□論 文□

교통정책 평가 모형 한계

交通政策評價에 있어 Logit模型의 限界 : Logit模型에 있어서의 期待效用*

모형 기대효용

Limits of Logit Models in Transportation Policy Evaluation : Expected Utilities in Logit Models

조 중 래
趙 重 來
(交通開發硏究院, 工學博士)

目 次

ABSTRACT

This article shows that, in the logit models, the (conditional) expected utility of the decision makers choosing an alternative is invariant across all alternatives. This property of the logit model implies that the logit model can not explain the distributional wealfare effects of a transportation policy (or transportation investment) among different alternatives, and thus the logit model is not proper for evaluating transportation policy in equity aspects.

Ⅰ. 序 論

Logit 模型은 지난 10여년간 都市計劃學, 交通計劃學, 經濟學 등 인간의 選擇行爲(Choice Behavior)를 다루는 여러 學問分野에서 광범위하게 應用되어 왔다. Ⅰ.Ⅰ.A 特性 등 지금까지 밝혀진 모형 자체의 몇가지 非現實的인 성격에도 불구하고 Logit 模型이 여러 分野에서 광범위하게 사용되어온 것은 그것이 多様한 代案들 (Alternatives)에 대한 人間選擇行爲의 메카니즘을 설명하는 非連續選擇理論 (Discrete Choice Theory)를 근간으로 하고 있다는 사실과, 그것을 使用함에 있어서의 簡便性, 模型에 대한 이해의 容易性 등 模型運用에 관한 便利함 때문이라 할 수 있다. 特히 交通計劃分野에 있어 Logit 模型은 手段選擇模型 (Mode Choice Model), 路線選擇模型(Route Choice Model) 등에서 多様하게 應用되면서 發展되어 왔다.

그러나 이렇게 광범위하게 사용되고 있는 Logit 模型이 交通政策이나 投資의 分析을 위

하여는 그 한계가 뚜렷한 바, 그것은 Logit 模型이 選擇模型(Choice Model) 으로 사용되었을 경우 政策이나 投資에 대한 期待效用(Expected Utilities) 이 各 選擇 集團間에 同一하게 나타나기 때문이다. 따라서 Logit 모형을 利用하였을 경우, 政策이나 投資의 均衡性(Equity) 分析이 不可能하게 된다. 본고에서는 이러한 Logit 模型의 特性을 導出하고 그것이 의미하는 바를 간략하게 살펴본다. 2장에서는 非連續選擇模型에 있어 全體 代案選擇者 母集團(Population Group)의 最大期待效用(Expected Maximum Utility)과 特定代案을 選擇한 사람들의 期待效用(Expected Utility)에 대한 一般式을 고찰하고, 3장에서는 二元手段選擇模型(Binary Mode Choice Model)을 예로 들어 앞에서 言及된 Logit 模型의 特性을 導出한다.

Ⅱ. 非連續選擇模型에 있어 期待效用(Expected Utilities in Discrete choice Models)

非連續 確率 選擇模型(Prohabilistic Discrete Choice Model) 에 있어 各 代案 i에 대한 總 效用(Total Utility)은 可視效用(Measurable Utility ; Deterministic Utility) 과 非可視效用(Unmeasurable Utility ; Random Utility)의 합으로 表現된다.

$$\hat{U}_i = U_i + \theta_i$$

式 (1)에서 $\hat{U}_i$, U_i, θ_i는 各各 代案i의 總效用, 可視效用, 非可視效用을 가리킨다. 非連續選擇理論(Discrete Choice Theory) 에 있어 代案選擇에 대한 기본명제는 總效用의 극대화에 있다. 따라서 各 代案 i의 選擇確率(Choice Probability), P_i는 다음과 같이 表現된다.

$$P_i = \text{Prob}\,(U_i + \theta_i > U_j + \theta_j \;;\; \forall j \neq i) \quad (2)$$

이제 S를 全體 代案들의 집합이라고 하자. 이 때 代案을 選擇하는 행위자, 즉 代案選擇者의 母集團(Population Group)의 最大期待效用(Expected Maximum Utility), E_t, 는

$$E_t = E\left[\max_{i\in s} \hat{U}_i\right] = E\left[\max_{i\in s} (U_i + \theta_i)\right] \quad (3)$$

로 表現된다. 한편, 어떤 特定한 代案 i를 選擇한 行爲者의 期待效用, E_i는

$$\begin{aligned} E_i &= E\left[\hat{U}_i \mid \hat{U}_i > \hat{U}_j \;;\; \forall j \neq i \in s\right] \\ &= E\left[U_i + \theta_i \mid U_i + \theta_i > U_j + \theta_j \;;\; \forall j \neq i \in s\right] \end{aligned} \quad (4)$$

로 表現된다. 또한 式 (3)과 (4)로부터 母集團의 最大期待效用 E_t는 各 代案의 期待效用 E_i의 期待値(Expected Value)로 計算된다. 即,

$$E_t = \sum_{i\in s} P_i E_i \quad (5)$$

交通計劃分野에 있어 式 (3), (4), (5)로 表現되는 母集團의 最大期待效用과 특정한 代案을 選擇한 행위자의 期待效用은 交通政策에 대한 計量的 評價基準이 될 수 있다. 即, 母集團의 最大期待效用値는 어떤 政策에 대한 效率性(Efficiency)의 尺度가 되며 各 代案에 대한 期待效用은 交通政策 或은 交通投資에 대한 各 選擇 集團間의 均衡性(Equity)의 尺度가 된다. 特히, 부록에서 證明이 되겠으나, Logit 模型에 있어 母集團의 最大期待效用은 순수 經濟學에서의 消費者剩餘(Consumer Surplus)와 同一한 政策評價 計量指標가 된다.

다음 章에서는 二元手段選擇模型(Binary Mode Choice Model)을 利用, Logit 模型이 選擇模型(Choice Model)으로 使用되었을 때 最大期待效用과 各 選擇代案에 대한 期待效用이 어떻게 表現되는가를 보기로 한다.

Ⅲ. 二元手段選擇模型에 있어 期待效用(Expected Utilities in Binary Mode Choice Model)

Logit 模型에 의한 二元手段選擇模型은 式(6)과 같이 表現된다.

$$P_b = \exp(U_b) / \{\exp(U_b) + \exp(U_s)\}$$
$$P_s = \exp(U_s) / \{\exp(U_b) + \exp(U_s)\} \quad (6)$$

여기에서 b는 버스, S는 地下鐵을 가리킨다고 假定한다. 式(4)에 의해 버스를 選擇한 行爲者와 地下鐵을 選擇한 行爲者의 기대효용은 各各

$$E_b = E[U_b + \theta_b \mid U_b + \theta_b > U_s + \theta_s] \quad (7.1)$$

$$E_s = E[U_s + \theta_s \mid U_s + \theta_s > U_b + \theta_b] \quad (7.2)$$

가 된다. 式(7.1)과 (7.2)에 의해 버스와 地下鐵의 期待效用은 各各 다음과 같이 計算된다.

$$E_b = E[U_b + \theta_b \mid U_b + \theta_b > U_s + \theta_s]$$
$$= (1/P_b)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{U_b+\theta_b-U_s}(U_b+\theta_b)\, f(\theta_b, \theta_s)\, d\theta_s\, d\theta_b$$
$$= U_b - \ln P_b + r, \quad (8.1)$$

$$E_s = E[U_s + \theta_s \mid U_s + \theta_s > U_b + \theta_b]$$
$$= (I/P_s)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{U_s+\theta_s-U_b}(U_s+\theta_s)\cdot f(\theta_b, \theta_s)\, d\theta_b\, d\theta_s$$
$$= U_s - \ln P_s + r, \quad (8.2)$$

여기에서 $f(O_b, O_s)$는 Weibull 分布를 따르는 O_b, O_s의 確率 密度函數(Joint Probability Density Function)이며, γ는 Weibull 分布의 平均으로서 이것은 Euler 상수의 값과 同一하다($\gamma = 0.5772$). (式(8.2)과 (8.2)에 대한 자세한 計算過程은 附錄을 參照).

式(6)을 式(8.1) 或은 (8.2)에 대입하면,

$$U_b - \ln P_b + r = U_s - \ln P_s + r = \ln\{\exp(U_b) + \exp(U_s)\} + r \quad (9)$$

가 되며 이것은 $E_b = E_s$ 임을 의미한다. 한편 選擇母集團의 最大期待效用을 求하기 위하여 式(8.1)과 式(8.2)를 式(5)에 대입하면,

$$E_t = P_b E_b + P_s E_s$$
$$= \ln\{\exp(U_b) + \exp(U_s)\} + r \quad (10)$$

를 얻게 된다. 結局 式(8.1), (8.2), (10)으로부터

$$E_t = E_b = E_s \quad (11)$$

가 成立한다. 이것은, Logit 模型을 選擇模型(Choice Model)으로 使用하였을 때 全體母集團의 最大期待效用과 각 代案을 選擇한 행위자의 期待效用은 동일하다는 것을 의미한다. 조금 더 複雜한 計算過程을 거치면, 이러한 Logit 模型의 성격은 多元 Logit 모형(Multinomial Logit Model)에서도 成立함을 알 수 있다.

이러한 Logit 模型의 성격을 실예를 가상하여 생각해보자. 가령 버스와 地下鐵을 이용할 수 있는 狀況下에서 地下鐵의 요금을 引下하였다고 가정했을 때, 상식적으로 地下鐵을 이용하는 사람의 便益의 증대가 버스를 이용하는 사람의 그것보다 훨씬 클 것이라 생각될 것이다. 그러나 앞에서 導出된 Logit 模型의 特性은, Logit 模型이 手段選擇 모형으로 사용될 경우, 地下鐵料金의 引下로 因한 地下鐵 利用者의 便益增大만큼 正確히 동일한 양의 便益增大를 버스 利用者도 얻게 된다는 것을 意味한다.

이러한 Logit 模型의 특성은 交通政策 或은 交通投資를 評價함에 있어 Logit 模型이 選擇模型으로 使用되었을 경우 投資 或은 政策에 대한 效率性(Efficiency) 側面의 評價는 可能하나 각 代案을 이용하는 選擇集團間의 便益의 均衡性(Equity)은 評價될 수 없다는

것을 의미한다. 그것은 Logit 模型이 사용되었을 경우 어떠한 경우에 있어서든지 각 選擇集團間의 便益(期待效用)은 同一하게 나타나기 때문이다.

Ⅳ. 結 論

交通政策 或은 交通投資에 대한 評價를 投資의 效率性(Efficiency)과 投資效果의 各集團間의 分配問題로서의 均衡性(Equity)의 관점에서 파악할 때 Logit 模型의 한계는 均衡性 分析이 不可能하다는 데 있다. 그것은 Logit 模型에 있어 各 代案에 대한 期待效用이 모두 동일하게 나타나기 때문이다. 이러한 Logit 模型의 특성은 Logit 模型에 있어 非可視效用(Random Utilities)이 Weibull 分布를 따른다는 가정을 전제하고 있기 때문이다.

參 考 文 獻

1. Anas, A., "Resdential Location Markets and Urban Transportation," New York, Academic Press, 1982.
2. Hausman, J.A. and Wise, D., "A Conditional Probit Model for Qualtative Choice: Discrete Decisions Recognizing Interdependence and Heterogeneous Preference," *Econometrica,* 46, 1978, pp. 403-426.
3. McFadden, D., "Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior," in P. Zarembka, ed., *Frontiers in Econometrics,* New York, Academic Press, 1973.
4. Samuelson, L., "On the Independence from Irrelevant Alternatives in Probabilistic Choice Models," *Journal of Economic Theory,* 35, 1985, pp.376-389.
5. Small, K.A. and Rosen, H.S., "Applied Welfare Economics with Discrete Choice Models," *Econometrica,* 49, 1981, pp. 105-130.

附 錄 (I)

Logit 模型이 選擇模型(Choice Model)으로 使用되었을 경우 消費者 剩餘 (Consumer Surplus):

버스와 地下鐵에 대한 選擇模型이 式 (6)에 의하여 주어진다고 가정했을 때 각 代案에 대한 交通手段의 수요함수는 다음과 같이 表現된다.

$$D_b = NP_b \,,\ D_s = NP_s \tag{12}$$

여기에서 N은 全體 手段選擇者의 수, D_b, D_s는 각각 버스와 地下鐵 利用者數를 가리킨다. 이제 地下鐵料金이 引下되었다고 가정하고(U_b^0, U_s^0)를 地下鐵料金이 引下되기전의 버스와 地下鐵 利用者의 效用, (U_b^1, U_s^1)을 地下鐵料金이 引下되고 난 후의 각 代案의 效用이라고 가정하자. 그러면, 地下鐵料金이 引下됨으로써 全體 選擇母集團이 갖는 消費者 剩餘의 增加分은 各 수단에 대한 需要가 상호 의존적이기 때문에(Interdependent Demand Case) 다음과 같은 Hotelling의 線積分(Line Integeral)에 의하여 구해진다.:

$$\Delta C = \int_{(U_b^0,\, U_s^0)}^{(U_b^1,\, U_s^1)} (D_b\, dU_b + D_s\, dU_s) \tag{13}$$

式 (13)을 풀기 위하여는 우선 (U_b^0, U_s^0)로부터 (U_b^1, U_s^1)에 이르는 積分路의 唯一性(Uniqueness of Integration Path)에 대한 證明이 要求된다. 이 증명은 需要에 대한 Cross-Price Effect의 대칭성을 證明함으로써 可能하다. 式 (12)를 다시 整理하면,

$$D_b = N[\exp(U_b) / \{\exp(U_b) + \exp(U_s)\}] \tag{14.1}$$

$$D_s = N[\exp(U_s) / \{\exp(U_b) + \exp(U_s)\}] \tag{14.2}$$

式 (14.1)과 式 (14.2)를 各各 U_s와 U_b에 대하여 偏微分하면,

$$\partial D_b / \partial U_s = -NP_b P_s = \partial D_s / \partial U_b \qquad (15)$$

따라서 D_b와 D_s에는 Cross-Price Effect의 對稱性이 存在한다. 따라서 式 (13)의 積分路는 유일하다.

이제,

$$x = \exp(U_b) + \exp(U_s) \qquad (16)$$

라고 하자. 式 (16)을 미분하면,

$$dx = \exp(U_b)\, dU_b + \exp(U_s) dU_s \qquad (17)$$

가 된다. 式 (14.1), (14.2), (16), (17)을 式 (13)에 대입하면,

$$\begin{aligned}
\Delta C &= N \int_{(U_b^0,\, U_s^0)}^{(U_b^1,\, U_s^1)} \{\exp(U_b)\, dU_b + \exp(U_s)\, dU_s\} / \{\exp(U_b) + \exp(U_s)\} \\
&= N \int_{(U_b^0,\, U_s^0)}^{(U_b^1,\, U_s^1)} dx / x \\
&= N \ln x \Big|_{(U_b^0,\, U_s^0)}^{(U_b^1,\, U_s^1)} \\
&= N [\ln\{\exp(U_b^1) + \exp(U_s^1)\} - \ln\{\exp(U_b^0) + \exp(U_s^0)\}]
\end{aligned} \qquad (18)$$

式 (18)은 地下鐵料金의 引下로 인한 總消費者 剩餘의 增加分을 나타낸다.

따라서 ΔC의 平均値는

$$\begin{aligned}
\Delta AC &= \Delta C / N \\
&= \ln\{\exp(U_b^1) + \exp(U_s^1)\} - \ln\{\exp(U_b^0) + \exp(U_s^0)\}
\end{aligned} \qquad (19)$$

로 表現되며, 여기에서 ΔAC는 選擇母集團 消費者 剩餘增加分의 平均値를 나타낸다. 한편 式 (10)으로 表現되는 選擇母集團의 최대기대효용은 地下鐵料金이 引下됨에 따라 ΔE_t 만큼 增加된다고 할 때 ΔE_t는

$$\Delta E_t = Et(U_b^1, U_s^1) - E_t(U_b^0, U_s^0) \qquad (20)$$

에 의해 구해진다. 式 (10)을 式 (20)에 대입하면,

$$\begin{aligned}
\Delta E_t = &\ln\{\exp(U_b^1) + \exp(U_s^1)\} \\
&- \ln\{\exp(U_b^0) + \exp(U_s^0)\}
\end{aligned} \qquad (21)$$

을 얻는다. 式 (19)와 (21)을 비교하면, 交通政策 變化로 因한 效率性의 척도로서 최대기대효용의 變化와 平均 消費者 剩餘의 變化는 同一함을 알 수 있다.

附 錄 (II)
式 (8.1)과 式 (8.2)의 計算過程 :

條件附 期待値(Conditional Expectation)을 구하기 위하여는 우선 條件附 確率密度函數(Conditional p.d.f)를 구해야 한다. C를 2次元空間(Two-Dimensional Space)이라고 가정할 때

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{y} \int_{x \epsilon C} f(x, y)\ dxdy \\
&= \text{Prob}(x \epsilon C,\ Y \leq y) \\
&= \text{Prob}(Y \leq y \mid x \epsilon C) \cdot \text{Prob}(x \epsilon C)
\end{aligned} \qquad (22)$$

가 된다. 式 (22)의 양변을 y에 대하여 미분하면,

$$\begin{aligned}
&\{1/\text{Prob}(x \epsilon C)\} \int_{x \epsilon C} f(x, y)\, dx \\
&= f(y \mid x \epsilon C)
\end{aligned} \qquad (23)$$

따라서, 式 (23)을 이용, 2次元空間에 있어 條件附 期待値의 一般式을 求하면 다음과 같다.

$$E[Y \mid x \in C] = \int_y y f(y \mid x \in C)\, dy$$
$$= \{1/\text{Prob}(x \in C)\} \cdot$$
$$\int_y \cdot \int_{x \in C} y f(x, y)\, dx dy \quad (24)$$

式 (8.1)의 E_b를 구하기 위하여 式 (24)를 이용하면,

$$E[U_b + \theta_b \mid U_b + \theta_b > U_s + \theta_s]$$
$$= (1/P_b) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{U_b + \theta_b - U_s} (U_b + \theta_b) \cdot f(\theta_b, \theta_s)\, d\theta_s\, d\theta_b$$
$$= (1/P_b) \int_{-\infty}^{\infty} (U_b + \theta_b)\, f(\theta_b) \cdot \left[\int_{-\infty}^{U_b + \theta_b - U_s} f(\theta_s)\, d\theta_s\right] d\theta_b$$
$$= (1/P_b) \int_{-\infty}^{\infty} (U_b + \theta_b)\, f(\theta_b) \cdot F(U_b + \theta_b - U_s)\, d\theta_b \quad (25)$$

여기에서 F는 Weibull 분포를 따르는 θ_b의 c.d.f이다.

즉,

$$F(\theta) = \exp\{-\exp(-\theta)\} \quad (26)$$
$$f(\theta) = \exp(-\theta) \exp\{-\exp(-\theta)\} \quad (27)$$

따라서, 式 (25)는

$$E[U_b + \theta_b \mid U_b + \theta_b > U_s + \theta_s]$$
$$= (1/P_b) \int_{-\infty}^{\infty} (U_b + \theta_b) \exp(-\theta_b) \cdot \exp\{-\exp(-\theta_b)\} \cdot \exp[-\exp\{-(U_b + \theta_b - U_s)\}]\, d\theta_b$$
$$= (1/P_b) \int_{-\infty}^{\infty} (U_b + \theta_b) \exp(-\theta_b) \cdot \exp[\{-\exp(-\theta_b)\} \cdot \{1 + \exp(U_s - U_b)\}]\, d\theta_b$$
$$= (1/P_b)[1/\{1 + \exp(U_s - U_b)\}] \cdot \int_0^1 (U_b + \theta_b)\, d\Omega$$
$$= (1/P_b) P_b \int_0^1 (U_b + \theta_b)\, d\Omega$$
$$= \int_0^1 (U_b + \theta_b)\, d\Omega \quad (28)$$

여기에서,

$$\Omega = \exp[\{-\exp(-\theta_b)\} \cdot \{1 + \exp(U_s - U_b)\}] \quad (29)$$
$$d\Omega = \Omega[\{-\exp(-\theta_b)\} \cdot \{1 + \exp(U_s - U_b)\}] \quad (30)$$

式 (29)로부터,

$$\theta_b = \ln\{1 + \exp(U_s - U_b)\} - \ln(-\ln \Omega) \quad (31)$$

式 (31)을 式 (28)에 대입하면,

$$E[U_b + \theta_b \mid U_b + \theta_b > U_s + \theta_s]$$
$$= \int_0^1 (U_b + \theta_b)\, d\Omega$$
$$= U_b + \ln\{1 + \exp(U_s - U_b)\} - \int_0^1 \ln(-\ln \Omega)\, d\Omega$$

$$= U_b - \ln P_b - \int_0^{\infty} (\ln x) \exp(-x) dx$$

$$= U_b - \ln P_b - (-\gamma)$$

$$= U_b - \ln P_b + \gamma \tag{32}$$

여기에서,

$$x = -\ln \Omega, \quad -\Omega dx = d\Omega, \quad \Omega = \exp(-x)$$

$$\int_0^{\infty} (\ln x) \exp(-x) dx = -\gamma \ (= 0.5772)$$

式 (8.2)도 同一한 過程을 거쳐 計算된다.

* 本稿는 筆者가 Northwestern 大學 在學中 參與한 硏究(Wealfare Functions in Logit Models)의 結果 一部分을 要約한 것으로 硏究論題를 提供해 준 A.Anas 敎授에게 感謝드린다.