

非對稱와이블分布工程에서 메디안特殊管理圖의 設計

Design of Median Control Chart for Unsymmetrical Weibull Distribution

辛 容 伯*
黃 義 徹**

ABSTRACT

This thesis is concerned with the design of control chart based on the sample median which is easy to use in practical situations and to analyze the properties for non-normally distributed Weibull process.

In this cases are use to the quality characteristics of the process are not normally distributed but skewed due to the intermittennd production, small lot size and sample size is small one $n=3$ or $n=5$, etc.

And when it relates unsymmetrically distributed process, model designed median control chart is more effective than Shewhart \bar{x} -chart which assumed on normal distribution, when we exactly should be known Weibull distribution or estimated.

The median control chart in this thesis is more robustness compared with other conventionally developed control chart.

1. 序 論

1-1 研究의 目的

일반적으로 計量值管理圖라고 하면 Shewhart의 3σ 원칙에 입각한 $\bar{X}-R$, \bar{X} , $\bar{X}-R$ 등의 傳統의 管理圖를 말하는 바, 이들은 모두 製品이 연속적으로 生産되는 製造工程이거나 또는 로트의 크기가 큰 工程에서 그 品質特性值의 分布가 正規分布이거나 그의 類似한 分布를 따른다고 간

주될 때 使用되는 工程管理用 SQC의 代表的技法이다. 위와 같은 管理圖를 適用하기 위해서는 먼저 대상제품의 正規性を 입증할 수 있어야만 소기의 目的을 달성할 수 있게 된다. 그러나 제품의 특성치가 非正規性を 나타내고 있는 경우에는 위의 관리도들은 몇가지 문제점을 보이게 된다. 먼저 비정규분포 제품을 전통적인 Shewhart 관리도로서 관리하게 되면 실제로는 工程에 異常이 없다하더라도 관리도상에는 管理限界

* 亞州大學校 産業工學科

** 漢陽大學校 産業工學科

밖으로 打點되어 異常要因이 發生한것 처럼 誤報(false alarm)를 주는 경우가 많이 생긴다. 이는 특히 國內의 많은 製造工場에서 管理圖技法의 效果를 감소시키는 결과를 초래하고 있다. 이는 非正規分布의 경우 정규분포보다는 分布의 후미 확률이 대부분 크게되기 때문이다. 둘째로 전통적인 관리도중 특히 많이 사용되고 있는 \bar{x} 관리도 등을 非對稱 正規分布에 적용하면 標本들이 中心線상한 또는 하한에 치우쳐서 打點되는 경향이 많다. 이는 비정규분포 특히 비대칭 분포에서는 표본평균 \bar{x} 가 중심의 경향을 나타내는 가장 좋은 統計量이라고는 볼 수 없기 때문에 發生된다고 판단된다.

이와같은 問題點들을 해결하기 위하여 對數管理圖, 最頻數管理圖, Gram-Charlier 管理圖, Pearson管理圖 등 여러 非正規分布用 管理圖들이 開發되었다. 그러나 대수 관리도는 품질특성치를 對數變換하였을 때 정규성을 가져야 하므로 그 적용범위가 한정되어 있고, 모든 품질 특성치를 대수변환 하여야 하는 번거로움이 있다. 최빈수 관리도는 비정규분포에서는 2개의 標準偏差를 계산해야 하고 또 최빈수를 계산하는 과정이 복잡하여 번거로우며, 관리한계의 폭이 넓어 관리도 분석상 민감도가 떨어지는 短點이 있다.

Gram-Charlier管理圖나 Pearson 管理圖 등은 理論的으로는 큰 意味가 있으나 分布自體의 여러 數學的 性質이 理論的이기 때문에 그 適用 및 實用化가 매우 복잡하다는 短點을 지니고 있다.

本 研究에서는 이러한 點에 着眼하여 와이블 分布 등 비정규분포 특성을 갖는 製造工程을 효과적으로 管理할 수 있는 特殊관리도의 模型을 개발하고자 한다.

1-2 研究의 方法

품질특성치의 順序統計量¹⁾에 의거한 관리도를 作成하여 분포에 무관한 적응성(Robustness)이 있는 관리도법을 개발하기 위한 目的下에 그 특수 관리도는 그 적용대상이 주로 生産現場 製

造工程 중심이므로 使用이 간편하고 計算過程도 간단해야 한다. 본 研究에서는 와이블 分布下에 순서통계량 중에서 中心性向을 잘 나타내고 사용하기 가장 간편한 標本中位數에 기초한 確率限界法을 利用하여 메디안 특수관리도를 模型開發하여 비정규분포 공정을 효과적으로 관리할 수 있는 메디안特殊管理圖의 模型을 設計하고자 한다.

2. 非對稱와이블分布工程에서 메디안 特殊管理圖의 模型設計와 適用

2-1 메디안 特殊管理圖의 一般的 考察

記述的 測定値는 中心의 性向을 나타내는 것 과 分散的 性向을 나타내는 測定値가 있는 바, 이 중 中心의 性向을 나타내는 記述的 測定値는 算術平均, 中位數, 最頻數 등이 있다. 이들은 모두 中心의 性向의 代表値이기도 하나 標本의 크기가 작을 때에는 最頻數는 使用하기 힘들다. 다음은 Yule이 제안한 代表値選擇基準이다.

- (1) 定義가 명료하여 計算者의 推定과 判斷을 必要로 하지 않을 것
- (2) 變量 全部 즉 數列의 全 項目의 數値에 의하여 計算될 것
- (3) 性質이 簡單明瞭하고 理解하기 쉬운 것
- (4) 計算하기 쉬운 것
- (5) 標本에 依한 計算結果의 變化即 標本誤差가 적은 것
- (6) 代數的 取扱이 容易할 것

以上에서 든 Yule의 標準에 비추어 一般的으로 考察하면 (1)~(3)의 條件에서는 計算的 平均이 優秀하며, (4)~(5)의 條件에 있어서는 算術平均과 中位數가 優越하다.

그러나 本論에서는 非對稱分布工程에서 計量値의 管理圖適用上 代表値 選擇은 \bar{X} 보다 \bar{X} 가 使用의 容易性和 또한 母集團(工程)의 性質을 규명하기 쉽고, 確率論的으로도 中位數(\bar{X})가 優越하다는 것이 컴퓨터 시뮬레이션(Simulation)으로 立證이 된다.

2-2 메디안特殊管理圖의 模型設計

註 1) Kendall, D. G. & Stuart, A. The advanced theory of statistics, Vol. II 1969. pp465~471.

本節에서는 이중 非正規分布에 適合하다고 판단되는 標本의 中位數를 基礎로한 梅迪安特殊管理圖를 設計하고자 한다. 먼저 어떤 母集團 즉 製品 로트에서 뽑은 n 개의 製品의 品質特性值를 각각 X_1, \dots, X_n 이라 하고, 이들로 부터 求해진 順序統計量을 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 이라 表示하자. (但, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$) 本 研究에서는 理論展開의 便宜上 標本의 크기 n 이 홀수인 경우만 고려하기로 한다. 즉 $n=2k+1$ 이라고 하자. 단, k 는 양의 정수이다.

이 경우 標本의 中位數(sample median)는 $k+1$ 번째 順序統計量인 $X_{(k+1)}$ 이 됨은 自明하다. 따라서 梅迪安特殊管理圖의 設計는 順序統計量 $X_{(k+1)}$ 의 特性에 따라 左右된다.

$F(x)$ 를 어떤 製品 品質特性值의 累積分布函數(c.d.f) $f(x)$ 를 確率密度函數(p.d.f)라고 하자. 이 경우 $X_{(k+1)}$ 의 累積分布 函數는

$$\begin{aligned}
 P\{X_{(k+1)} \leq x\} &= \sum_{i=k+1}^n P\{i\text{개의 } X \leq x, n-i\text{개의 } X > x\} \\
 &= \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i} \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

이 되며, 따라서 確率密度函數는

$$\begin{aligned}
 f_{X_{(k+1)}}(x) &= \frac{(2k+1)!}{k! k!} (F(x))^k (1-F(x))^k f(x) \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

가 됨을 알 수 있다. 따라서 標本中位數 $X_{(k+1)}$ 의 性質은 (1)과 (2)로부터 쉽게 규명할 수 있다.

本 研究에서는 이 標本中位數를 利用하여 다음과 같이 管理圖를 設計하고자 한다. 標本中位數는 中心的 性向을 推定하는 統計量의 일종이므로 製造工程이 安定狀態에서 不安定狀態로 된 경우에는 標本中位數는 갑자기 큰 값을 갖거나 또는 작은 값을 갖게 된다. 따라서 이와같은 現像이 發生되면 管理圖上에서 재빨리 檢出되어야 하므로, 管理圖에는 管理上限(UCL)과 管理下限(LCL)이 주어지거나 또는 한쪽 規格(S_L 또는 S_U)만 指定된 경우에는 이들 중 하나의 管理限界가 주어져야 되며, 梅迪安特殊 管理圖의

設計는 결국 이 管理限界(線)들과 中心線의 값을 어떻게 決定하느냐에 달려있다.

本 研究에서는 管理限界 UCL과 LCL들은 兩側規格值($S_L - S_U$)가 指定된 경우에는

$$\begin{aligned}
 P(X_{(k+1)} \geq UCL) + P(X_{(k+1)} \leq LCL) &= 0.0027 \\
 \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

이 되도록 設計하였는데 여기서 0.0027은 傳統的인 \bar{X} -管理圖가 正規分布인 경우 3σ 밖으로 나갈 確率값이다. 그러나 非正規分布들은 一般的으로 非對稱分布들 이므로 (3)式을 만족하는 UCL과 LCL 값을 찾기는 매우 어려우므로 等側檢推定에서 흔히 適用되는 方法으로

$$P(X_{(k+1)} \geq UCL) = P(X_{(k+1)} \leq LCL) = 0.00135$$

가 되도록 UCL과 LCL을 決定하였다.

따라서 (1)式으로 부터 UCL과 LCL은

$$\begin{aligned}
 P(X_{(k+1)} \geq UCL) &= 1 - P(X_{(k+1)} \leq UCL) \\
 &= 1 - \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (F(UCL))^i (1-F(UCL))^{n-i} \\
 &= 0.00135 \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X_{(k+1)} \leq LCL) &= \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} (F(LCL))^i (1-F(LCL))^{n-i} \\
 &= 0.00135 \dots\dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

가 된다. 式 (4)와 (5)를 만족하는 UCL과 LCL의 값은 二分法(Bisection method)와 같은 간단한 수치해석적인 方法으로 쉽게 求할 수 있다.

또 管理圖의 中心線은 標本中位數로 이는 母中位數의 좋은 推定值이므로 本 研究에서도 母中位數를 中心線으로 하였다.

品質特性值의 下限이나 上限이 하나만 주어졌을 경우에는 管理下限은

$$P(X_{(k+1)} \leq LCL) = 0.0027 \dots\dots\dots(6)$$

管理上限은

$$P(X_{(k+1)} \geq UCL) = 0.0027 \dots\dots\dots(7)$$

등으로 決定된다.

따라서 어떤 品質特性值의 分布函數를 알 수 있으면 上記式 (1)~(7)에 의하여 메디안 特殊管理圖를 作成할 수 있다.

2-3 와이블分布의 特性和 非對稱性

와이블分布는 特히 기계·장비 등의 수명分布에서 많이 使用되는 分布로서, 그 確率密度函數가

$$f(x) = \alpha \cdot \beta (x-\delta)^{\beta-1} e^{-\alpha(x-\delta)^\beta}, \quad x > \delta, \quad \alpha, \beta > 0 \dots (1)$$

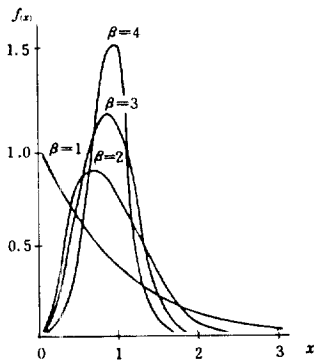
인 경우이다.

여기서 α 는 尺度母數, β 는 形狀母數, δ 는 位置母數이다. 그런데 x 가 (1)과 같은 와이블分布를 따르거나 推定¹⁾이 되면 다음 式 (2),(3)의 特性和 式 (4)의 非對稱性을 가진다.

$$E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) + \delta \dots (2)$$

$$\text{Var}(X) = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \{ \Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})^2 \} \dots (3)$$

$$\text{Skewness} = \frac{\Gamma(1 + \frac{3}{\beta}) - 3 \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) \Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) + 2 (\Gamma(1 + \frac{1}{\beta}))^3}{(\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}))^{3/2}} \dots (4)$$



(그림 1) 와이블 밀도함수(Weibull Density Functions) 분포의 모양

註¹⁾ 特殊分布의 推定方法은 Histogram을 作成하여 該當分布와 近似하다면 該當 確率紙를 利用하거나, χ^2 檢定法 및 Kolmogorov-Smirnov 檢定法 等을 利用하여 推定한다.

2. 4 와이블分布에서 메디안 特殊管理圖의 設計

前 2.2節의 메디안 特殊管理圖의 模型設計理論을 利用하여 非對稱正規分布들중의 一種인 와이블分布에서 메디안 特殊管理圖의 管理限界(線)는 다음과 같이 設計할 수 있다.

品質特性值 X 의 分布가

$$f(x) = \alpha \beta (x-\delta)^{\beta-1} e^{-\alpha(x-\delta)^\beta}, \quad x > \delta$$

인 와이블分布인 경우에는 $Y = (X-\delta)^\beta$ 와 같이 變數變換하면 Y 는 指數分布 $f(y) = \alpha e^{-\alpha y}, y > 0$ 를 따른다.

또한 $\beta > 0$ 이므로

$$P \{ \text{med}(X_1, \dots, X_n) \leq a \}, \quad a \text{는 상수}$$

$$= P \{ \text{med}(X_1 - \delta)^\beta, \dots, (X_n - \delta)^\beta \leq (a - \delta)^\beta \}$$

임을 利用하면 와이블分布인 경우에는 다음과 같이 메디안 特殊管理圖를 設計하면 된다.

$$CL = \hat{\delta} + (\frac{CL_w}{\hat{\alpha}})^{1/\hat{\beta}}$$

$$UCL = \hat{\delta} + (\frac{UCL_w}{\hat{\alpha}})^{1/\hat{\beta}}$$

$$LCL = \hat{\delta} + (\frac{LCL_w}{\hat{\alpha}})^{1/\hat{\beta}}$$

단, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}$ 는 각각 α, β, δ 에 대한 推定值들이며 CL_w, UCL_w, LCL_w 는 다음 <表 2.4-1>와 같다.

<表 2.4-1> 와이블分布用 管理限界數表

n	규격지정	LCL_w	CL_w	UCL_w
3	한쪽지정	0.0283	0.6931	3.5773
	양측지정	0.0199	0.6931	3.9267
5	한쪽지정	0.0653	0.6931	2.7601
	양측지정	0.5116	0.6931	2.9981

3. 메디안 特殊管理圖의 特性

3.1 메디안 特殊管理圖의 適應性

\bar{X} 管理圖와 메디안 特殊管理圖의 適應性(Robustness)을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 比較分析한 結果, 非對稱分布의 代表的인 特殊分布들중 와이블分布에 대한 品質特性值가 正規分布를 따르는 경우에 設計된 \bar{X} 管理圖와 메디안 特殊管理圖에서 品質特性值의 分布를 變化시켜 各各 1,000회를 打點하고, 管理限界(線)밖으로 나간

回數를 整理한 것이다.

여기서 각 分布의 母數는 正規分布를 따르는 경우와 平均(μ)와 分散(σ^2)이 같도록 定하였다.

正規分布라고 가정하여 計算된 \bar{X} 管理圖와 메디안特殊管理圖가 와이블分布를 따를 경우 \bar{X} 管理圖에서는 1,000番 打點中 管理限界밖으로 打點될 點이 2~3個가 되도록 設計되어 있지만 本分布에서 컴퓨터 시뮬레이션 結果로서는 1~11回가 管理限界를 벗어나는 點들이 發見 되었으며 그 대부분이 3~8回的 出現을 보이고 있었다. 이와같은 현상의 結果는 分布의 非對稱性的의 사유이며, 反面에 本分布가 와이블分布일 경우, 메디안特殊管理圖의 適應性(Robustness)이 매우 높음을 比較判斷할 수 있으며, 製造工程에 異常이 없음에도 불구하고, 管理限界밖으로 벗어나는 點들이 대부분 2~3回로서, 傳統的인 \bar{X} 管理圖에 比하여 2.2倍나 적게 나타남을 알 수 있다.

이는 다음 3.2節의 와이블分布의 非對稱度(Skewness)가 $\beta > 1$ 일 경우, β 가 增加하면 할수록 減少하여 對稱分布로 正規分布에 따르므로 이와같은 特殊條件下에서는 \bar{X} 管理圖의 適應性이 良好해 지지만, 反面 이와같은 同一條件下에서도 메디안特殊管理圖가 \bar{X} 管理圖와 거의 비슷한 結果를 나타내고 있기에, 全般的으로 어떤 特定한 條件下가 아닌 일반적인 경우라도 와이블分布에서는 傳統的인 \bar{X} 管理圖에 比하여 메디안特殊管理圖가 그 適應性(Robustness)이 良好함을 立證할 수 있다.

3.2 메디안特殊管理圖와 \bar{X} 管理圖의 ARL比較

管理圖에서는 製造工程의 異常原因을 찾아낼 때까지 所要되는 時間을 보통 그때까지 打點(Plot)된 샘플추출의 平均回數인 平均連의 길이(Average Run Length: ARL)로서 表現하는 바, 이는 두 管理圖를 比較檢討하는데 흔히 使用되고 있는 尺度이다. 管理上限(UCL)과 管理下限(LCL)을 갖는 어떤 管理圖上에서 標本이 LCL이나 UCL밖으로 打點될 確率을 P 라고 하고, 製造工程에 異常이 생긴 때부터 이를 管理圖에서 發見할 때 즉 標本이 관리한계 밖으로 打點될 때 까지의 打點回數를 N 이라고 하면

$$P\{N=n\} = pq^{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

(단, $q=1-p$)

이므로

$$\begin{aligned} ARL &= E(N) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} \\ &= \frac{1}{P} \end{aligned}$$

이다. 따라서 관리상한 $UCL_{\bar{x}}$ 관리하한 $LCL_{\bar{x}}$ 를 갖는 \bar{X} 管理圖에서의 平均 連의 길이는

$$ARL_{\bar{x}} = 1 / (1 - P\{LCL_{\bar{x}} \leq \bar{X} \leq UCL_{\bar{x}}\}) \dots (1)$$

이고, 관리상한 $UCL_{\bar{x}}$, 관리하한 $LCL_{\bar{x}}$ 를 갖는 메디안特殊管理圖에서는

$$ARL_{\bar{x}} = \frac{1}{1 - P\{LCL_{\bar{x}} \leq \bar{X} \leq UCL_{\bar{x}}\}} \dots (2)$$

이 된다. 式 (2)에서 $P\{LCL_{\bar{x}} \leq \bar{X} \leq UCL_{\bar{x}}\}$ 은 式 (1)~(7)에 依해 求해 질 수 있다.

다음 (表3.2-1)는 와이블分布를 따르는 工程에서 ARL을 計算한 것이다. 本 研究에서는 $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0) = (1.0, 2.0, 0.0)$ 인 것을 基準으로 하여 各 母數의 變化에 따른 ARL 값을 求하였다 이 (表3.2-1)에서 β 가 커지면 ARL은 標本の 크기가 3 또는 5인 경우 모두 증가하게 된다. 前項 (그림-1)의 와이블分布 모양에서처럼 이는 β 의 값이 커지면 品質特性值들은 中心쪽으로 集中되는 傾向이 있기 때문이다. α 와 δ 의 경우에는 ARL값이 基準點인 $(\alpha_0, \beta_0, \delta_0)$ 근처에서 最大값을 갖고있고, 位置母數(δ_0)에 가장 민감한 反應을 보이고 있다.

以上の 結果들을 綜合하여 보면 傳統的인 \bar{X} 管理圖는 品質特性值의 分布가 좌우대칭에만 그 우월성이 立證되고, 다른 非對稱度가 심한 分布의 製品일수록 正規分布임을 가정하여 만든 \bar{X} 管理圖보다는 正規分布라고 가정하고 設計한 메디안特殊管理圖가 우월함을 보이고 있다. 이는 \bar{X} 管理圖는 그의 設計을 위하여 必要한 正規分布工程이라는 가정에 매우 민감하게 反應하는 반면 메디안特殊管理圖는 \bar{X} 管理圖보다는 그 가정에 훨씬 影響을 덜 받음을 나타내는 것이다.

〈表3.2-1〉 와이블分布에서 ARL計算表

n	β_0	β 變化		α 變化		δ 變化			
		β	Me ARL	β	Me ARL	β	δ	Me ARL	
3	1.0	0.1	1.37	0.1	1.32	1.0		1.42	
5			1.33		1.12			-1.0	1.30
3		1.1		924.93	0.5	17.19	1.0		2.76
5				915.03		11.98			-0.5
3		1.9		657,102.13	1.1	443.56	1.0		370.69
5				-		427.56			0.0
3		2.5		7,502,598.00	1.9	211.94	1.0		275.42
5				-		124.79			0.5
3		3.0		∞	2.0	191.99	1.0		102.93
5				∞		108.71			1.0
3		2.0	0.1	1.16	0.1	1.32	2.0		1.22
5				1.14		1.12			-1.0
3	1.1			12.88	0.5	17.17	2.0		3.69
5				12.67		12.00			-0.5
3	1.9			239.02	1.1	443.70	2.0		370.49
5				240.25		426.70			0.0
3	2.5			3,769.92	0.9	212.26	2.0		25.85
5				3,897.98		124.21			0.5
3	3.0			32,337.28	2.0	192.28	2.0		2.87
5				45,784.01		108.20			1.0

이는 어떤 工程에서 生産되고 있는 製品들의 分布를 精確히 알 수 없는 경우에 正規分布로 假定하여 適用한 \bar{X} 管理圖보다 메디안 特殊管理圖로 工程을 管理하는 것이 바람직하다는 것을 立證하고 있다.

만일 工程의 分布를 正確하게 알 수 있을 때에는 2章에서의 設計方式대로 그 分布特性에 맞는 管理圖를 設計하여 使用하면 傳統的인 \bar{X} 管理圖보다 많은 效果를 볼 수 있다.

4. 結 論

本 研究에서는 어떤 品質特性值가 計量值이고, 그 分布가 非對稱 正規分布인 試料群에서 取한 試料의 크기가 적은 ($n=3$ 또는 5) 경우에 模型設計를 한 特殊管理圖이다.

여기서 標本中位數가 非對稱分布의 中心的傾向을 推定하는 統計量의 有效한 一種이기에 이를 利用하여 非對稱와이블 分布에서 管理限界를 設計하였다.

本 研究에서 模型開發한 메디안特殊管理圖를 適用함에 있어서 適用할 品質特性值의 分布를 잘못 推定하더라도 傳統的인 平均值(\bar{X}) 管理圖 및 余他管理圖에 比較하여 월등히 汎用的이며 그 適應性이 優秀하였다. 또한 그 工程의 分布를 正確히 推定하고 本 特殊管理圖를 適用할 경우에는 既存의 傳統的인 計量值管理圖에 比較하여 그 效率이 優秀하며 로버스트(Robustness)함을 알 수 있었다.

参 考 文 献

1. Arolan, L.A., and Levene, H., (1950) "The Effectiveness of Quality Control Charts," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 45, No. 252, pp. 520-529.
2. Burr, I.W., (1967) "The Effect of Non-Normality on Constants for \bar{X} and R Charts," *Industrial Quality Control*, Vol. 23, No. 11, pp. 563-569.
3. Bisgaard, S., Hunter W.G. and pallesen, L., (1981) "Economic Selection of Quality of Manufactured Product," *Technometrics*, Vol. 26, No. 1, pp. 9-18.
4. Chung-How, Y., and Hillier, F.S., (1970) "Mean and Variance Control Chart Limits Based on a Small Number of Subgroups," *Journal of quality Technology*, Vol. 2, No. 1, pp. 9-16.
5. Chiu, W.K. and Wetherill, G.B., (1974), "A Simplified Scheme for the Economic Design of \bar{X} -Charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 6, No. 2, pp. 63-69.
6. Denisoff, B.A., (1980) "Process Control Management," *Quality Progress*, Vol. 13, No. 6, pp. 14-16.
7. Ferrell, E.B. (1964) "A Median, Midrange Chart Using Run-Size Subgroups," *Industrial Quality Control*, Vol. 20, No. 10, pp. 1-4.
8. Gibra, I.N. (1974), "Economically Optimal Determination of the Parameters of an \bar{X} -Control Chart," *Management Science*, Vol. 17, No. 9, pp. 635-646.
9. Hillier, F.S., (1964) " \bar{X} -Chart Control Limits Based on A Small Number of Subgroups," *Industrial Quality Control*, pp. 24-29.
10. Johnson, N.L., (1966) "Cumulative Sum Control Charts and the Weibull Distribution," *Technometrics*, Vol. 8, No. 3, pp. 481-491.
11. Lloyed S. Nelson, (1984) "The Shewhart Control Chart test for Special Causes." *Journal of Quality Technology*, October
12. Moore, P.G. (1957), "Non-Normality in Quality Control Charts," *Applied Statistics*, Vol. 6,
13. Nelson, P.R. (1979), "Control Charts for Weibull Processes with Standards Deviation given," *IEEE Transactions an Reliability*, Vol. 28, pp. 283-288.
14. Schilling E.G. and Nelson, P.R. (1976), "The Effect of Non-Normality on the Control Limits of \bar{X} charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 183-188.
15. Shahani, A.K. (1971), "A Control Chart Based on Sample Median," *Quality Engineer*, Vol. 35, pp. 7-9.