

<論 文>

# 인벌류우트-圓弧 合成齒形기어의 應力解析

卓 桂 來\* · 崔 商 勳\*\* · 尹 甲 英\*\*\*

(1986年 7月 21日 接受)

## A Stress Analysis on the Involute-Circular Arc Composite Tooth Profile Gear

Gye-Rae Tack, Sang-Hoon Chweh and Kab-Young Yoon

**Key Words:** Circular-Arc Gear(원호기어), Novikov Gear(노비코프기어), Involute-Circular Arc Composite Tooth Profile Gear(인벌류우트-원호 합성치형기어), Finite Element Method(유한요소법), Tooth Contact Stress(치면접촉응력), Root Fillet Stress(이뿌리응력)

### Abstract

In a new involute-circular arc tooth profile which is composed of an involute curve in the vicinity of pitch point, a circular arc in the addendum part, and a curve in the dedendum part which is generated by the circular arc profile of mating gear tooth profile, the tooth contact stress is calculated analytically and the root fillet stress is calculated by the finite element analysis.

The root fillet stress and the Hertzian contact stress of composite tooth profile gear are decreased with increasing the pressure angle and with decreasing the radius of circular arc and unwound angle. Compared with the standard involute gear, the root fillet stress is decreased by 2~15% and the Hertzian contact stress is decreased by 6~24%.

### 記 號 說 明

$a$  : 원호반경  
 $b$  : 치폭  
 $E_n$  : 조화평균 탄성계수  
 $M_c$  : 물림률  
 $m$  : 모듈을  
 $P_n$  : 치면법선하중  
 $Z$  : 잇수

$\alpha_0$  : 공구압력각  
 $\theta_{com}$  : 풀림각  
 $\rho_r$  : 상대곡률반경  
 $\sigma_c$  : 이뿌리 압축응력  
 $\sigma_H$  : 치면접촉응력  
 $\sigma_T$  : 이뿌리 인장응력

### 1. 서 론

\* 正會員, 漢陽大學校 大學院  
 \*\* 正會員, 建國大學校 工科大学 機械工學科  
 \*\*\* 正會員, 漢陽大學校 工科大学 機械設計學科

전보<sup>(1)</sup>에서는 인벌류우트 치형과 원호 치형의 단점을 보완하고 두 치형의 장점을 취한 치형을 얻기 위하

여 피치점부근에서는 인벌류우트 곡선으로 하고 어덴덤부분은 원호로 하며 디멘덤부분은 상대방기어의 어덴덤원호와 맞물릴 수 있는 곡선으로 하는 치형을 합성하였다.

본 연구에서는 전보<sup>(1)</sup>에서 창성된 인벌류우트-원호 합성치형기어에 있어서 Hertz식에 의하여 치면접촉응력을 구하고 유한요소법에 의하여 이뿌리응력을 계산하였다. 그리고 같은 계원의 표준 인벌류우트 치형기어와 비교하였다.

### 2. 치면접촉응력

합성치형기어의 치면접촉응력을 구하기 위하여 Hertz 접촉응력식인 식 (1)을 이용한다.

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{0.35P_n E_m}{2b\rho_r}} \quad (1)$$

$$\left( E_m = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right)$$

식 (1)에서 두 기어의 재질은 동질의 강으로 가정하고, 식 (1)에 의해서 합성치형의 치면접촉응력을 비교·고찰하기로 한다.

Fig. 1은 여러 물림위치에서  $m=4, Z_1=Z_2=30, \alpha_0=14^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \theta_{com}=2^\circ, 5^\circ, a=9, 15$ 인 경우 식 (1)에 의해 계산된 치면접촉응력을 보여주고 있다. 이때 탄성계수는  $E_1=E_2=206(\text{GPa}) (2.1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2, \text{steel})$ 이며 한 쌍의 치가 전체 하중을 받는다고 생각한다.

Fig. 1에서  $\alpha_0$ 가 클수록  $\theta_{com}$ 과  $a$ 가 작을수록 치면접촉응력은 작아짐을 알 수 있다. 또 인벌류우트 접촉영역에 비해 원호의 접촉영역에서 치면접촉응력이 작음을 알 수 있는데, 이는 원호 접촉영역에서는 凸面과 凹面の 접촉이기 때문이다. 일반적으로 치면의 피로에 의한 피팅(pitting)은 주로 한 쌍 접촉영역 중 이뿌리부분의 한계점에서 발생한다. 그러므로 하중분담계수를 고려하면 치면강도를 높이기 위하여 원호 접촉영역이 가능한 한 한 쌍 접촉영역내에 있도록 하여야 함을 알 수 있다.

### 3. 유한요소법에 의한 이뿌리 응력해석

치면에 하중이 가해지면 이뿌리 부분의 위험단면상에는 굽힘, 압축 및 전단응력이 복합적으로 발생하게 된다. 이러한 조합응력의 해석에 있어서 치의 내부에 발생하는 응력분포는 하나의 치가 전체하중을 받는 것으로 가정하고 치폭방향의 응력분포는 같은 것으로 하

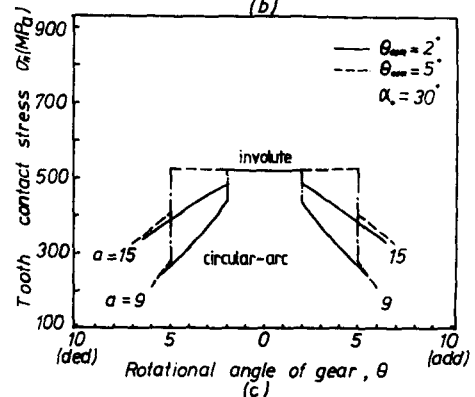
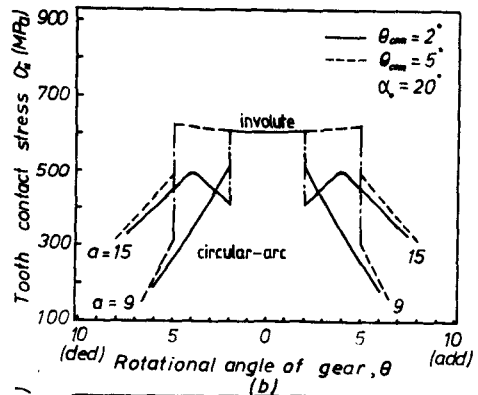
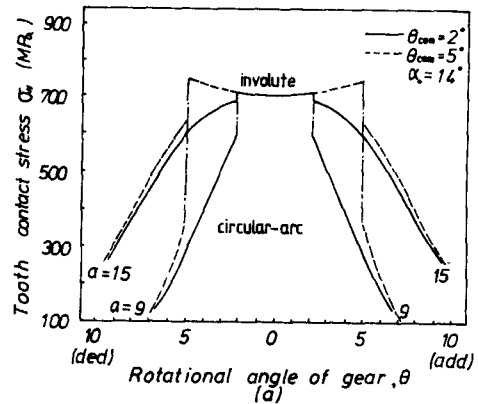
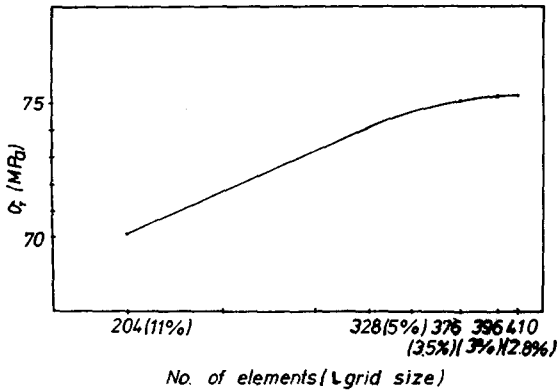


Fig. 1 Tooth contact stress ( $m=4, Z_1=Z_2=30, b=10\text{mm}, P=980\text{N}$ )

여 2차원 평면응력문제에 취급하였다.

#### 3.1 요소의 분할방법

유한요소법에 의한 합성치형기어의 이뿌리 응력해석에는 삼각형요소를 사용하였다. 요소의 크기와 응력값과의 관계를 알기 위하여 압력차가  $14^\circ$ 인 full-rounded



**Fig. 2** Convergency of stress value according to grid size

백공구로 절삭한 합성치형기어를 대상으로 요소수, 요소의 크기를 변화시켜 가며 응력값의 변화를 조사하였다. Fig. 2는 이 결과를 나타낸 것으로 요소의 크기를 이뿌리부분에서 이높이의 3% 이하로 하였을 때 이뿌리 응력값이 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 3은 요소분할과 지지조건을 나타낸 그림으로 Fig. 2에서 얻은 결과를 고려하여 요소수는 324개, 절점수는 200개로 하였다. 요소의 크기는 이뿌리 부분

에서는 이높이의 3%, 피치점의 아래부분은 5%, 피치점의 윗부분은 10%로 하였으며 지지점 부근은 100%로 하였다. 한편 치형곡선상의 두 점의 좌표를 계산하면 나머지 한 점이 계산되어 정삼각형요소가 되도록 초보적인 자동분할법을 사용하였다.

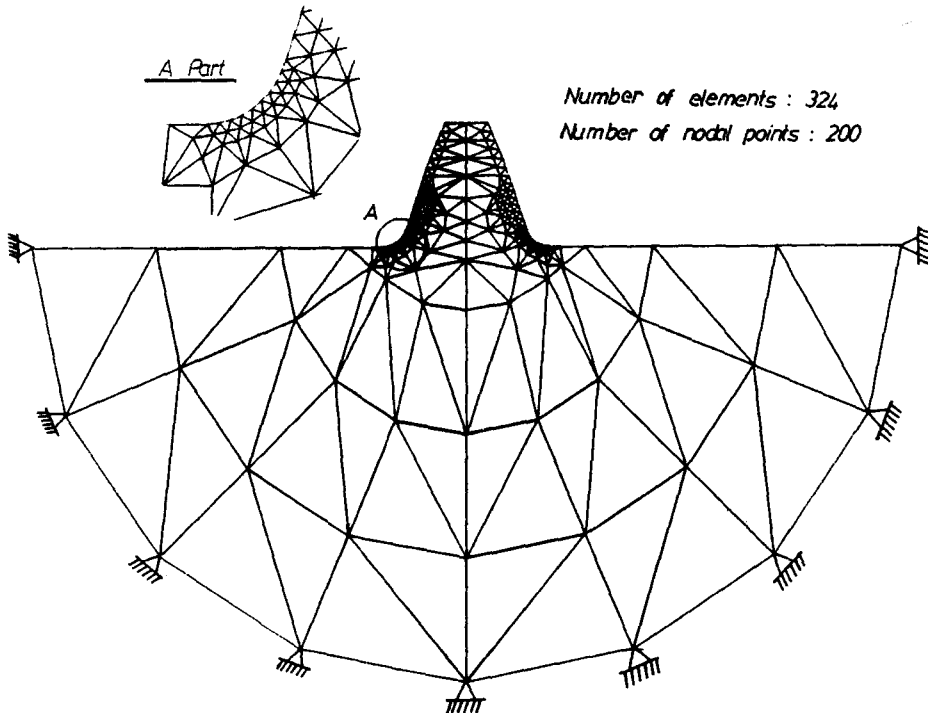
### 3.2 하중 및 지지조건

하중은 합성치형기어의 이끝에 치형곡선의 법선방향으로 단위치폭당 98N을 부하하였다. 표준 인벌류우트 치형기어와의 비교를 위해 두 치형의 변화에 따라 하중조건도 변화함을 밝혀둔다. 기어의 고정지지방법은 Fig. 3과 같이 이뿌리 부분의 응력상태에 고정점의 영향을 주지 않도록 하기 위하여 치형의 중심선과 이뿌리원이 만나는 점을 원점으로 하고 반경이 이높이의 3.5배 되는 원을 그어 그 원주상의 9개점을 고정지지하였다.

기어는 등방성을 갖는 균일한 재료로서 생각하여 탄성계수  $E$ 와 프와송비  $\nu$ 는 각각 206GPa( $2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ ), 0.3으로 하였다.

### 3.3 압력각에 따른 응력값의 변화

Fig. 4는 합성치형기어에서 압력각이  $14^\circ, 18^\circ, 20^\circ$ ,



**Fig. 3** Elements of gear tooth and fixing condition for the F.E.M. analysis

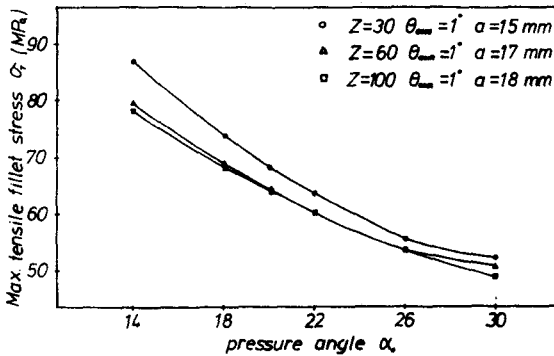


Fig. 4 Relationship between max. tensile fillet stress and pressure angle

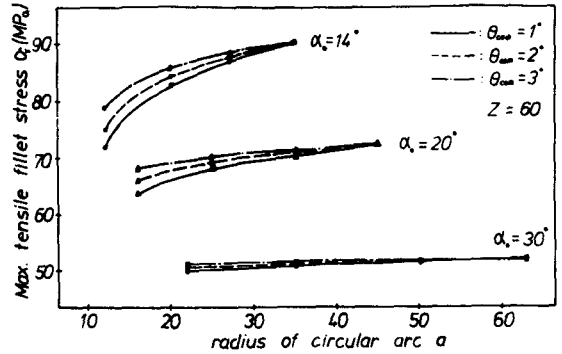


Fig. 6 Relationship among max. tensile fillet stress,  $\theta_{com}$ ,  $a$

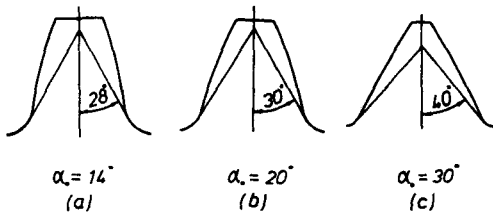


Fig. 5 Critical section

22°, 26°, 30°에 대하여 잇수 30, 60, 100의 경우에 대한 이뿌리 응력값을 나타낸 것이다. Fig. 4에서 압력각이 증가함에 따라서 응력값이 감소하는 현상을 알 수 있다. 이것은 압력각이 커짐에 따라 이뿌리 위험단면상에서의 이 두께가 커지기 때문이라고 생각된다. 압축측 이뿌리 응력값과 인장측 이뿌리 응력값의 비의 변화는 압력각이 작아지고 잇수가 많을수록 이 비는 작아지는 경향이 있으나 전체적으로는 대개 1.15~1.35 정도로서 압축응력이 약 15~35%가량 큰 것을 알 수 있다.

그러나 실제 기어의 파손에 영향을 미치는 것은 인장응력이기 때문에 앞으로는 인장응력의 값에 주목하기로 한다.

Fig. 5는 위험단면의 위치를 설명한 것으로 최대인장응력의 발생위치는 압력각이 20° 근처에서는 Hofer의 30° 접선법에 의한 위치와 잘 일치하나 압력각이 보다 큰 경우에는 많은 차이가 있음을 알 수 있다.

### 3.4 원호반경과 플릿각에 따른 응력값의 변화

Fig. 6은 잇수가 60일 경우에 압력각, 원호반경, 플릿각을 변화시켰을 때 최대 이뿌리 인장응력값을 나타낸다.  $\theta_{com}$ 과  $a$ 값이 증가함에 따라 응력값이 증가함을

알 수 있다. 이것은  $\theta_{com}$ 과  $a$ 가 증가함에 따라서 이뿌리 부분의 두께가 작아지기 때문이라고 생각된다.  $a$ 값이 작은 경우에는  $\theta_{com}$ 의 영향을 많이 받지만  $a$ 값이 클수록  $\theta_{com}$ 의 영향은 크지 않음을 알 수 있다.

### 3.5 잇수에 따른 응력값의 변화

Fig. 7은 모듈율이 4이고 압력각은 14°, 20°, 30°로 하며  $a$ 의 크기는 각각 12, 16, 22mm로 할 경우 잇수에 따른 최대 인장응력값의 변화를 나타낸다. 잇수가 40 이상일 때는 응력값의 변화가 거의 없으나 그 이하일 때는 잇수가 작아질수록 응력값이 갑자기 증가함을 알 수 있다. 이것은 잇수가 작은 경우에는 플릿부분에서의 곡률반경이 갑자기 커지기 때문이라고 생각된다.

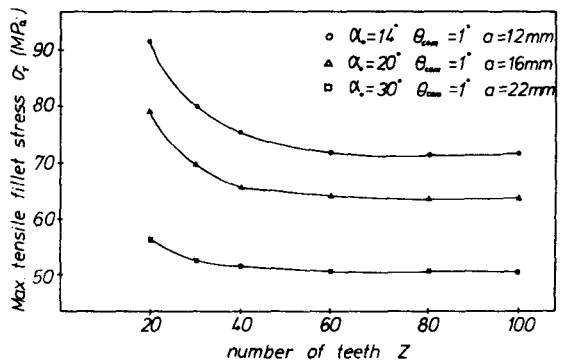


Fig. 7 Relationship between max. tensile fillet stress and number of teeth

### 3.6 표준 인벌류우트 치형기어와의 비교

Full-rounded 록 공구로 가공한 합성치형기어와 표준 인벌류우트 치형기어의 이뿌리 응력값을 비교·검

**Table 1** Relationship between number of teeth, pressure angle, contact ratio and max. fillet stress in involute tooth profile gear

(a) ( $Z=30$ )

Number of teeth	Pressure angle ( $\alpha_0$ )	Contact ratio ( $M_c$ )	Max. tensile fillet stress ( $\sigma_T$ )	Max. compressive fillet stress ( $\sigma_c$ )	Angle of critical section
30	14°	1.98	91.56	-108.9	19.9°
	18°	1.74	81.15	-99.95	29.92°
	20°	1.65	76.1	-95.73	26.7°
	22°	1.57	69.97	-89.99	24.08°
	26°	1.44	60.94	-81.94	30.55°
	30°	1.35	53.99	-76.09	38.2°

(b) ( $Z=60$ )

Number of teeth	Pressure angle ( $\alpha_0$ )	Contact ratio ( $M_c$ )	Max. tensile fillet stress ( $\sigma_T$ )	Max. compressive fillet stress ( $\sigma_c$ )	Angle of critical section
60	14°	2.23	86.96	-100.7	32.86°
	18°	1.9	76.33	-91.79	30.63°
	20°	1.78	70.49	-86.57	28.53°
	22°	1.68	66.1	-82.85	29.36°
	26°	1.52	58.61	-76.75	35.95°
	30°	1.4	52.04	-71.14	45.61°

(c) ( $Z=100$ )

Number of teeth	Pressure angle ( $\alpha_0$ )	Contact ratio ( $M_c$ )	Max. tensile fillet stress ( $\sigma_T$ )	Max. compressive fillet stress ( $\sigma_c$ )	Angle of critical section
100	14°	2.38	83.51	-95.51	34.05°
	18°	1.99	75.04	-89.01	29.79°
	20°	1.85	69.22	-83.77	26.71°
	22°	1.73	63.54	-78.98	35.46°
	26°	1.55	57.56	-74.43	36.6°
	30°	1.43	52.4	-70.91	44.1°

토하기로 한다.

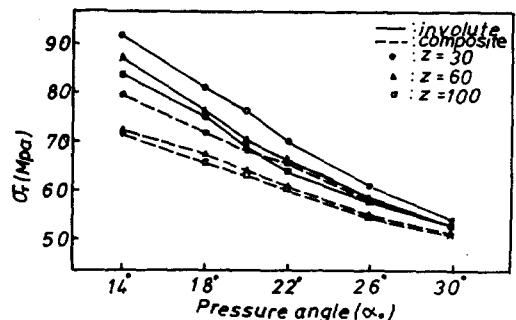
Table 1, 2는 인벌류우트 치형기어와 합성치형기어에서 잇수가 30, 60, 100개인 경우에 압력각이 변함에 따라서 이뿌리 부분의 최대 인장 및 압축응력값의 변화, 물림률과 최대 인장응력이 나타나는 필렛부분의 위치를 각으로 나타낸 것이다.

Table 2에서는 합성치형기어의 원호반경  $a$ 가 물림률의 값이 1.3 이상일 때의 값을 택한 것이다. 두 개의 값 중에서 작은 값은 원호반경의 최소값이고 큰 값은 인벌류우트 치형기어보다 이뿌리부분의 인장응력이 작게 되는  $a$ 의 최대값을 나타낸다.

Table 1, 2으로부터 압력각이 14°일 때 이뿌리 인장응력은 인벌류우트 치형기어에서 보다 평균 15% 감소하고 압력각이 20°인 경우는 평균 9.3% 감소하며 압

력각이 30°일 때는 평균 2.3% 감소함을 알 수 있다.

Fig. 8은 Table 1, 2에서의 대표적인 값을 나타낸



**Fig. 8** Relation between involute tooth profile gear and composite tooth profile gear in max. tensile fillet stress

**Table 2** Relationship between number of teeth, pressure angle, contact ratio and max. fillet stress in composite tooth profile gear(a) ( $Z=30$ )

Number of teeth	Pressure angle ( $\alpha_0$ )	$\theta_{com}$	$a$	Contact ratio ( $M_c$ )	Max. tensile fillet stress ( $\sigma_T$ )	Max. compressive fillet stress ( $\sigma_c$ )	Angle of critical section
30	14°	1°	12	1.34	79.36	-95.74	24.2°
		1°	17	1.7	90.15	-107.8	27°
	18°	1°	14	1.32	71.92	-89.35	32.8°
		1°	20	1.59	80.28	-99.06	23.1°
	20°	1°	15	1.3	68.33	-86.36	30.2°
		1°	23	1.57	75.92	-95.18	27°
	22°	1°	17	1.31	65.31	-84.01	35.4°
		1°	23	1.48	69.4	-88.87	30.7°
	26°	1°	21	1.3	58.45	-78.47	37.7°
		1°	25	1.37	60.38	-80.87	31°
	30°	1°	28	1.3	52.81	-74.43	40.2°
		1°	33	1.34	53.27	-74.95	41.9°

(b) ( $Z=60$ )

Number of teeth	Pressure angle ( $\alpha_0$ )	$\theta_{com}$	$a$	Contact ratio ( $M_c$ )	Max. tensile fillet stress ( $\sigma_T$ )	Max. compressive fillet stress ( $\sigma_c$ )	Angle of critical section
60	14°	1°	12	1.3	71.93	-84.11	37.3°
		1°	26	1.93	86.74	-100.6	27.7°
	18°	1°	15	1.33	67.37	-81.21	33.4°
		1°	35	1.8	76.14	-91.25	37°
	20°	1°	16	1.31	64.14	-78.64	38.3°
		1°	35	1.67	70.38	-85.99	27.2°
	22°	1°	18	1.31	61.08	-76.34	35.32°
		1°	37	1.59	65.95	-82.25	31.3°
	26°	1°	23	1.3	54.95	-71.69	36.9°
		1°	25	1.5	58.55	-76.27	32°
	30°	1°	33	1.3	51.1	-69.06	50.60°
		1°	63	1.4	51.9	-71.07	41.57°

(c) ( $Z=100$ )

Number of teeth	Pressure angle ( $\alpha_0$ )	$\theta_{com}$	$a$	Contact ratio ( $M_c$ )	Max. tensile fillet stress ( $\sigma_T$ )	Max. compressive fillet stress ( $\sigma_c$ )	Angle of critical section
	14°	1°	12	1.34	71.51	-82.13	38.9°
		1°	23	1.8	81.93	-93.74	27.2°
	18°	1°	14	1.33	65.78	-78.06	34.25°
		1°	39	1.81	74.03	-87.55	30°

100	20°	1°	15	1.31	63.26	-76.36	39.5°
		1°	40	1.69	69.04	-83.25	34°
	22°	1°	17	1.32	60.1	-74	36.2°
		1°	28	1.49	63.28	-77.86	38.1°
	26°	1°	22	1.3	54.24	-69.51	48.25°
		1°	74	1.53	57.45	-73.84	41.1°
	30°	1°	33	1.31	50.93	-67.85	50.95°
		1°	104	1.43	51.22	-69.24	40.95°

것이다.

#### 4. 결 론

이상의 결과를 종합하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 인벌류우트 영역보다 원호의 접촉영역에서 치면 접촉응력이 현저히 작아진다. Hertz 접촉응력은 원호반경이 일정하고 압력각이 14°~30° 범위일 때 인벌류우트치형보다 24~6% 감소한다.

(2) 압력각이 증가할수록  $\theta_{om}$ ,  $a$ 가 작을수록 잇수가 증가함에 따라 고강도의 기어를 얻을 수 있다.

(3) 압력각이 14°~30°인 경우에 인벌류우트 치형기어보다 합성치형기어의 이뿌리응력이 15~2% 감소한다.

#### 참 고 문 헌

- (1) 최상훈, 변준형, 윤갑영, "인벌류우트-원호 합성치형의 창성에 대한 연구," 대한기계학회논문집, 제 9 권, 제 5 호, pp. 572~578, 1985
- (2) Buckingham, E., Analytical Mechanics of Gears, Dover Pub. Inc., 1949
- (3) Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method., McGraw-Hill., 1977
- (4) L.L. Durocher and A. Gasper, "A Versatile Two Dimensional Mesh Generator with Automatic Bandwidth Reduction", Computer & Structure, Vol. 10, pp. 561~575, 1979