mo}{\sigma} = \frac{(Ma - Me)}{\sigma} \dots\dots\dots (4)$$

여기서

- S_k : 歪曲度(非對稱度)
- Ma : 算術平均値
- Mo : 最頻數
- Me : 中位數
- σ : 標準偏差

위와같은 式(4)에서 얻은 係數 즉 歪曲도가 (-3)과 (+3)의 範圍內에 있게되며 係數가 0.25일때는 歪曲도가 微微하다고 할 수 있고 0.25에서 0.50範圍에 있으면 완만하다고 하고 또 0.50以上일 경우에는 심하다 할 수 있다.

그리고 「Bowley의 方法」으로는 歪曲度を 測定함에 있어서 中位數와 第三의 四分位點(Q_3) 또는 첫 四分位點(Q_1)과의 거리변동에 의하여 測定된다.

즉 歪曲度を S로 表示하면

$$S = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \dots\dots\dots (5)$$

여기서 $q_1 = [中位數 - 第一四分點(Q_1)]$

$q_2 = [第三分位點(Q_3) - 中位數]$

위 式에서 $q_1 = q_2$ 인 즉 S가 Zero(0)이면 그 分布는 對稱이고 또 $q_1 < q_2$ 이면 S는 正, $q_1 > q_2$ 일때는 S가 負의 값으로 나타난다.

이러한 경우에는 正이건 負이건간에 그 分布는 非對稱임을 뜻한다. 그리고 非對稱인 歪曲度は 반듯이 ± 1 의 範圍에 있게 되고 경험상으로 S가 ± 0.1 일 경우에는 완만한 歪曲度(Moderate degree of Skewness)라고 하겠고 또 ± 0.3 일 경우에도 상당한 歪曲度(Considerable degree of Skewness)라고 하였다.

尖度(Kurtosis)는 어떤 分布의 尖性的 程度를 나타내는 것으로서 歪曲도와 尖度の 算出方法은 여러가지가 있으나 本 論文에서는 特殊管理 尖度用을 위하여 다음과 같은 方法⁵⁾으로 推定

한다.

(1) 한개의 試料나 이들 값 g_1 과 g_2 에 대한 N개를 包含하는 것으로부터 r_1 과 r_2 를 推算하면 $\hat{r}_1(\bar{x}) = g_1 / \sqrt{n}$ 과 $\hat{r}_2(\bar{x}) = g_2 / n$ 로 計算한다.

(2) \hat{r}_1 와 \hat{r}_2 의 推算으로부터 n개의 個別的 試料K에 包含되는 歪曲도와 尖度로부터 r_1 과 r_2 를 推算하면 $\hat{r}_1(\bar{x}) = \hat{r}_1 / \sqrt{n}$ 와 $\hat{r}_2(\bar{x}) = r_2 / n$ 로 計算된다.

(3) 試料平均으로부터 直接 $g_1(\bar{x})$ 와 $g_2(\bar{x})$ 를 計算한다.

以上에서 製造工程의 變化의 結果를 어떤 歪曲도와 尖度の $r_1(\bar{x})$ 와 $r_2(\bar{x})$ 를 推定하는 것을 省略하기 위해서는 個別的 分布內의 變數型態의 推算方法과 歪曲도와 尖度の 統計量을 變數 變換하여 간편하게 計算할 수 있다. 비록 이들 計算이 쉽게 測定되었다고 할지라도 잘 알려지지 않은 非正規分布나 즉각적으로 나타나야 하는 管理圖의 分布들이 管理圖上에서는 잘 나타나지 않는다.

5. 理論的 分布에 근거한 平均値에 대한 非對稱管理限界의 Gram-Charlier 管理圖

Table 1의 데이터에 의거한 試料內의 變數변화로부터 얻어진 變數의 推定으로서 Gram-Charlier 管理圖의 管理限界線의 計算⁶⁾은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 6.12 & \hat{\sigma}_x &= 0.31 \\ r_1(\bar{x}) &= 0.317 & \hat{\sigma}_3(\bar{x}) &= 0.317 \\ r_2(\bar{x}) &= 0.216 & a_4(\bar{x}) &= 3.216 \end{aligned}$$

(단 $r_1 = a_3$, $r_2 = a_4 - 3$)

이 과정은 各 試料內의 原因에 대한 일정한 体系의 假定에 근거한다.

그러나 그 原因의 体系는 工程水準의 경향은 별로 없으나 試料에서부터 試料까지의 變化에 影響이 크다.

여기서 Gram-Charlier 確率를 使用한 管理圖의 管理限界는 「선정된 확률치에서 Gram-Charlier 곡선의 Z 값」⁷⁾에서 나타난 r_1 r_2 의 값이

註 5) D.J. Cowden (1957) Statistical Methods in Quality Control, prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. p. 319-320.

註 6) D.J. Cowden (1957) Statistical Methods in Quality Control, p. 63-64, Fisher's Statistics

註 7) D.J. Cowden (1957), Statistical Methods in Quality Control, p. 700, Appendix 24:1

0인 다른 값에 따라 Gram-Charlier 分布의 선정된 확률치 Z의 값은 τ_1 이 지정된 값에 따라 (註7)의 表를 이용하여 求할 수 있으며 이 結果에 따라 관리도의 관리한계는 다음 公式⁸⁾으로 表示된다.

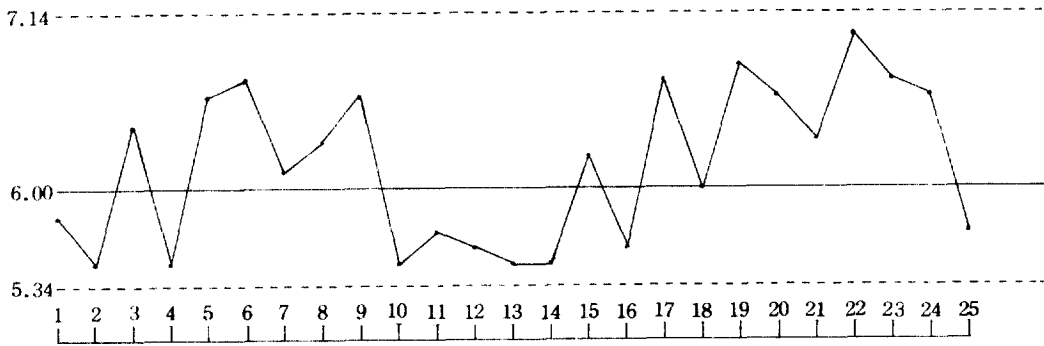
$$\left. \begin{aligned} UCL &= \bar{\bar{x}} + Z_{0.00135} \hat{\sigma}_{\bar{x}} \\ CL &= \bar{\bar{x}} + Z_{0.5} \hat{\sigma}_{\bar{x}} \\ LCL &= \bar{\bar{x}} - Z_{0.00135} \hat{\sigma}_{\bar{x}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

만약 歪曲度가 꼭 같은 尖度에서의 調整은 Trial and Error 方法으로 求하여야 한다.

Table 1을 利用한 結果로서 관리한계를 계산하고 Gram-Charlier 管理圖를 그리면 Fig 4와 같다.

여기서 管理限界는

$$\begin{aligned} UCL &= 6.12 + (3.30)(0.31) = 7.14 \\ CL &= 6.12 + (-0.05)(0.31) = 6.00 \\ LCL &= 6.12 - (2.53)(0.31) = 5.34 \end{aligned}$$



자료근거 : Table 1. 註 5) 7) 參照 및 管理限界(線)計算公式(6) 利用

Fig 4. Gram-Charlier 管理圖

Fig 4의 관리도를 분석하여 보면 管理限界로 벗어나는 點들이 없으며, 中心線을 境界로 上·下로 點들이 골고루 散在하여 있으며, 또 그 全部가 規格值以上の GA%이고, 관리도 상에서도 별다른 이상이 없는 安定工程으로 해석 된다.

이 Gram-Charlier 管理圖 적용의 效果는 試料群內的 표준편차가 크면 많은 點들이 正規分布에 근사한 분포상태를 갖음이 많으므로, 관리한계선의 결정이 分布狀態에 따라 어느 정도 調整이 可能하다.

3. 結 論

標準的인 計量值의 管理圖인 $\bar{x}-R$, \bar{x} , $\bar{x}-R$ 管理圖等에서는 分布狀態가 正規分布이거나, 연속무한집단으로 正規分布에 가까운 데

이터가 취해질때 品質 및 製造工程管理를 위한 標準的인 管理圖이다.

그러나, 規格上限(S_u)이나 規格下限(S_l) 하나만 주어진 製品의 品質分布가 非對稱分布를 이루면서 그 分布의 型態가 右尖性 및 左尖性을 이루고 있는 非正規分布工程에서 管理圖法 適用은 正規分布가 되도록 變數變換을 하지 않는다면, 그 散布를 均等히 할 수 있는 確率的 근거를 가진 Mode 및 Gram-Charlier 管理圖等의 特殊管理圖로 管理限界 및 分布狀態를 分散해 주지 않으면 管理圖解析(보는)法에 모순되는 바 本論에서 論證한것 처럼 非正規分布工程中 左·右尖性的 양 경우에 Mode 管理圖가 有效하며 右尖性的 경우에는 Gram-Charlier 管理圖가 效果의임을 보여주고 있다.

註 8) D.J. Cowden (1957) Statistical Methods in Quality Control, p. 322-323.

參 考 文 獻

1. D.J. *Cowden* (1957), *Statistical Methods in Quality Control*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., p. 63-64, p. 319-323, p. 700.
2. A.J. *Duncan* (1974), *Quality Control and Industrial Statistics* 4Ed., Richard D. IRWIN, Inc. Illinois, p. 375-393, p. 431-463.
3. R.A. *Fisher* (1967), *Statistical Methods for Research Workers*, 13Ed., Edinburgh: Oliver and Boyd
4. E.L. *Grant* (1972), *Statistical Quality Control* 4Ed., McGraw-Hill, N.Y., p. 37-76.
5. J.M. *Juran* (1974), *Quality Control Handbook*, 3Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, p. 22.1-22.35
6. 日本規格協會(1966), 品質管理便覽, P.154 ~ 170.
7. 金成寅(1985), 관리도, 博英社, P.46~63.
8. 金永輝(1975), 工業統計學, 東洋社, P.175~183.
9. 今泉益正著·辛容伯譯(1976), 管理圖의 作成法, 서울産業圖書出版公社, P.101~144.
10. 辛容伯·黃義徹(1985), 中小企業을 위한 効果的인 TQC適用方案에 관한 研究, 中小企業研究 第11輯, 韓國中小企業學會 P.145~151
11. 尹起重(1965), 統計學, 法文社, P.61~62. P.68~71.
12. 黃義徹(1980), 最新品質管理, 博英社, P.315~336. P.351~375.