탄성-소성파괴 매개변수와 크리이프파괴 매개변수에 관하여*

李 康 鏞
연세대학교 기계공학과 교수

1. 머리 말

최근 저자는 혼합모우드에 대한 Budiansky 와 Rice 의 J_k 적분에 모순이 있음을 지적한 바 있다[1]. 그러나 Kishimoto 등[2]은 파괴진행영역을 고려한 경로 독립적분 $\hat{J}$을 제시하여 주목을 끌고있다. Landes등[3]은 Rice 의 J 적분을 정상상태크리이프에까지 연장 적용하기 위한 C^*적분을 소개하였다. 그후 크리이프파괴에 대한 매개변수로서 Liu 등에 의한 C_{gk}^*[4], Brust 등에 의한 $\dot{T}_k^*$등[5]이 소개되어 계속 연구중이다. 여기에서는 이러한 매개변수들에 대해 개괄적으로 서술하고자 한다.

2. 탄성-소성파괴 매개변수

2.1 J_k 적분의 모순

Rice 의 J 적분은 다음의 J_k 적분의 첫번째 성분이다.

$$J_k = \int_\Gamma (W n_k - t_i u_{i,k})\, d\Gamma \qquad (1)$$

여기에서 Γ은 그림 1에서 보는 바와 같이 X_1, X_2 평면에서 균열선단을 에워싼 곡선, W는 변형율 에너지 밀도, t_i는 Γ상에서 외부로 작용하는 응력벡터, $\bar{n}$는 Γ에 수직한 외부로 향하는 단위벡터, u_i는 변위벡터, $d\Gamma$는 Γ상의 작은 요소이다. 식(1)에 혼합형(mixed mode Ⅰ, Ⅱ) 균열선단 가까이의 응력장 방정식을 대입하여 정리하면, 평면변형율 상태에서 다음식이 얻어진다.

$$J_1 = [(1-\nu^2)/E](K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2)$$
$$J_2 = -[2(1-\nu^2)/E]K_{\mathrm{I}} K_{\mathrm{II}} \qquad (2)$$

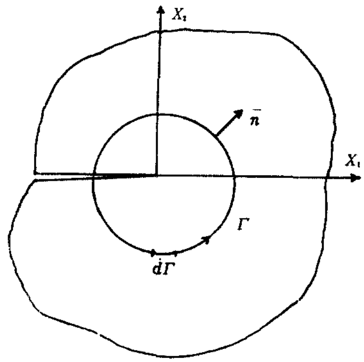

그림 1 Rice J 적분의 경로

여기에서 K_{I}과 K_{II}는 모우드 Ⅰ과 모우드 Ⅱ의 응력세기계수이고 ν와 E는 프와송 比와 탄성계수이다. 균열발생 방향으로 합벡터의 크기는 식(2)로부터 다음식으로 얻어진다.

$$J = [(1-\nu^2)/E]\{K_{\mathrm{I}}^4 + 6K_{\mathrm{I}}^2 K_{\mathrm{II}}^2 + K_{\mathrm{II}}^4\}^{1/2} \qquad (3)$$

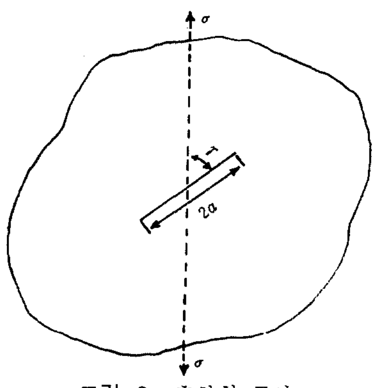

그림 2 혼합형 균열

* 이 글은 '87년도 본 학회 재료 및 파괴부문 학술강연회(3.21)에서 강연한 내용임.

그림 2에서 보는 바와 같이 균열길이 $2a$를 가지는 두한평판에 균열평면에 γ 각도를 가지고 응력 σ가 작용하는 경우에 응력세기 계수는 다음과 같다.

$$K_{\rm I}=\sigma\sqrt{\pi a}\ \sin^2\gamma \tag{4}$$
$$K_{\rm II}=\sigma\sqrt{\pi a}\ \sin\gamma\ \cos\gamma$$

식(4)를 식 (3)에 대입하면 그림 3에서 보는 바와 같이 $\gamma=90°$에서가 아니고 $\gamma=70.665°$에서 J는 최대가 된다. 이러한 결과는 기대되는 바와 다르며 아마도 식 (1)에 모순이 있는 것 같다.

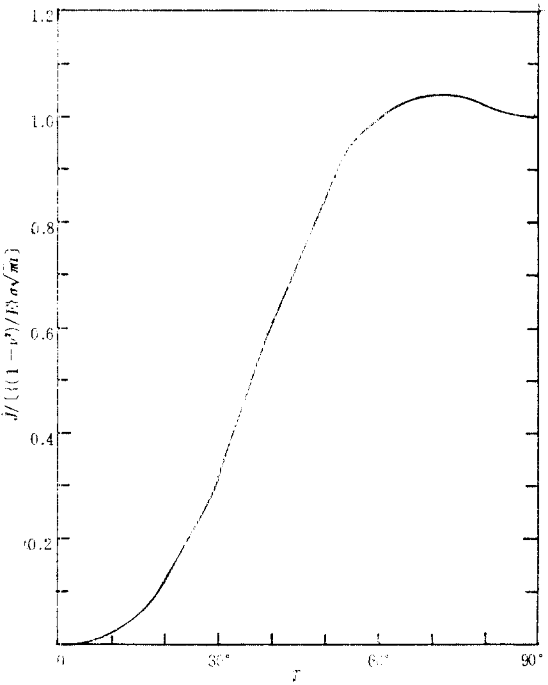

그림 3 $J/[\{(1-\nu^2)/E\}\sigma\sqrt{\pi a}]$ 대 γ의 비

2.2 $\hat{J}$적분

그림 4와 같은 폐곡선 $\Gamma_{\rm end}$ 내부를 파괴진행영역 $A_{\rm end}$로 하여 영역 A와 $A_{\rm end}$ 내의 에너지 변화의 균형을 생각하므로 다음식이 얻어진다.

$$\hat{J}=-\int_{\Gamma_{\rm end}} t_i\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1}d\Gamma \tag{5}$$

여기에서 x_1은 균열 발생방향 θ에 설정한 축이다.

식 $\hat{J}$ 벡터를 균열 평면 방향 X_1과 그 수직방향 X_2로 구분하면 다음식이 얻어진다.

$$\hat{J}_k=-\int_{\Gamma_{\rm end}} t_i\frac{\partial u_i}{\partial X_k}d\Gamma \tag{6}$$

식 (6)으로부터 경로독립 적분 $\hat{J}_k$는 다음식으로 얻어진다.

$$\hat{J}_k=\int_A(\rho\ddot{u}_i-F_i)\frac{\partial u_i}{\partial X_k}dA+\int_A\sigma_{ij}\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X_k}dA$$
$$-\int_{\Gamma+\Gamma_s} t_i\frac{\partial u_i}{\partial X_k}d\Gamma \tag{7}$$

여기에서 면적 A는 폐곡선내의 면적이고 $\rho\ddot{u}_i$는 가속력에 해당하는 항이고 F_i는 체적력에 해당하는 항이다.

식 (7)에서 ϵ_{ij}를 다음과 같이 표기한다.

$$\epsilon_{ij}=\epsilon_{ij}^e+\epsilon_{ij}^* \tag{8}$$

여기에서 ϵ_{ij}^e는 탄성 성분이고 ϵ_{ij}^*는 그외의 성분이다.

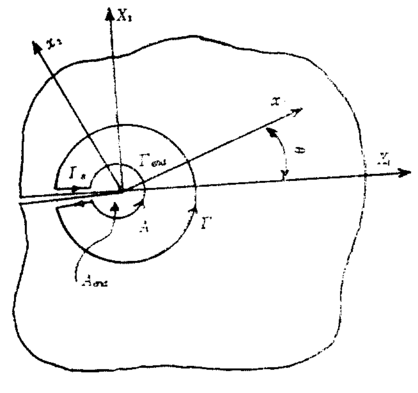

그림 4 $\hat{J}$적분경로와 좌표축 설정

식(8)을 식(7)에 대입하고 $\dfrac{\partial W_e}{\partial \epsilon_{ij}^e}=\sigma_{ij}$와 Gauss 정리를 적용하면 다음 식으로 표기된다.

$$\hat{J}_k=\int_{\Gamma+\Gamma_s}\left(W_e n_k-t_i\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right)d\Gamma-\int_{\Gamma_{\rm end}}W_e n_k d\Gamma$$
$$+\int_A\left[\sigma_{ij}\frac{\partial \epsilon_{ij}^*}{\partial X_k}+(\rho\ddot{u}_i-F_i)\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right]dA \tag{9}$$

여기에서 W_e는 W의 탄성성분이다.

(1) 파괴 진행영역이 없는 경우(즉 $\Gamma_{\rm end}=0$)

식(6)과 식(9)로 부터 $\hat{J}_k$는 영이 됨을 증명할 수 있다. 이러한 결과는 앞에서 언급한 J_k적분과 상이한 점을 보인다.

(2) 파괴 진행 영역이 비어있고, 체적력이 없

고, 관성력이 없고, 균열표면에 트랙션이 없고, 단지 탄성변형만 존재하는 경우.

이 경우에 식 (9)는 Budiansky와 Rice의 J_k적분과 동일하게 됨을 알 수 있다. 그런데 균열선단에서 파괴 진행영역은 피할 수 없이 존재하고, 또 2.1절에서 밝힌 바와 같이 J_k는 모순이 있으므로 $\hat{J}_k$ 적분이 더 타당성이 있는것으로 여겨진다. 그러나 $\hat{J}_k$를 사용하는데 문제는, Γ_{end} 상의 응력장이 알려져 있지 않는데 있다.

3. 크리이프파괴 매개변수

3.1 C^*적분

C^* 적분은 J 적분을 시간 의존형으로 바꿔 표기한 것으로 다음과 같다.

$$C^*=\int_\Gamma\left(W^*dX_2-t_i\frac{\partial u_i}{\partial X_1}d\Gamma\right) \tag{10}$$

여기에서

$$W^*=\int_0^{\dot{\epsilon}}\sigma_{ij}d\dot{\epsilon}_{ij} \tag{11}$$

C^*는 비선형 정상상태 크리이프법칙($\dot{\epsilon}=C\sigma^n$)을 따르는 크리이프파괴 매개변수이고, σ_{ij}와 ϵ_{ij}는 HRR 방정식과 같은 형태로서 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}\propto\left(\frac{C^*}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$
$$\epsilon_{ij}\propto\left(\frac{C^*}{r}\right)^{\frac{n}{n+1}} \tag{12}$$

여기에서 r은 균열선단에서부터 거리이다.

또한 J와 유사하게

$$C^*=-\frac{1}{B}\frac{\partial U^*}{\partial a} \tag{13}$$

여기서

$$U^*=\int_0^{\dot{v}}Pd\dot{v} \tag{14}$$

P와 $\dot{v}$는 하중과 변위율(displacement rate)이다.

C^* 매개 변수의 측정법으로는 Landes등[3]의 여러개 시편에 의한 방법이 있는데, 이는 여러개 시편에 의한 J_{IC}측정법과 유사하다.

여러개 시편을 사용하여야 하는 번거로움을 피하기 위해 단일시편에 의한 C^*측정법이 Harper[6]등에 의해 일정하중과 일정 변위율에 대해 다음식으로 제안되었다.

$$C^*=-\frac{n}{n+1}\frac{P\dot{v}}{Bw}\left[\frac{1}{m}\frac{dm}{d\left(\frac{a}{w}\right)}\right] \tag{15}$$

여기에서 m은 항복하중비로 불리는 것으로 극한해석에 의해 a/w의 함수로 주어진다. m과 a/w의 관계식은 일반적인 시편에 대해 Ewing 등[7]이 구한바 있다. 또다른 단일시편에 의한 C^*측정은 저자의 J결정법[8]을 시간의존형으로 변경하므로 다음식에 의해 얻을 수 있다.

$$C^*=\frac{\eta}{B(w-a)}\frac{n}{n+1}P\dot{v} \tag{16}$$

여기에서

$$\eta=2(3\text{점 굽힘 시편})$$
$$\eta=\frac{n-1}{n}\ (\text{중앙 균열 인장시편}) \tag{17}$$
$$\eta=\varphi_r+\frac{\varphi_c}{n}\ (\text{콤펙트 인장시편})$$

여기에서

$$\varphi_r=\frac{2(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$$
$$\varphi_c=\frac{2\alpha(1-2\alpha-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2} \tag{18}$$
$$\alpha=2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\right]^{1/2}-2\left[\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\right]$$

w는 시편폭이고 b는 리거먼트(ligament)길이이다.

위에 상응하는 η값은 Smith[9]의 결과와 약간 다르다.

3.2 C_{gk}^* 적분

C_{gk}^* 적분은 $\hat{J}_k$ 적분을 시간 의존형으로 변형하고 크리이프-탄성유사론(creep-elastic analogue theory)에 의해 $\ddot{u}_i=0$인 경우 식 (9)로부터 다음식으로 표기된다.

$$C_{gk}^*=\int_{\Gamma+\Gamma_s-\Gamma_{end}}\dot{W}_c n_k d\Gamma-\int_{\Gamma+\Gamma_s}t_i\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial X_k}d\Gamma+\int_A\left[\sigma_{ij}\frac{\partial\dot{\epsilon}_{ij}}{\partial X_k}-F_i\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right]dA \tag{19}$$

여기에서

$$\dot{W}_c=\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^c$$
$$\dot{\epsilon}_{ij}=\dot{\epsilon}_{ij}^e+\dot{\epsilon}_{ij}^p \tag{20}$$

$\dot{W}_c$는 stress working density이다.

〔그러나 해당 참고문헌(4)에서 식(19)를 표기할때 좌표축 표기에 잘못이 있다.〕 소규모 크리이프인 경우에는 탄성, 소성, 크리이프영역이 공존하므로 식(19)에 의해 C_{gk}*는 계산되지만, 광범위 크리이프에서는 $\dot{\varepsilon}_{ij}=0$로, $\sigma_{\rm net}$가 크리이프 매개변수로 적용 가능하리 만큼 대규모 크리이프 극한 상황에서는 $\dot{\varepsilon}_{ij}=0$, $\dot{W}_c\simeq 0$로계 산되어야 하므로 위의 C_{gk}* 적분은 정상상태와 비정상상태에 두루 적용되는 식이라고 Liu[4]등은 주장하고 있다.

3.3 T_k* 적분

Atluri의 연구팀에 의해 시작된 크리이프 매개변수가 발전하여 Burst등[5]은 다음의 매개변수를 제안하였다.

$$\dot{T}_k^*\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T_k^*}{\Delta t}=\lim_{\Gamma_{\rm end}\to 0}\int_{\Gamma_{\rm end}}[\dot{W}_c n_k-(t_i+\Delta t_i)\dot{u}_{i,k}-\dot{t}_i u_{i,k}]d\Gamma \qquad (21)$$

윗식은 비정상상태에 적용되는 식으로서 정상상태에서는 응력의 시간에 대한 변화가 없으므로 다음식으로 변형된다.

$$(\dot{T}_k^*)^{ss}=\lim_{\Gamma_{\rm end}\to 0}\int_{\Gamma_{\rm end}}[\dot{W}_c n_k-t_i\dot{u}_{i,k}]d\Gamma \qquad (22)$$

여기에서 ( )^{ss}는 정상상태임을 표시한다.

지금까지 크리이프파괴 매개변수로서 C*, C_{gk}*, $\dot{T}_k$*적분들을 소개하였다. 그러나 C*는 정상 상태 크리이프에만 적용되며, C_{gk}*, $\dot{T}_k$*는 정상 상태와 비정상 상태에 두루 적용된다고 해당 논문저자들은 밝히고 있다.

특히 C*에 대한 반박으로는 Atluri 연구팀에서 식(11)과 같은 W*의 정의는 크리이프에서는 물리적 의미를 찾을 수 없으며 크리이프에서는 에너지 소모율을 의미하는 식(20)의 $\dot{W}_c$를 사용하여야 한다고 주장하고 있다. 평면변형율과 평면응력 상태를 구분하여 모우드 I에 대한 $(\dot{T}_1^*)^{ss}$와 C*의 값을 비교하면 평면변형율 상태에서는 그 차이가 미소하나, 평면응력 상태에서는 10~15%의 차이를 보이는데 이 차는 단지 W*와 $\dot{W}_c$의 정의의 차이에 기인한다. $(\dot{T}_1^*)^{ss}$와 C*의 차이를 수식화하면 다음과 같다.

$$(\dot{T}_1^*)^{ss}=C^*+\lim_{\Gamma_{\rm end}\to 0}\int_{\Gamma_{\rm end}}n_1(\dot{W}_c-W^*)d\Gamma \qquad (23)$$

$\dot{T}_k$*에 대한 문제로서 지적될 수 있는것은 식(21)의 실제 계산상에 문제가 있음을 해당논문 저자도 밝히고 있으며 어느정도로 작은 $\Gamma_{\rm end}$상에서 계산되어야 하는지 의문으로 남아있다. 뿐만아니라 식(21)의 Δt_i의 처리에 있다. Δ는 시간에 대한 것인데 어느정도 짧은 시간 간격에서 t_i의 변화를 계산하여야 하는지 의문이다. C_{gk}*와 $\dot{T}_k$*의 비교에서 쉽게 알 수 있는 것은 $\dot{T}_k$*에서는 t_i에 대한 시간 미분항이 있으나 C_{gk}*에서는 그러한 항이 없다. C_{gk}*가 진정 비정상상태에서도 사용 가능하다면, t_i는 비정상 상태에서는 시간에 따라 변화하므로 $\dot{t}_i$항을 내포하고 있어야 할 것이다. 뿐만 아니라 C_{gk}*의 계산에서도 $\Gamma_{\rm end}$ 즉 파괴진행영역의 크기를 알아야하며 또 그 선상에서 응력 및 변위장을 알아야 식(19)는 계산가능하다. 그러나 아직 이에대해 아는 바 없다. 따라서 이 분야에서 상당한 연구가 진행되어야 할 것으로 된다.

4. 맺음 말

탄성-소성파괴 매개변수와 크리이프파괴 매개변수를 위한 경로독립 적분의 계산을 위해서는 파괴진행 영역의 응력장 방정식을 알 필요가 있는데 이영역은 미소결함 즉 미소공동, 미소균열등이 존재하는 곳으로서 연속체 역학에 의해 다루기 힘든 분야로서 앞으로 활발히 연구되어야 할 것으로 믿는다.

비록 파괴 진행 영역상의 응력장 방정식이 있다 하더라도 현재까지 개발된 크리이프파괴 경로독립 적분은 문제점이 있으므로 이에 대한 연구도 병행되어야 하리라 본다.

참 고 문 헌

(1) Kang Yong Lee, 1986, "Contradition of J_k Integral", Int. J. Fracture, Vol. 31, pp.

R53～R54.

(2) K. Kishimoto, S. Aoki, and M. Sakata, 1980, "On the Path Independent Integral-$\hat{J}$", Engng. Fracture Mech., Vol. 13, pp. 841～850.

(3) J.D. Landes and J.A. Begley, 1976, "A Fracture Mechanics Approach to Creep Crack Growth", ASTM STP 590, pp. 128～148.

(4) Y.J. Liu and T.R. Hsu, 1985, "A General Treatment of Creep Crack Growth", Engng. Fracture Mech., Vol. 21, No. 3, pp. 437～452.

(5) F.W. Brust and S.N. Atluri, 1986, "Studies on Creep Crack Growth Using the $\hat{T}^*$-Integral", Engng. Fracture Mech., Vol. 23, No. 3, pp. 551～574.

(6) M.P. Harper and E.G. Ellison, 1977, "The Use of the C^* Parameter in Predicting Creep Crack Propagation Rates", J. Strain Anal., Vol. 12, No. 3, pp. 167～179.

(7) D.J.F. Ewing and C.E. Richards, 1974, "The Yield Point Loads of Singly-Notched Pin-Loaded Tensile Strips", J. Mech. Phys. Sol., Vol. 22, No. 1, pp. 27～36.

(8) Kang Yong Lee and Ok Hwan Kim, 1986, "The Method of J Integral Analysis and Estimate", Trans. KSME, Vol. 10, No. 3, pp. 427～431.

(9) D.J. Smith and G.A. Webster, 1983, "Estimates of the C^* Parameter for Crack Growth in Creeping Materials", ASTM STP 803, pp. I-654～I-674.

◇