

□論文□

「都市 및 지역계획 지원을 위한」

YSIM (Yangsuk's SIMulation)」

YSIM for City and Regional Planning

강양석  
義 良 錫

(交通開發研究院, 都市 및 地域計劃學 博士)

— 目

— 次 —

- |                                  |                    |
|----------------------------------|--------------------|
| I. 緒 : YSIM의 背景                  | 4. YSIM의 順序        |
| II. YSIM의 構成 및 使用方法              | III. YSIM의 評價      |
| 1. 用語의 定義                        | 1. 變數의 選定          |
| 2. YSIM에 의한 시스템의 構造分析            | 2. YSIM에 의한 豫測     |
| 3. YSIM에서 各 變數의 代數的變化 豫測<br>의 數式 | 3. RESCH와 YSIM의 比較 |
|                                  | 4. 結               |

— ABSTRACT —

A prediction is an indispensable element to research of Social Science, especially in Regional planning, City planning, and Transportation planning.

Since 1930s, varieties of prediction methods have been developed. In the 1980s, numerical models have been used by high-developed computers.

Even though the numerical models can be figured mathematically, it could not be applied practically due to its expertness and complicateness. And even professional planners often can not use their ideas which are valuable experiences in prediction process, because they are not knowledgable for numerical models.

The YSIM, developed by author, is available as follows.

- i) Numerical modeling of professional experiences
- ii) Providing a foundation of large-scale model
- iii) Understanding of research object structure

The YSIM make use of matrix to identify the system structure which is similar to the Cross Impact Method.

To evaluate the YSIM availabilities, it is compared with the early developed methodologies such as KSIM, QSIM, and SPIN.

As the result, it was confirmed that YSIM was more accurate in the prediction.

The algorithms in YSIM is programmed for use of PCs.

## I. 緒：YSIM의 背景

시스템 다이나믹스 (System Dynamics : 以下 SD로 씀)는 意思決定의 能力과 效果를 擴張하기 創始된 것으로, 그 自體가 發見的規範 (Heuristic)에 바탕을 둔 모델이라고 할 수 있다. 왜냐하면 SD는 メンタル・モード (Mental Model)로부터 始作하여, 거기에 固有의 數 많은 假定 혹은 前提를 미리 明示해서, 個個의 要素과 그들 間의 關係性을 認識하면서 系統을 만들어 간다는, 人間의 知的 ability과, 數 많은 要素를 追跡해서 矛盾없게 操作하는 컴퓨터 能力を 連結시킨 것이기 때문이다.<sup>1)</sup>

SD가 갖는 長點中 하나는, 많은 變數를 한 개의 시스템으로서 同時に 取扱할 수 있는 것이다. 그러나, 變數가 많아지면 簡單·明瞭性이 약해지므로, 發見的 規範으로서 解決하여야 할 問題가 일어난다. 즉, 많아진 變數의 數와 함께, 變數와 變數間의 關係와 定義나 시스템 全體 및 서브시스템 (Sub-System)의 피드백·루프 (Feedback Loop) 構造 究明이 어렵게 된다. 그렇지만 SD를 開發할 때에 가장重要な 것은 피드백·루프인 바, 이에 대해 Forrester는 “가장 單純한 事象으로부터 複雜한 事象에 이르기까지 시스템 内에서의 作用 및 變化를決定하여 가는 것은 피드백·루프이다”라고 한다.<sup>2)</sup> 또 McLean도 “SD를 開發할 때에는 피드백·루프의 構成에 重點을 두어야 한다. 變數의 피드백 關係는 시스템 内에서 決定的인 重要性을 가지며, 모델 舉動의 形態를 決定짓는 것이다. 따라서 모델化 作業에서 重要한 것은 피드백 構造를 正確히 하는 것이다”라고 한다.<sup>3)</sup> 이러한 觀點에서 볼 때에 만약 i) 시스템을 集約된 變數로 나타내고 ii) 變數間의 關係를 보다 簡單히 表示할 수 있고 iii) 피드백 構造를 確實·簡單하게 究明하는 것을 可能케 하는 등의 條件을 滿足시킬 수 있는 方法이 있다면, 보다 簡單히 시스템의 각 變數 舉動豫測도 可能하게 될 것이다.

本論文에서 새롭게 提案하는 YSIM은 上記의 目的下에 開發된 모델化 方法이다. 즉, 다시 한번 YSIM의 實用性을 定理하면 다음과 같다.

i) 容易한 數理 모델化 :一般的으로 計劃에 關聯되는 事象을 數理 모델로 表示하거나, 未來에 關한 數理的豫測을 하기 為해서는 이러한 技法에 대한 깊은 知識이 必要하나, 이를 習得하는 것은 長時間이 要求된다. YSIM은 시스템을 構成하는 變數間의 關係를 後記하는 것과 같이 簡單한 方法으로 同定함에 의해 모델화하여 數의 變化豫測을 可能케 한다.

ii) 經驗의 數理 모델화 : 計劃은 研究對象에 對한 學問的 理論과 함께 經驗 또한 重要的 要素가 되어 計劃의 質的內容을 決定짓는다. 그러나 이 經驗은 長期間에 걸쳐 얻어지는 것이며, 經驗에 의한 知識은 소멸되기 쉽다. 앞에서 말한 것처럼 容易한 모델화 方法인 YSIM은 研究對象이 되는 시스템에 대한 經驗을 모델화하여 幅넓게 使用되게 할 것이다.

iii) 大規模 SD모델 開發의 基礎 : 앞에서 말한 바와 같이 SD가 갖는 利點의 하나는 많은 變數를 한꺼번에 다룰 수 있다는 것이다, 變數가 많아지면 SD에서 가장 중요한 피드백 構造를 同定하는 것이 至難한 作用으로 된다. YSIM은 이를 明瞭하게 分析하여 주며 또宿約된 内容을 가진 變數에 의한 實驗이 大規模 SD모델 開發의 基礎로 活用될 수 있다.

## II. YSIM의 構成 및 使用方法

### 1. 用語의 定義

YSIM에서 使用하는 몇개의 用語가 갖는 意味는 다음과 같다.

1) 變數 A가, 變數 B에 影響을 준다. YSIM은 最終的으로 어떤 시스템을 構成하고 있는 각 變數의 量의in 變化를豫測하는 것에 그 目的이 있다. 따라서 變數 A가 變數 B에

影響을 준다는 것은 變數 A의 舉動(혹은 量的인 變化)가 變數 B의 量的 變化를 불러 일으킨다는 것을 意味한다.

2) 變數 B가 變數 A로부터 影響을 받는다. 影響을 주는 것과 反對의 意味이다.

3) 變數 A가 變數 C에 直接影響을 준다. 同定된 變數에 限하여 이들 間의 影響을 考慮한다. 同定된 變數 A, B, C에 있어서 變數 A가 變數 B를 거치지 않고 變數 C에 影響을 줄 때에 變數 A는 變數 C에 直接影響을 준다고 한다. 以下의 說明에서 影響을 준다는 것은 이 直接影響을 뜻한다.

#### 4) 影響結果

한개의 變數가 다른 變數에 直接影響을 주고, 影響을 받은 變數가 量的으로 增加하던가, 減少한 것을 말한다. 影響을 받은 變數의 量的인 變化가 影響을 준 變數와 同一한 方向인 경우(즉, 影響을 준 變數가 增加하면 影響을 받은 變數도 增加하고, 減少하면 따라서 減少하는 것)는 “+”, 反對 方向인 경우는 “-”로 表示된다. 또 關係가 없는 變數間의 影響結果는 “0”이다.

#### 5) 因果行列

同定된 變數를 Matrix型으로 行과 列에 두어, 行의 變數가 影響을 주는 變數, 列의 變數가 影響을 받는 變數로 해서 影響結果를 記入한 것이다.

#### 6) 影響의 強度

上述한 因果行列에 그 強度의 크기를 준 것을 말한다. 이것은 影響을 받은 變數에 對해 影響을 주는 變數 間의 比較值이며, 一般 시스템의 絶對值이기도 하다. YSIM에서는 單純化를 위해 強度를 強·中·弱으로 생각하여, -3, -2, -1과 +3, +2, +1의 整數로 나타낸다.

#### 7) 基本構造行列

因果行列에 影響의 強度를 준 것을 말한다.

#### 8) 피드백·루프

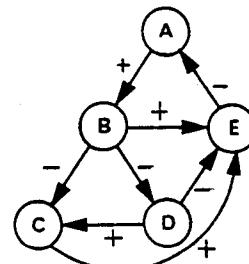
Graph理論에서 말하는 初等的閉路로써, 한 개의 點을 最大한 1回만 通하는 閉路를 말한다.

#### 9) 시스템의 構造分析

因果行列을 使用해서 抽出한 피드백·루프의 内容을, 그 構成 變數, 性格(正의 피드백·루프, 負의 피드백·루프), 各 變數에 關係되는 피드백·루프等에 관해 分類하는 것을 말한다.

#### 2. YSIM에 依한 시스템의 構造分析

YSIM은 시스템을 構成하는 同定된 變數가 어떠한 피드백 構造下에서 舉動하는가를 確認하여 가면서, 거기에 바탕하여 各 變數의 未來 成長 豫測을 한다. 따라서 因果行列로부터 피드백·루프를 分類하는 것은 아주 重要的過程이다. YSIM에서는 피드백·루프를 分類하는 새로운 알고리즘을 開發하였으며, 이는 筆者에 의해 “Matrix-Tracing法에 의한 피드백·루프 發見 알고리즘”이라 命名되었다. 이러한 이름을 붙인 理由는 이 알고리즘이 行列의 計算에 의하지 않고 因果行列이 나타내는 變數間의 因果結果 Flow Diagram으로 부터 發見하기 때문이다. Matrix Tracing法에 의한 피드백·루프 發見의 理論은 다음과 같다.



(圖 2-1). 變數間因果構造 Flow Diagram

<表 2-1> 影響結果行列

	A	B	C	D	E
A	0	+1	0	0	0
B	0	0	-1	-1	+1
C	0	0	0	0	+1
D	0	0	+1	0	-1
E	-1	0	0	0	0

지금 (圖 2-1)과 같은 因果構造를 갖는 Flow Diagram이 있다고 하자. 이것은 影響結果行列 表 2-1 을 Flow Diagram으로 表示한 것이다. 시스템 全體를  $S$ , 시스템을構成하는 影響結果行列上의 모든 變數를 각各 1個의 部分集合이라고 생각해서  $S_1, S_2, \dots, S_n$ 이라고 하면

$$S = \{ S_1, S_2, \dots, S_n \} \dots \dots \dots (2.1)$$

라고 表示할 수 있다.

部分集合  $S_1, S_2, \dots, S_n$ 은 各各 影響을 주는 變數를 要素로서 가지고 있으므로, 表 2-1을 使用해서 表示하면

$$S_1 = \{B\}, S_2 = \{C, D, E\}, S_3 = \{E\},$$

$$S_4 = \{C, E\}, S_5 = \{A\} \dots \dots \dots (2.2)$$

이 된다.

影響結果行列 上에서 몇개의 部分集合이 모인 것을 集合  $T$ 라고 하면

$$S_i \leq T \quad (i = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (2.3)$$

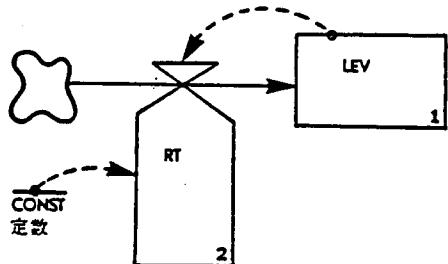
으로 되어 式 (2.1)의  $S$ 는  $T$ 의 모든 部分集合이기 때문에  $T$ 의 (여기)集合이 되고, 式 (2.2)에 의해서 變數間 影響關係를 表 2-1에 따라 有向 Graph로 나타내면 (圖 2-2)와 같은 다이아그램을 그릴 수 있다. (圖 2-2)의 화살표를 追跡하여 가면, 어느 點을 起點으로 해서 화살표의 갯수에 對應한 피드백·루프를 抽出할 수 있다. Matrix-Tracing 法의 詳細한 알고리즘은 筆者の論文을 參照하길 바란다.<sup>4)</sup>

### 3. YSIM에서 各 變數의 代數的 變化 豫測의 數式

SD에 있어서, 各 變數의 舉動을構成하는 피드백·루프 特性을 보면, 正의 피드백·루프(Positive Feedback Loop), 負의 피드백·루프(Negative Feedback Loop) 또는 이 두 개가 섞여있는것 中 어느 하나에 속하게 된다. 이들 3개의 피드백·루프는 각各固有의 成長形態를 가지며, 이를 SD에서는 基本成長構造로서 取扱하고 있다. 이들 基本構造는 以下와 같이 解析的으로 表現할 수 있다.<sup>5)</sup>

#### 1) 正의피드백·루프 成長 構造

正의피드백 同意語로서, “惡循環(Vicious Circles)”과 正循環(Virtuous Circles)”이 있다. 이 成長 構造를 Flow Diagram으로 나타내면 圖 2-3과 같다.



$$\text{LEV.K} = \text{LEV.J} + (\text{DT})(\text{RT.JK})$$

$$\text{RT.KL} = \text{CONST} * \text{LEV.K}$$

단,

LEV : Level

RT : Rate

CONST : 定數

(圖 2-3) 正의 피드백 Flow Diagram

正의피드백 構造의 解析的 表現은 式 (2.4) 와 같다.<sup>1)</sup>

$$P(t) = P(o) \cdot \text{EXP}(\text{const} \cdot t) \dots \dots \dots (2.4)$$

단,

P(t) : 時間 t에서의 Level 值

P(o) : Level 的 初期值

const : 常數

t : 時間

EXP : 自然對數의 밀

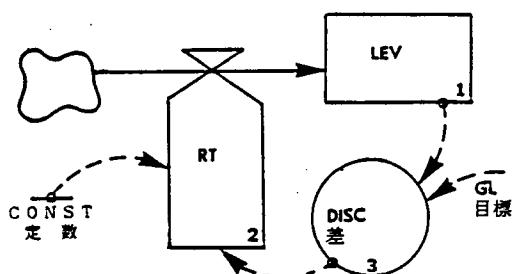
#### 2) 負의피드백·루프 成長 構造

負의피드백은 目標 指向型 舉動이다. 이것의 基本 成長 構造를 Flow Diagram으로 나타내면 圖 2-4와 같다.

負의피드백 構造의 解析的 表現은 式 (2.5) 와 같다.<sup>2)</sup>

$$P(t) = GL + [P(o) - GL] \cdot$$

$$\text{EXP}(-\text{const} \cdot t)$$



$$\text{LEV.K} = \text{LEV.J} + (\text{DT})(\text{RT.JK})$$

$$\text{RT.KL} = \text{FPT} * \text{DISC.K}$$

$$\text{DISC.K} = \text{GL} - \text{LEV.K}$$

단,

LEV : Level

RT : Rate

FPT : 單位時間當比率

GL : 目標值

DISC : 目標值와 Level의 差

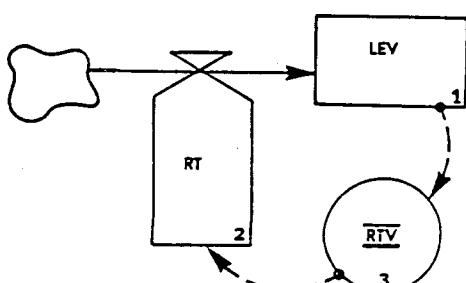
(圖 2-4) 負의피드백 Flow Diagram

단,

GL : 目標值 또는 成長限界值

3) 正의피드백 · 루프와 負의피드백 · 루프가 混合된 루프의 成長構造

이것은 Sigmoid 成長 또는 S 字型 成長形態로서 알려진 것으로 指數型 成長(正의피드백)과 減近型 成長(負의피드백)을 組合한 舉動의一般的形態이다. 이의 基本 成長構造를 Flow Diagram으로 나타내면 (圖 2-5)와 같다.



$$\text{LEV.K} = \text{LEV.J} + (\text{DT})(\text{RT.JK})$$

$$\text{RT.KL} = \text{RTV.K}$$

$$\text{RTV.K} = \text{TABLE}(\text{RTT}, \text{LEV.K})$$

단,

RTV : Table 함수

RT : Rate 値

(圖 2-5) Sigmoid 成長의 Flow Diagram

Sigmoid 成長의 構造는 式 (2.6) 과 같이 解析的으로 表現할 수 있다.<sup>3)</sup>

$$P(t) = \frac{GL}{1 + \{[GL/P(0)] - 1\} \cdot \exp(-const \cdot t)} \quad \dots \dots \dots (2.6)$$

上述한 式 (2.4), (2.5), (2.6) 을 바탕으로 해서 YSIM에서는 各 變數의 代數的 變化를豫測한다. 이때 모델의 一般化를 위해 初期值는 모두 1로 한다.

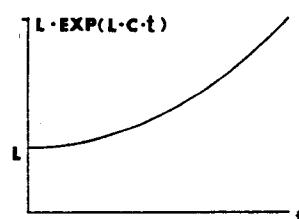
i) 正의피드백 成長

$$P(t) = \alpha \cdot P(0) \cdot \exp(L \cdot C \cdot t) \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

단,  $\alpha = 1$ : 增加型,  $\alpha = -1$ : 減少型,

$$P(0) = L$$

式 (2.7) 的 一般的形態는 (圖 2-6) 과 같다.



(圖 2-6) 正의피드백 · 루프의 一般的成長形態

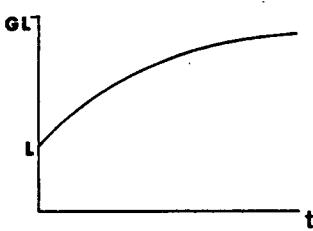
ii) 負의피드백 · 루프 成長

· 增加

$$P(t) = GL + [P(0) - GL] \cdot \exp(L \cdot -C \cdot t) \quad \dots \dots \dots (2.8)$$

( 단,  $P(0) = L$  )

式 (2.8) 的 一般的形態은, (圖 2-7) 과 같다.



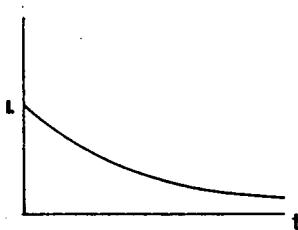
(圖 2-7) 負의피드백·루프一般的成長形態(增加型)

減少

$$P(t) = P(0) \cdot \exp(L - C \cdot t) \quad \dots \dots \dots (2.9)$$

(단,  $P(0) = L$ )

式 (2.9) 的一般的形態은, (圖 2-8)과 같다.



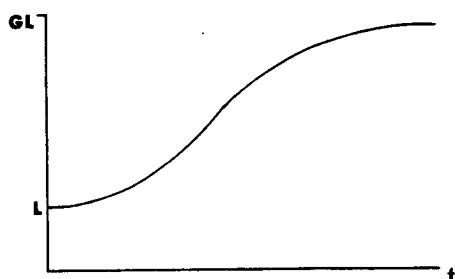
(圖 2-8) 負의피드백·루프의一般的成長形態(減少型)

iii) Sigmoid

$$P(t) = \frac{GL}{1 + \{[GL/(P(0))] - 1\} \cdot \exp(L \cdot C \cdot t)} \quad \dots \dots \dots (2.10)$$

(단,  $C < 0$  :增加型,  $C > 0$  :減少型,  
 $P(0) = 0$ )

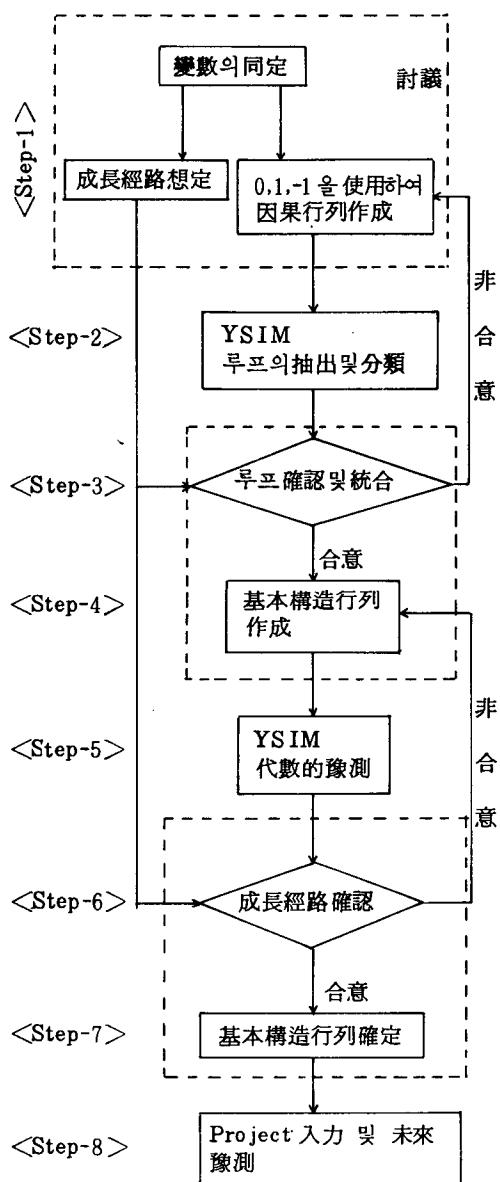
式 (2.10) 的一般的形態는, (圖 2-9)와 같다.



(圖 2-9) Sigmoid 成長의一般的形態

#### 4. YSIM의順序

YSIM에 의해 모델을開發하는 것은 (圖 2-10)과 같이 8段階에 의한다.



(圖 2-10) YSIM의適用基本順序

例를 들면서 上記順序를 각段階別로記述하면 다음과 같다.

**Step 1 : 變數의 同定, 成長 經路 想定 및 因果行列 作成**

1) 變數의 同定 : 變數의 同定은 YSIM 의 使用 目的에 따라 다르다.

① 大規模 모델 開發의 基本으로서 YSIM 을 使用할 때 : 使用者가 變數를 同定한다.

② 모델에 대한 教育的 的으로 使用할 때 : 計論에 의해 同定하던가 미리부터 準備한 變數를 提示한다.

2) 成長 經路 想定 : 成長 經路의 想定에 대해서는 각 變數別로 다음 事項을 생각한다.

① 各變數는 增加할 것인가 減少하여 잘 것인가.

② 各變數의 成長에는 限界가 있는 것인가.

③ 各變數 成長 曲線의 기울기는 어떻게 될까?

④ 上記 ①②, ③에 對한 想定이 不可能 한 變數에 대해서는 判斷을 保留한다.

3) 因果行列 作成 : 피드백 構造 分數의 基本이 되는 因果行列은 다음과 같이 作成한다.

① 行의 變數와 列의 變數에 影響을 주지 않는 경우 : 0

② 行의 變數가 列의 變數에 影響을 주고 이 影響을 받은 變數의 成長 方向(增加 또는 減少)이 行의 變數와 같은 경우 : + 1

③ ②의 成長 方向이 反對인 경우 : - 1

• 例 : <表 2-1>이 이 段階에서 作成된 因果行列이다.

**Step 2 : 루프의 抽出 및 分類**

① 루프의 抽出 : Matrix Tracing 法에 의함.

• 例 : <表 2-1>의 因果行列에 대한 피드백 · 루프 抽出을 한 結果 가 <表 2-2>이다. 여기에는 4 個의 루프가 抽出되었다.

② 루프의 分類 : 루프 分類 作業은 다음과 같은 것에 대해 행한다.

i) 各 루프를 構成하고 있는 變數의 内容

<表 2-2> 抽出된 루프 一覽表

루프 番號	루프타이프	構成變數의數	構成變數
L-1	負	3	B E A
L-2	負	4	B D E A
L-3	正	4	B C E A
L-4	正	5	B D C E A

ii) 各 루프를 構成하고 있는 變數의 内容과 피드백 · 루프의 性格 比較

iii) 各 變數에 關係되는 피드백 · 루프의 性格(正 · 負 · 피드백 · 루프)과 變數의 構成

• 例 : 위의 例에서 各 變數에 關係되는 피드백 · 루프는 表 2-3 과 같다.

<表 2-3>各變數에 關係되는 피드백 · 루프

變數	直接影響을 주는 變數	關係하는 피드백 · 루프	
		正	負
A	E	L-3, L-4	L-1, L-2
B	A	L-3, L-4	L-1, L-2
C	B	L-3	
	D	L-4	
D	B	L-4	L-2
E	B	L-4	L-2
	C	L-3, L-4	
	D		L-2

**Step 3 : 피드백 · 루프의 確認 및 統合**

1) 피드백 · 루프의 確認 : 피드백 · 루프의 確認에서 가장 重要한 것은 Step 1-2)에서 想定한 各 變數의 成長 經路와 各 變數에 關係하는 피드백 · 루프를 比較하는 것이다. 그러나 이 段階에서는 成長의 Slope는 考慮치 않고, 各 變數의 成長에 限界가 있는 것인지의 如否와 함께, 各 變數에 關係하는 피드백 · 루프의 性格(正 혹은 負)에 確認의 重點을 둔다. 즉 어느 變數의 成長 經路가 限界 없는 것으로 想定되었다면, 그 變數에 關係하는 모든 피드백 · 루프는 正의 피드백 · 루프이어야 한다. 또 限界가 있는 것으로 想定된 것이라면 그 變數

에 關係하는 모든 피드백 · 루프가 負의 피드백 · 루프 혹은 負와 正이 混合되어 있어야 한다.

피드백 · 루프를 確認한 結果가 想定한 것과 맞으면 다음 段階로 넘어가나, 그렇지 않으면 Step 1-3) 으로 가서 因果行列을 修正한다.

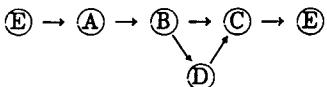
2) 루프의 統合: 한개의 變數에 關係하는 루프가 2以上인 경우, 變數와 變數 間의 關係도 重複되어 나타나는 것도 있다. 따라서, 루프 上에서 變數가 重複되지 않게 각 分類別로 루프를 統合한다.

- 例: 變數 E에 關한 未來를 豫測하는 것을 例로 들면 다음과 같다. <表 2-3>에서 變數 E를 中心으로 보면 <表 2-4>와 같다.

<表 2-4> 變數 E에 關係되는 루프

變數 E에 影響을 주는 變數	該當하는 루프	
	正의루프	負의루프
B 그 름		L-1
C 그 름	L-3, L-4	
D 그 름		L-2

여기서 性格이 같은 루프 L-3과 L-4를 統合하면 (圖 2-10) 과 같이 된다.



(圖 2-10) 統合된 루프 (L-3, L-4)

Step 4: 基本 構造 行列의 作成: 確定한 因果行列에 影響의 強度 (-3 ~ +3의 整數)를 주어 基本 構造 行列을 作成한다. 이때 因果行列에서 定한 符號는 바꿀 수 없다.

- 例: <表 2-1>의 因果行列에 影響의 強度를 주어 만든 構造 行列이 <表 2-5>이다.

Step 5: 代數的 豫測: 代數的 豫測은 다음과 같은 順序로 행한다.

- 影響의 強度 正規化: 基本 構造 行列의

<表 2-5> 基本 構造 行列

	A	B	C	D	E
A	0	+2	0	0	0
B	0	0	-2	-1	+2
C	0	0	0	0	+1
D	0	0	+2	0	-3
E	-1	0	0	0	0

變數間 影響의 強度를 다음과 같이 正規화한다.

① 한개의 變數가 最大의 成長을 하기 為해서는 그自身과 다른 모든 變數로부터 最大의 影響, 즉 3의 影響을 받는 것이다. 따라서 最強의 影響은 強度의 合計가 되고 本 例에서는 15이다.

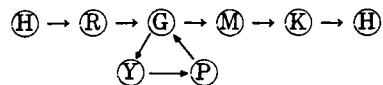
② 變數間 影響의 強度를 最強의 強度로 나눈다.

- 例: <表 2-5>의 基本 構造 行列을 正規한 것이 <表 2-6>이다.

<表 2-6> 正規化한 基本 構造 行列

	A	B	C	D	E
A	0	+0.13	0	0	0
B	0	0	-0.13	-0.07	+0.13
C	0	0	0	0	+0.07
D	0	0	+0.13	0	-0.2
E	-0.07	0	0	0	0

2) Sub-Loop 를 構成하는 變數에 대해 初期值를 變換한다.: 本 例에서는 나타나지 않으나 루프 統合의 結果(圖 2-11)과 같이 Sub-Loop 가 構成되는 경우가 있다.



(圖 2-11) Sub-Loop 가 構成되는 루프 統合結果

(圖 2-11)에서 變數 G, Y, P 가 Sub-Loop 를 構成한 例가 되며, 이에 對해서는 다음과 같이 Causal Analysis의 한 方法을 써서 初期值를 變換하도록 한다.<sup>6)</sup>

- 例 : 變數 G 的 初期值 變換

$$\text{NINV}(G) = \{ [\text{INV}(G) * E(g,y) + \text{INV}(y)] * E(y,p) + \text{INV}(P) \} * E(p,g) + \text{INV}(G)$$

단,

$\text{NINV}(G)$  : 變數의 새로운 初期值

$\text{INV}(*)$  : 變數 \* 的 初期值

$E(i,j)$  : 變數 i 로부터 j 에의 正規化된 影響의 強度

3) 統合한 루프의 行列化 : 統合한 루프를 각 그룹(Group)別로 變數間 影響關係를 行列로 表現한다.

- 例 : 變數 E의 未來變化를 豫測하는 경우 <表 2-4>에 나타난 것처럼 3 개 그룹의 피드백 · 루프가 있다. (그룹 1 은 L-1, 그룹 2 는 L-3 과 L-4 가 統合된 것, 그룹 3 은 L-2). 統合된 그룹 2 를 行列로 表示하면 <表 2-7>이 된다.

<表 2-7> 統合된 루프의 行列化(그룹 2)

初期值( $X_j$ )	1	1	1	1	1
E	A	B	D	C	
E	0	-0.07	0	0	0
A	0	0	+0.13	0	0
B	0	0	0	-0.07	-0.13
D	0	0	0	0	+0.13
C	+0.07	0	0	0	0

또 統合이 必要없는 그룹 1 과 그룹 3 을 行列로 나타낸 것이 <表 2-8>과 <表 2-9>이다.

<表 2-8> 그룹 1의 行列化

初期值( $X_i$ )	1	1	1
E	A	B	
E	0	-0.07	0
A	0	0	+0.13
B	+0.13	0	0

<表 2-9> 그룹 3의 行列化

初期值( $X_j$ )	1	'1	1	1
E	A	B	D	
E	0	-0.07	0	0
A	0	0	+0.13	0
B	0	0	0	-0.07
D	-0.2	0	0	0

4) 常數의 計算 : 式 (2.7), (2.8), (2.9), (2.10)에 있어서 常數 (C)는 다음과 같은 順序로 定한다.

① 變數의 區分 : 因果行列로부터 피드백

· 루프를 分類하여, 各 變數의 未來變化를 豫測하는 경우, 한개의 變數에 多數의 루프가 關係한다. 만약 모든 變數에 對해 이를 루프를 使用해서 豫測하면, 明確한 變數間의 關係도 暖昧하게 된다. 따라서, 變數間의 關係가 아주 明確한 變數, 즉 단 한개의 變數로부터 影響을 받는 變數는 定義變數로 한다. 定義變數의 常數는, 定義變數에 影響을 주는 變數(一般變數 또는 그 외의 定義變數)의 常數를 使用해서 計算한다.

② 一般變數(影響을 받는 變數의 數가 2以上인 變數)의 常數 計算

$$P = \sum_z (\sum_j (a_{ij} \text{의 正項의 值} * X_j)) \quad (2.11)$$

$$M = \sum_z (\sum_j |a_{ij} \text{의 負項의 值} * X_j|) \quad (2.12)$$

단,

$X_j$  : 變數의 初期值

$a_{ij}$  : 變數 i 로부터 變數 j 에의 影響의 強度

$z$  : 루프의 그룹 數

ii) P 과 M의 平均值

$$\bar{P} = P \div Z, \bar{M} = M \div Z$$

③ 常數 ( $C$ ) =  $\bar{P} - \bar{M}$

④ 定義變數의 常數는 다음과 같이 計算한다.

i) 定義變數의 定義順序 : 定義變數間에서는 影響을 주는 變數부터 먼저 定義하여 간다.

- 例 : 上記 定義變數의 定義順序는 A, B, D 順이다.

### ii) 常數計算法

$$\text{定義變數의 常數} = \frac{\text{當該影響의 強度}}{\text{影響强度의 最大值}} \quad \dots \dots \dots \quad (2.13)$$

- 例 : 例로 들어 變數 E의 常數는

$$\begin{aligned} P = 0.93, M = 0.68, z = 3 \text{이므로} \\ \text{常數 (C)} &= (0.93 - 0.68) / 3 \\ &= 0.083 \end{aligned}$$

- 例 : 定義變數 A는, 變數 E로부터 -1의 影響을 받으므로, 그 常數는
- $$\begin{aligned} \text{常數 (C)} &= 0.08 * (-1/3) \\ &= (-0.0277) \end{aligned}$$

### 5) 增加·減少 變數의 判定

① 一般變數 : 만약  $\bar{M} > \bar{P}$  이면 減少하는 變數,  $\bar{P} > \bar{M}$  이면 增加하는 變數이다.

② 定義變數 : 定義하는 變數의 成長型과 因果行列에서의 符號에 의한다.

- 例 : 變數 E는 增加變數, 變數 A는 減少變數이다.

6) 數式의 適用 : 各 變數의 未來豫測式의 適用은 다음과 같이 各 變數가 갖는 피드백·루프의 構成內容에 따른다.

i) 正의 피드백 構造 : 어느 變數에 關係되는 모든 피드백·루프가 正인 경우 式 (2.7) 을 適用한다.

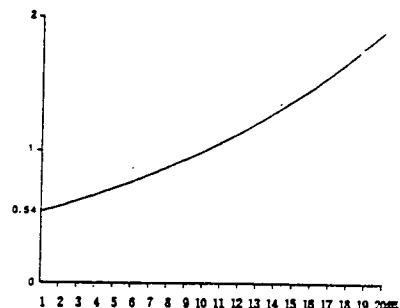
ii) 負의 피드백 構造 : 어느 變數에 關係되는 피드백·루프가 모두 負인 경우 式 (2.8) 혹은 式 (2.9) 를 適用한다.

iii) Sigmoid 型의 構造 : 어느 變數에 關係되는 피드백·루프가 正과 負가 混合되어 있는 경우 式 (2.10) 을 適用한다.

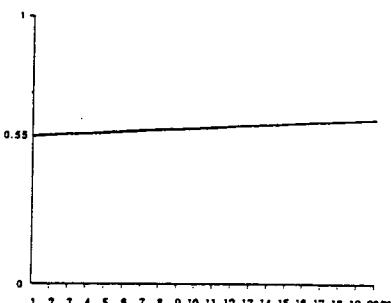
Step 6 : 成長 經路 確認

Step 5에서 定하여진 式으로 今後 10 ~ 20

年間의 變化를豫測하여, 그 結果를 그라프로 그린다. 이 結果를 Step 1에서 想定한 各 變數의 成長 經路와適合한가를 체크하여, 만약 必要하다면 Step 4로 돌아가서 基本 構造 行列에 대한 修正을 加한다. <表 2-10>은 各 變數의 今後 20 年間 成長 經路를 나타내는 數值이며, (圖 2-12), (圖 2-13)은 變數 C와 E의 成長 經路를 그라프로 나타낸 것이다. 또 1期에의 豫測值에 實시스템의 數值을 주어, 이 두개의 數字比率을 豫測值에 곱해서 豫測值를 實數로 表할 수 있다. 1期에 各 變數의 實數를 <表 2-11>에 根據하여 豫測한 것이 <表 2-11>의 實數列이다.



(圖 2-12) 變數 C의 成長經路



(圖 2-13) 變數 E의 成長經路

<表 2-10> 各變數에 주어진 實數

變數	A	B	C	D	E
實數值	1,500	1,000	500	700	300

&lt;表 2-11&gt;基本構造行列에 의한 未來變化豫測

YEAR	變數 A		變數 B		變數 C	
	基本	實數	基本	實數	基本	實數
1	0.339	1500.0	0.500	1000.0	0.637	500.0
2	0.398	1496.0	0.499	999.4	0.676	530.9
3	0.397	1492.0	0.499	998.8	0.718	563.7
4	0.396	1488.0	0.499	998.2	0.763	598.6
5	0.395	1484.0	0.499	997.6	0.810	635.6
6	0.394	1480.0	0.498	997.0	0.860	674.9
7	0.393	1476.0	0.498	996.4	0.913	716.7
8	0.391	1472.0	0.498	995.8	0.970	761.0
9	0.390	1468.1	0.497	995.3	1.030	808.0
10	0.389	1464.1	0.497	994.7	1.093	858.0
11	0.388	1460.1	0.497	994.1	1.161	911.1
12	0.387	1456.1	0.496	993.5	1.233	967.4
13	0.386	1452.2	0.496	992.9	1.309	1027.2
14	0.385	1448.2	0.496	992.3	1.390	1090.7
15	0.384	1444.3	0.496	991.7	1.476	1158.2
16	0.383	1440.3	0.495	991.1	1.567	1229.8
17	0.382	1436.4	0.495	990.5	1.664	1305.8
18	0.381	1432.4	0.495	989.9	1.767	1386.6
19	0.380	1428.5	0.494	989.3	1.876	1472.3
20	0.379	1424.6	0.494	988.7	1.992	1563.4

YEAR	變數 D		變數 E	
	基本	實數	基本	實數
1	0.300	700.0	0.603	300.0
2	0.300	700.1	0.606	301.6
3	0.300	700.2	0.610	303.2
4	0.300	700.3	0.613	304.7
5	0.300	700.4	0.616	306.3
6	0.300	700.5	0.619	307.9
7	0.300	700.6	0.622	309.4
8	0.300	700.7	0.625	311.0
9	0.300	700.8	0.628	312.5
10	0.300	700.9	0.632	314.1
11	0.300	701.0	0.635	315.6
12	0.300	701.1	0.638	317.2
13	0.301	701.2	0.641	318.7
14	0.301	701.3	0.644	320.2
15	0.301	701.4	0.647	321.7
16	0.301	701.5	0.650	323.3
17	0.301	701.5	0.653	324.8
18	0.301	701.6	0.656	326.3
19	0.301	701.7	0.659	327.7
20	0.301	701.8	0.662	329.2

表에서 “基本”은 基本構造行列에 의한豫測이다.

Step 7 : 基本構造行列 確定

Step 6에서 比較한 成長 경로가 肯定 可能

한 것인 경우는 Step 4에서 만든 行列을 基本構造行列로 確定한다.

#### Step 8 : 計劃 入力 및 未來豫測

基本構造行列에 의한 未來變化豫測은,一般的인 形態라고 할 수 있다. 즉, 地域開發의 觀點에서 보면 基本構造行列에 의한 未來變化는 特定의 地域開發計劃의 實現에 따른變化가 아니고 國家 GNP成長에 따른 趨勢的 成長이다. 따라서 研究對象이 되어 있는 시스템에 計劃에 따른 改善을 附加할 때에는 이것을 入力하여 未來를豫測할 必要가 있다. Project를 入力하여 그 效果를豫測하는 方法은 다음과 같다.

① Project 入力 方法 : 當該變數의 初期值에 上昇 또는 改善시키는 程度를 加算한다.

##### • Project 入力 方法의 例

i) Project를 入力할 變數와 規模를 定한다. 本例에서는 變數 B를 20% 改善시키는 Project를 入力한다.

ii) 基本構造行列에서 變數 B의 初期值가 1이므로 初期值를 1.2로 한다.

② 새로운 初期值를 使用해서 Step 5의 方法으로 未來變化를豫測한다.

### III. YSIM의 評價

YSIM을 評價하기 為해서 既開發된 모델에 대한 未來豫測과 YSIM에 의한 未來豫測을 해서 이 2個結果를 比較하도록 했다. 筆者の論文을 一部二部로 나누어져, 一部에서는 SD 모델이 開發되어 있는 바, 이를 利用 YSIM을 評價하였다. YSIM評價基準이 된 SD모델은 RESCH라고 命名된 것으로 約 400個의 變數로 構成되어 있으며, 1984年, 1985年 UNCRD(國連地域開發센타)에서 使用하면서 그 有效性를 認定받은 것이다.

#### 1. 變數의 選定

RESCH의 九個部門, 約 400個의 變數中에서 다음과 같은 12個의 變數를 選擇해서 RESCH를 表現하도록 했다. 이들 變數는 RES

CH에서의 未來豫測結果를 綜合的으로 나타내는 變數로 어떤 것은 RESCH中 몇개로 區分되어 있으며 다음과 같은 内容이다.

- ① 都市基盤施設 (INF) : RESCH 에서는  
 i) 上水道, ii) 電話率, iii) 道路의 延長 및  
 그 鋪裝率 等으로 區分되어 있음.

- ## ② 教育水準 (EDL) : RESCH 에서도 單一變數

- ③ 生產性 (PRO) : RESCH에서는 i) 農業生産性, ii) 工業生産性 等으로 區分되어 있음

- ④ 生產資本 (CAP) : RESCH에서는

  - i) 農業 : 耕地面積, 養魚場面積, 家畜의 數
  - ii) 鎳工業 : 鎳山의 數, 工場의 數 等으로 區分되어 有る

- ⑤ 生產量 (VAD) : RESCH 에서는 第 1·  
2·3 次產業의 附加價值額 等으로 區分되어 있  
음.

- ⑥所得(YIL) : 世帯當所得으로써 RE-SCH에서도 單一變數

- ⑦ 社會 (SOS) : RESCH에서는  
 i) 住宅供給率, ii) 學生數에 대한 學校의 數,  
 iii) 學生·教師의 比, iv) 醫師·住民의 比,  
 v) 病院에의 接近性 等으로 區分되어 있음

- ⑧ 環境汚染 (POL) : RESCH 에서는  
i) 水質汚染, ii) 大氣汚染 等으로 區分되어  
있음.

- ## ⑨ 人口(POP) : RESCH에서도 單一變數

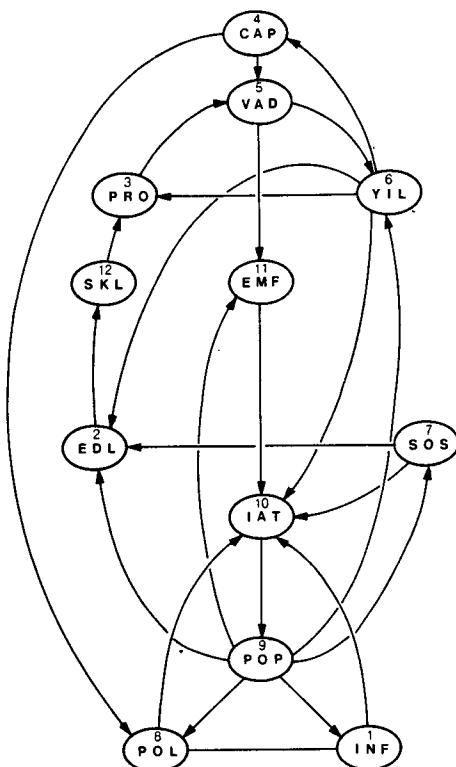
- ⑩ 地域의 吸引率 (IAT) : RESCH에서  
도 單一變數

⑪ 就業率 (EMP) : RESCH에서도 單一

- ⑫ 技術水準 (SKL) : RESCH 에서도 i) 農業技術水準, ii) 工業技術水準으로 구분되어 있음.

## 2. YSIM에 의한豫測

RESCH에서는 上記 變數가 (圖 2-14) 와 같  
이 権成되어 있다



(圖 2-14) RESCH 로부터 選擇된 變數間의  
因果關係構造

(圖 2-14)를 因果行列로 表示하면 表 2-12 이 된다. YSIM에서는 圖 2-14를 作成하지 않아도 된다.

<表 2-12> RESCH 變數의 因果行列

<表 2-12>을 Matrix-Tracing 法에 의해  
루프를抽出한 結果가 <表 2-13>이다.

&lt;表 2-13&gt; 피드백·루프

루프 番號	루프 性格	構成變 數의數	構成變數
1	負	3	10 9 1
2	正	3	9 7 2
3	正	3	9 6 2
4	正	3	5 6 3
5	正	3	5 6 4
6	負	3	10 9 6
7	負	3	10 9 7
8	負	3	10 9 8
9	負	3	11 10 9
10	正	4	8 10 9 1
11	正	5	12 3 5 6 2
12	正	5	8 10 9 6 4
13	負	6	5 11 10 9 6 3
14	負	6	5 11 10 9 6 4
15	負	8	12 3 5 11 10 9 7 2
16	負	8	12 3 5 11 10 9 6 2
17	負	8	12 3 5 6 10 9 7 2
18	正	10	12 3 5 6 4 8 10 9 7 2

<表 2-13>의 루프를 각 變數에 關係되는  
루프別로 分類한 것이 <表 2-14>이다.

&lt;表 2-14&gt; 各變數에 關係되는 루프

變數 番號	影響을 주는變數	該當하는 루프
1	9	L-1, L-10,
2	6	L-3, L-11, L-16,
	7	L-2, L-15, L-17, L-18
3	6	L-4, L-13,
	12	L-11, L-15, L-16, L-17, L-18,
4	6	L-5, L-12, L-14, L-18
5	3	L-4, L-11, L-13, L-15, L-16,
	4	L-17, L-18, L-5, L-14,
6	5	L-4, L-5, L-11, L-17, L-18,
	9	L-3, L-6, L-12, L-13, L-14, L-16,
7	9	L-2, L-7, L-15, L-17, L-18,

8	1	L-10,
	4	L-12, L-18,
	9	L-8
9	2	L-2, L-3,
	10	L-1, L-6, L-7, L-8, L-9, L-10, L-12, L-13, L-14, L-15, L-16, L-17, L-18
10	1	L-1,
	6	L-6, L-17,
	7	L-7,
	8	L-8, L-10, L-12, L-18,
	11	L-9, L-13, L-14, L-15, L-16,
11	5	L-13, L-14, L-15, L-16,
	9	L-9,
12	2	L-11, L-15, L-16, L-17, L-18,

<表 2-12>의 因果行列에 影響의 強度를  
주어 만든 基本 構造 行列이 <表 2-15>이다.

&lt;表 2-15&gt; 基本構造行列

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	1
3	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	3	0	0	-2	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	0
6	0	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	-1	0	0	0	0	-3	-3	-3	0	0	-3	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

이 基本 構造 行列을 使用해서 앞에서 말한  
방법으로 각 變數에 對한 變化를 豫測하였다.  
단, 이 評價를 위해서는 각 變數의 初期值을  
<表 2-16>처럼 RESCH에서 쓴 것과 같은  
內容으로 하였다.

&lt;表 2-16&gt; 各變數의 初期水準

變數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
初期 水準	0.4	0.7	0.55	0.6	0.55	0.6	0.35	0.5	0.6	0.4	0.5	0.3

### 3. RESCH와 YSIM의 比較

YSIM의 有效性을 評價하기 위하여 여기서 YSIM과 類似한 目的 - 즉, 모델을 보다 簡單히 作成하기 위해 開發된 方法들과 함께 未來를 豫測하여 본다.

比較를 위해 導入된 方法은 KSIM(Kane's SIMulation), SPIN(SParse matrix Version ·6 INsomnia) 등이다. 이 두개의 方法도 基本構造行列을 사용하나 適用하는 數式, 시스템에 대한 생각에서 YSIM과 相異하다<sup>7)</sup> 따라서 基本構造行列은 共通의 것을 使用했다. 또 3個의 結果를 比較하기 위해 YSIM, KSIM, SPIN의 豫測初期值를 RESCH 初期值에 맞춰, 初期值에서의 比率을 각各變動에 順한 뒤 今後 20年間의 豫測值 乖離度를 式(2.20)의 平均絕對誤差(MAPE)를 써서 구한 것이 <表 2-17>이다.

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{|X(t) - \bar{X}(t)|}{X(t)} \times 100 \quad \dots \quad (2.20)$$

MAPE : 平均絕對誤差

$X(t)$  : t期의 變數 X의 RESCH結果

$\bar{X}(t)$  : t期의 變數 X의 各모델化 方法의

結果

T : 推定期間

<表 2-17> 變數別 모델의 誤差

	YSIM	KSIM	SPIN
1. 都市基盤施設(INF)	9.0	82.6	57.2
2. 教育水準(EDL)	4.6	77.9	25.9
3. 生産性(PRO)	1.5	11.2	29.8
4. 生産資本(CAP)	1.6	16.1	24.0
5. 生産量(VAD)	2.6	17.9	32.5
6. 所得(YIL)	7.5	10.1	47.3
7. 社會서비스(SOS)	5.3	127.4	147.1
8. 環境汚染(POL)	9.8	54.3	50.4
9. 人口(POP)	4.1	88.6	22.5
10. 地域의吸引力(IAT)	37.8	26.6	46.9
11. 就業率(EMP)	9.4	19.6	46.8
12. 技術水準(SKL)	10.3	20.1	35.0

上記 <表 2-17>을 보면 YSIM이 다른 方法보다 월선 誤差가 작고, MAPE의 크기도 通常 모델의 有效性 判斷 基準이 되는 10%를 넘는 것이 한개 밖에 없음으로 充分히 使用可能한 것으로 認定되었다. (地域의 吸引力은 이 12個變數로는 算定되기 힘든 것으로 판단되었음).

### 4. 結

YSIM에서 因果行列를 作成하고 이에 影響의 強度를 주어 基本構造行列을 作成하는以外의 모든 作業은 Computer Program化되어 있다. (使用이 便利하도록 Personal Computer를 基本으로 Program化되어 있음).

또 現在까지 밝혀진 YSIM의 短點은 피드백·루프를 分類하기 위한 Computer 所要時間이 變數의 個數가 많아지면 길어진다는 것이라고 할 수 있다.

### 参考文献

- 1) M.R. Goodman著, 蒲生叡輝·外譯, システム・ダイナミクス・ノート, マグロウヒル好學社, 1981.
- 2) Forrester J.W., World Dynamics, Wright Allen, Cambridge Mass., 1971
- 3) McLean, M., Techniques for Analysis of Systems Structure, SPRU Occasional Paper Series No.1, University of Sussex, England, 1976
- 4) 1)과同一
- 5) Heise D.R., Causal Analysis, John Wiley to Sons, 1975
- 6) 4)와同一

## 註 1. 正의 피드백 構造

$$\frac{LEV \cdot K - LEV \cdot J}{DT} = RT \cdot JK$$

DT 을 한없이 0에 가깝게 하면

$$\frac{dLEV(t)}{dt} = RT(t)$$

$RT(t) = CONST * LEV(t)$  이것을 上式  
에 대입하면

$$\frac{dLEV(t)}{dt} = CONST * LEV(t)$$

變數를 나누어서, 兩邊을 積分하면,

$$\int \frac{LEV(t)}{LEV(0)} \frac{dLEV(\tau)}{LEV(\tau)} = \int_0^t CONST * d\tau$$

(  $\tau$  는 dummy 變數 )

$$\ln \frac{LEV(t)}{LEV(0)} = CONST * t$$

$$LEV(t) = LEV(0) \exp(CONST * t)$$

## 註 2. 負의 피드백

$$LEV \cdot K = LEV \cdot J + (DT)(RT \cdot JK)$$

$$RT \cdot KL = FPT * DISC \cdot K$$

$$DISC \cdot K = M - LEV \cdot K$$

$$\frac{LEV \cdot K - LEV \cdot J}{DT} = FPT(M - LEV \cdot K)$$

$$\frac{dLEV(t)}{dt} = FPT(GL - LEV(t))$$

變數分離에 따라

$$\frac{dLEV(t)}{GL - LEV(t)} = FPT * dt$$

兩邊을 時間 0부터  $t$ 에 대해 積分하면

$$\int \frac{LEV(t)}{LEV(0)} \frac{dLEV(\tau)}{M - LEV(\tau)} = \int_0^t FPT * d\tau$$

(  $\tau$  는 dummy 變數 )

$$\ln [M - LEV(\tau)] \Big|_0^t = FPT * \tau \Big|_0^t$$

$$\ln [M - LEV(t) / M - LEV(0)] = -FPT * t$$

兩邊의 逆對數를 없애면

$$\frac{M - LEV(t)}{M - LEV(0)} = \exp(-FPT * t)$$

整理하면

$$GL - LEV(t) = [M - LEV(0)] \exp(-FPT * t)$$

$$LEV(t) = M - [M - LEV(0)] \exp(-FPT * t)$$

즉

$$LEV(t) = M + [LEV(0) - M] \exp(-FPT * t)$$

## 註 3. S 字型의 成長構造

$$LEV \cdot K = LEV \cdot J + (DT)(RT \cdot JK)$$

$$RT \cdot KL = RTV \cdot K$$

$$RTV \cdot K = TABLE(RTT, LEV, K)$$

만약 M을 LEV의 限界值로 하면

$$0 < LEV(t) < M$$

$$\frac{LEV(t) - LEV(0)}{DT} = RT \cdot LEV(t) \left[ 1 - \frac{LEV(t)}{M} \right]$$

$$\frac{dLEV(t)}{dt} = RT \cdot LEV(t) \left[ 1 - \frac{LEV(t)}{M} \right]$$

$$\int \frac{Mdy}{y(M-y)} = \int kdt + c$$

$$\int \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right) dy = \int kdt + c$$

$$\left( \therefore \frac{M}{y(M-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{(M-y)} \right)$$

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{dy}{M-y} = \int kdt + c$$

$$\ln y - \ln(M-y) = kt + c$$

$$\ln\left(\frac{y}{M-y}\right) = kt + c$$

$$\frac{y}{M-y} = \exp(kt + c)$$

$$\frac{y}{M-y} = \exp(kt+c)$$

逆數를 취하면

$$\frac{M-y}{y} = \exp(-kt-c)$$

$$\frac{M-y}{y} = \exp(-c) \exp(-kt)$$

簡單히 하기 위해  $LEV(t) = y$ ,  $RT = k$  라고 하면, 上式은

$$\frac{dy}{dt} = ky \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

變數分離에 의해

$$\frac{dy}{y[1-(y/M)]} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y[1-(y/M)]} = \int kdt + c$$

$\exp(-c) = a$ 로 하면

$$\frac{M-y}{y} = a \cdot \exp(-kt)$$

$$M-y = a \cdot \exp(-kt) \cdot y$$

$$M = (1+a \cdot \exp(-kt))y$$

$$\therefore y = \frac{M}{1+a \cdot \exp(-kt)}$$

$$LEV(t) = \frac{M}{1+a \cdot \exp(-RT \cdot t)}$$

$$p(t) = \frac{M}{1+(M/p(0)-1) * \exp(-const*t)}$$

本論文은 筆者の 博士學位(1987年4月, 日本 づくば大學)論文의一部分을要約한 것입니다.