

< 論 文 >

인벌류우트-원호 합성치형의 적정 원호반경에 대한 연구

정인승* · 손지원** · 윤갑영***

(1986년 12월 18일 접수)

A Study on the Adequate Radius of Circular Arc in the Involute-Circular Arc Composite Tooth Profile

In-Seung Chung, Ji-Won Sohn and Kab-Young Yoon

Key Words: Involute-Circular Arc Composite Tooth Profile(인벌류우트-원호 합성치형), Radius of Circular Arc of Gear(원호반경), Unwound Angle of Gear(풀림각) Chebyshev Curve Fitting(Chebyshev 커브피팅)

Abstract

The composite gear which is composed of involute curve and circular arc has been studied. In the vicinity of pitch point, its profile is an involute curve, and in the dedendum, a circular arc. The curve in the dedendum is generated by the circular arc of the mating gear.

Though the available range between minimum and maximum radius of circular arc can be given by existing tooth profile equation, there was no formulation which relates design parameters to the desired radius.

It is attempted to get the formula for the radius of circular arc as a function of design parameters, such as unwound angle, number of teeth, module, and pressure angle.

The radius of circular arc, the chordal tooth thickness at working root circle, nominal bending stress, Hertz stress and contact ratio obtained from derived formula are compared with those of the existing design criteria.

And these are compared with those of involute gear.

기 호 설 명

A_i : Chebyshev 다항식 계수
 a : 원호반경
 b : 치폭

E_1, E_2 : 피니언과 기어의 탄성계수
 E_m : 조화평균 탄성계수
 F : 풀림계수
 M_c : 물림률
 m : 모듈
 P_n : 치면법선하중
 S_f : 유효이뿌리 원에서의 이 뿌리 두께
 z : 잇수

* 정회원, 한양대학교 대학원

** 건국대학교 대학원

*** 정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

α_0 : 공구압력각
 θ_{com} : 플립각
 ρ_r : 상대곡률반경

력이 작게되는 플립각 1° 로 고정하여 잇수 30~100 개 압력각 $14^\circ \sim 30^\circ$ 의 범위에서 최소 원호반경식과 치형 조건을 만족하는 최대 원호반경식에 대하여 고찰하였다.

1. 서 론

전보⁽¹⁾에서는 인벌류우트 치형과 원호 치형의 단점을 보완하고 두 치형의 장점을 취하기 위한 인벌류우트-원호 합성치형의 창성과 응력해석에 대하여 연구하였다. 즉, 치형의 피치점 부근에서는 인벌류우트로 하며, 어텐덤 부분은 원호, 디텐덤 부분은 상대방 기어의 어텐덤 원호와 맞물릴 수 있는 곡선으로 합성되는 치형을 유효치형으로 한다. 또 이뿌리 부분의 치형은 full-rounded tip을 가진 백의 이끝에 의해 창성되는 곡선으로 하는 기어의 치형이다.

합성치형기어의 여러가지 특성⁽²⁾은 인벌류우트 부분의 크기를 나타내는 플립각과 원호 부분의 크기를 나타내는 원호반경에 의해 특징지어진다. 그러므로 플립각과 원호반경을 적절히 선택하는 것이 상당히 중요하다.

합성치형의 특성을 나타내는 원호반경의 범위와 플립각의 범위를 알기 위해서는 복잡한 합성치형식^(1,2)을 이용해야만이 가능하므로 이러한 범위를 잇수, 공구압력각, 모듈을 등으로 수식화하는 것이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 동력전달용 기어에 주로 쓰이는 물림률 1.3 이상일 때, 치면접촉응력과 공칭굽힘응

2. 원호반경의 함수화

2.1 원호반경의 특성

원호반경 a 는 모듈을, 잇수, 공구압력각, 플립각의 함수로 나타낼 수 있다.

$$a = f(m, z, \alpha_0, \theta_{com}) \tag{1}$$

본 연구에서는 플립각을 1° 로 고정하여 치면접촉응력과 공칭굽힘응력을 작게 하고자 하였다⁽²⁾. 즉 식(1)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a = f(m, z, \alpha_0) \tag{2}$$

잇수가 일정하면 모듈은 피치원 지름에 비례한다. 따라서 주어진 공구압력각과 잇수에서 플립각이 1° 이면 원호반경은 모듈에 비례한다.

잇수와 원호반경의 관계는 Fig. 1에서와 같이 물림률이 1.3에서의 최소원호반경 (a_{min})은 공구압력각 $\alpha_0 = 14^\circ \sim 24^\circ$ 까지는 거의 변화가 없었고, $\alpha_0 = 25^\circ \sim 30^\circ$ 에서 여러가지 함수로 고찰하여 본 결과 본 논문에서는 cosine의 값이 실제의 값과 잘 접근하므로 cosine 함수로 하며 고찰하였다. 최대원호 반경(a_{max})은 공구압력각이 커질수록 기울기가 점점 증가하는 직선으로 나타난다.

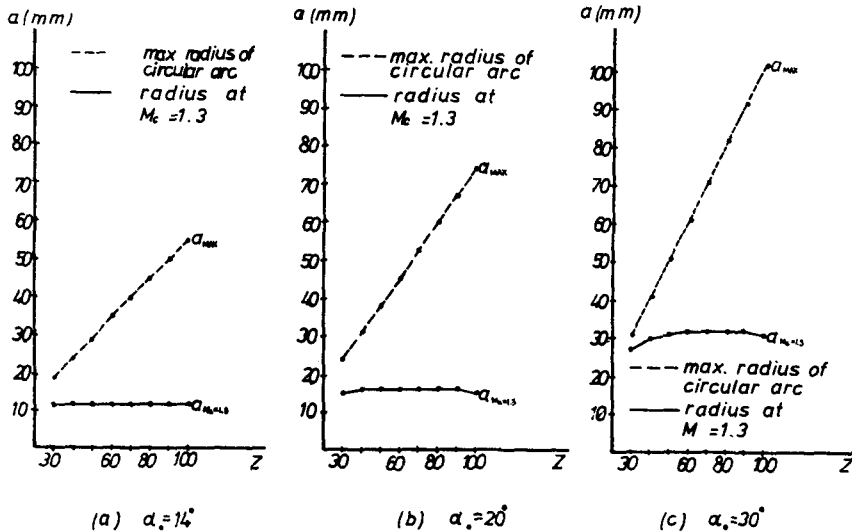


Fig. 1 Relationship between radius of circular arc and number of teeth

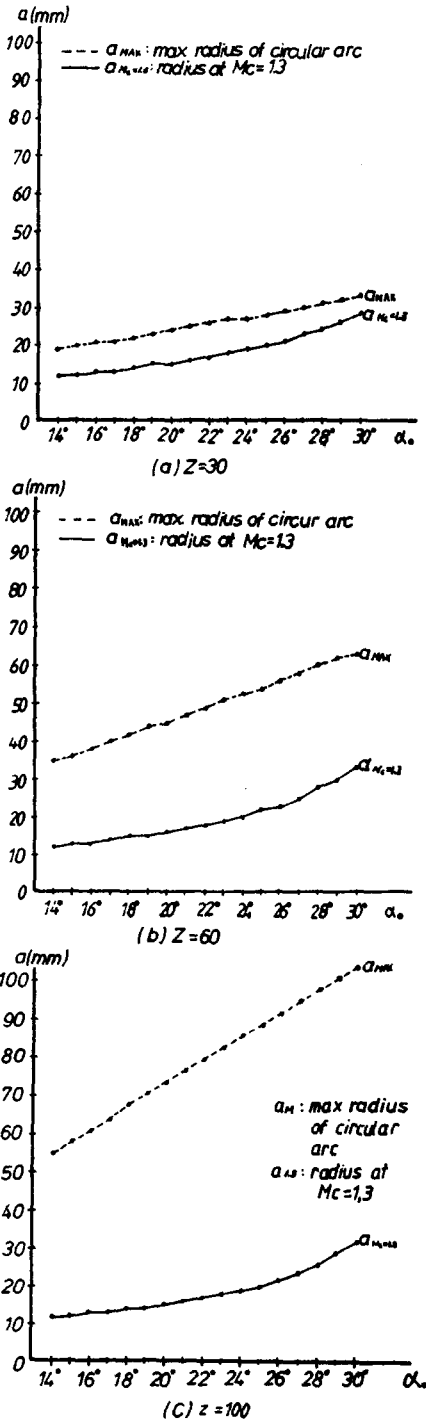


Fig. 2 Relationship between radius of circular arc and tool pressure angle

$$a_{min}=f(x) \quad \text{단, } x=\cos\left(\frac{z-70}{90}\pi\right) \quad (3)$$

$$a_{max}=f(z) \quad \text{단, } z=f(\alpha_0) \quad (4)$$

공구압력각과 원호반경의 관계는 Fig. 2에서와 같이 최소원호반경은 이차함수적으로 변한다. 최대원호반경은 잇수가 증가할수록 기울기가 점점 증가하는 직선으로 나타난다.

$$a_{min}=f(u) \quad \text{단, } u=\alpha_0^2 \quad (5)$$

$$a_{max}=f(\alpha_0) \quad \text{단, } \alpha_0=f(z) \quad (6)$$

2.2 원호반경의 함수화

원호반경과 공구압력각과의 관계 또는 원호반경과 잇수와의 관계에서 보간법을 적용하면 모든 점에서 정확한 값을 얻을 수 있으나 구간마다 방정식이 다르고 이차원화(two dimension; three degree of space)하면 함수가 복잡해져서 일반식으로 쓰기에는 어려움이 있다.

반면에 커브피팅(curve fitting)을 이용하여 조사식을 구하는 방법은 어떤 영역내에서는 엄밀해와는 차이가 있지만 일반식을 만들기가 쉽고 여러 개의 변수가 있더라도 각 변수들을 적절히 도입하면 일정 영역에서 만족할 만한 식을 얻을 수 있다.

본 연구에서는 두 변수, z 와 α_0 를 묶어 새로운 변수 η 로 놓고 Chebyshev 다항식^(3,4)(polynomial)을 이용한 최소자승법으로 일반식을 얻고자 하였다. Chebyshev 다항식을 η 에 대한 올림차순으로 표시하면 다음과 같다.

$$Y_l(\eta) = \sum_{i=1}^l A_i \eta^i \quad (7)$$

최소원호 반경식은 식(3)과 식(5)로부터 새로운 변수 η 는 z 에 대한 cosine 함수와 α_0^2 의 함수로 나타나지만 식(7)에 의하며 제공함은 무의미하다. 즉 η 는 다음의 함수로 놓을 수 있다.

$$\eta = 0.2 \alpha_0 + 0.3 \cos\left(\frac{z-70}{90}\pi\right) \quad (8)$$

식(8)을 Chebyshev 커브 피팅으로 오차가 가장 적은 계수 A_i 를 구하면 $l=5$ 일 때이므로 원호반경의 최소한계식은 다음과 같다.

$$a_{min} = m[61.25 - 69\eta + 31.675\eta^2 - 6.98\eta^3 + 0.75515\eta^4 - 0.031575\eta^5] \quad (9)$$

치형조건을 만족하는 최대원호반경식은 식(4)와 식(6)에서 α_0 와 z 가 상호의존하는 함수의 형태로 나타난다. 이것을 새로운 변수 η 로 유도하면 다음과 같다.

$$\eta = 5\left(\frac{z-20}{10}\right) \frac{\alpha_0-14}{17} + 5\left(\frac{z-20}{10}\right) + 14 \quad (10)$$

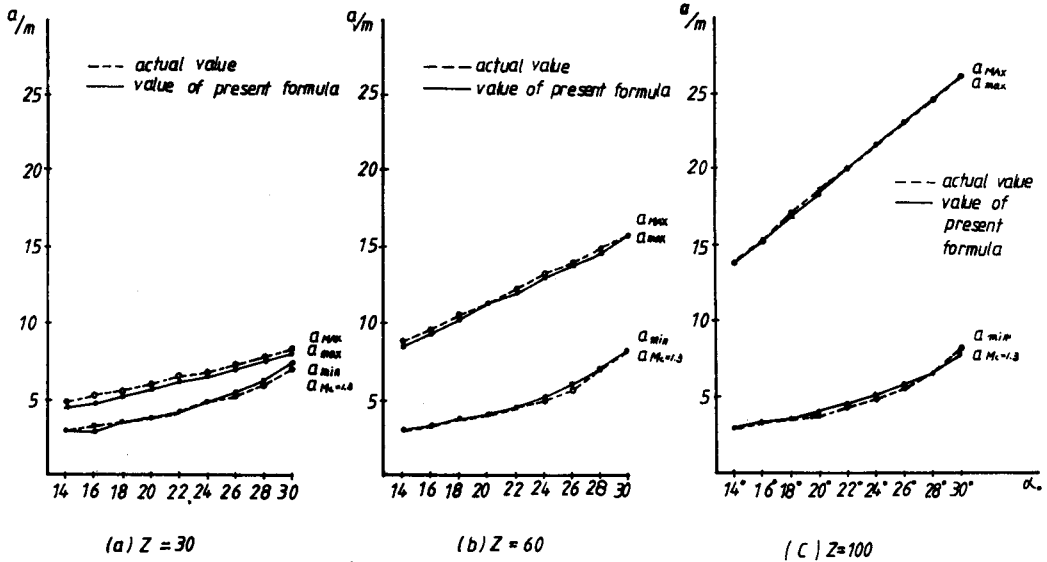


Fig. 3 Comparison of the radius of circular arc

식 (10)을 Chebyshev 컵브피팅으로 오차가 가장 적은 A_i 를 구하면 $l=1$ 일 때이므로 최대원호반경식은 다음과 같다.

$$a_{max} = m[0.00785(z-2)a_0 + 0.0235z + 0.75] \quad (11)$$

3. 함수식과 기존 설계범위와의 비교

3.1 원호반경의 비교

원호반경 (a)의 값을 정수로 하여서 자료값을 불연속적으로 처리했기 때문에 치형식에 의한 값과 함수식에 의한 값이 약간의 차이를 보인다.

Fig. 3에서 보는 바와 같이 a_{max} 의 값은 치형식에 의하여 계산된 값보다 크지 않다. 이것은 a_{max} 의 값을 구하는 과정에서 함수식의 값이 치형식에 의한 값을 넘으면 합성치형의 조건을 만족하지 않기 때문이다.

또, a_{min} 의 값이 물림틀이 1.3일 때의 값과 거의 일치하지만 약간 큰 값이 나타난다. 이것은 물림틀이 1.3 이상인 치형조건식보다 크게 될 때의 원호반경 값을 기준으로 a_{min} 의 식을 구했기 때문에 오차로 나타나는 값이다.

즉, 이 관계를 부등식으로 표시하면 다음과 같다.

$$a_{MC=1.3} \leq a_{min} \leq a \leq a_{max} \leq a_{Max} \quad (12)$$

여기서

$a_{MC=1.3}$ 은 물림틀 1.3인 경우의 원호반경

a_{min} 은 물림틀 1.3보다 큰 원호반경 중에서 최소값을 함수화한 원호반경.

a_{max} 은 치형조건을 만족하는 최대원호반경식에 의하여 구한 값.

a_{Max} 은 치형조건을 만족하는 최대원호반경 값을 작자 나타낸다.

3.2 이뿌리 두께의 비교

같은 잇수와 압력각일 때 원호반경이 감소할수록 이뿌리 두께는 증가하며, 같은 잇수와 원호반경일 때는 공구압력각이 커질수록 이뿌리 두께는 증가한다.

따라서 Fig. 4에서 보는 바와 같이 a_{min} 에 대한 이뿌리 두께가 a_{max} 에 대한 이뿌리 두께보다 크다. 또 a_{max} 에 대한 함수식이 치형식에 의한 최대원호반경의 이뿌리 두께보다 약간 작게 나타날 때가 있는데, 이것은 3.1절에서 고찰한 바와 같이 a_{max} 이 치형식에 의한 값보다 약간 작게 되기 때문이다.

a_{min} 에서의 이뿌리 두께는 치형식에서 구한 원호반경의 이뿌리 두께보다 약간 작게 될 때가 있다. 또 잇수 30개에서 a_{max} 에 대한 S_r 값을 제외하고는 치형식에 의한 결과와 일치한다.

3.3 유효 이뿌리원에서의 공칭굽힘응력의 비교

대부분 기어의 파손은 인장축의 균열로부터 일어나기 때문에 인장축의 공칭굽힘응력만 고려하기로 한다. 공구압력각이 클수록, 원호반경이 작을수록 공칭굽힘응력이 작아진다.

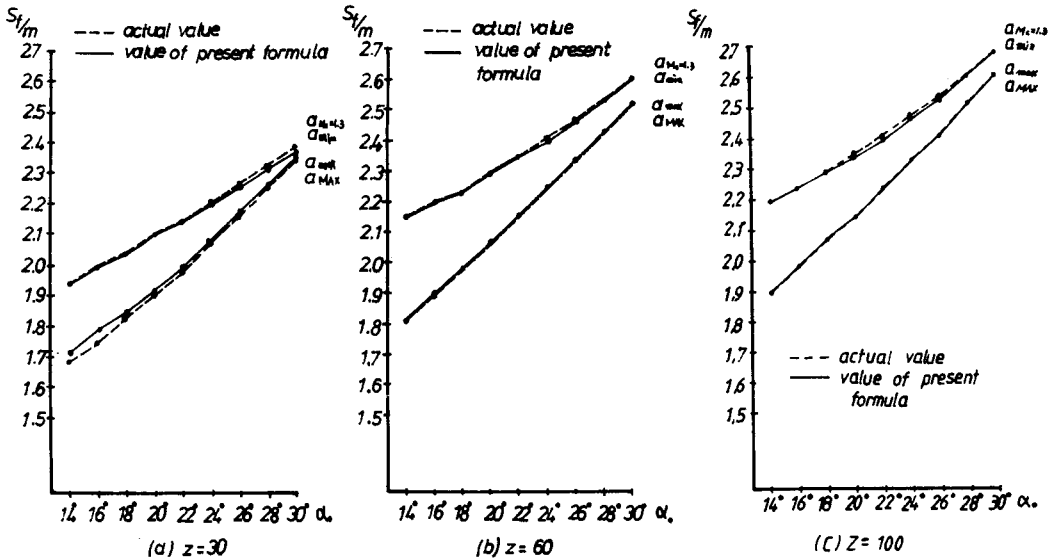


Fig. 4 Comparison of chordal tooth thickness at working root circle

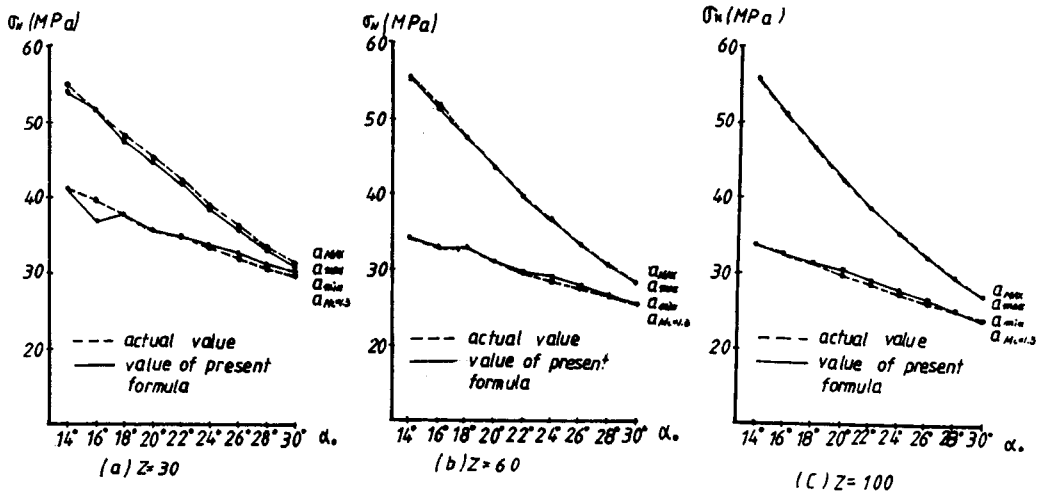


Fig. 5 Comparison of nominal bending stress

Fig. 5는 모뉘율이 4일때 치형식에 의하여 계산된 이뿌리원에서의 인장축 공칭굽힘응력값과 함수식에 의하여 구한 이뿌리원에서의 인장축 공칭굽힘응력을 비교한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 잇수 30개를 제외하고는 치형식에서 구한 최대공칭굽힘응력과 일치하게 된다.

3.4 물림률의 비교

잇수와 원호반경이 같은 경우에는 공구압력각이 증가하면 물림률은 감소하고, 동일 잇수와 공구압력각일

때에는 원호반경이 작아질수록 물림률도 감소한다.

Fig. 6에서 a_{min} 은 정수로 나타나는 원호반경 중에서 물림률이 1.3을 바로 넘는 값으로 하였기 때문에 함수식에 의한 값은, 자료로 한 원호반경에 대한 범위와 같은 범위 ($M_c=1.3\sim 1.34$) 내에서 물림률이 약간 크거나 같게 된다.

치형조건을 만족하는 최대원호반경식에서의 물림률은 잇수가 많아질수록, 또 공구압력각이 커질수록 치형조건식에서 구한 값과 일치하게 된다.

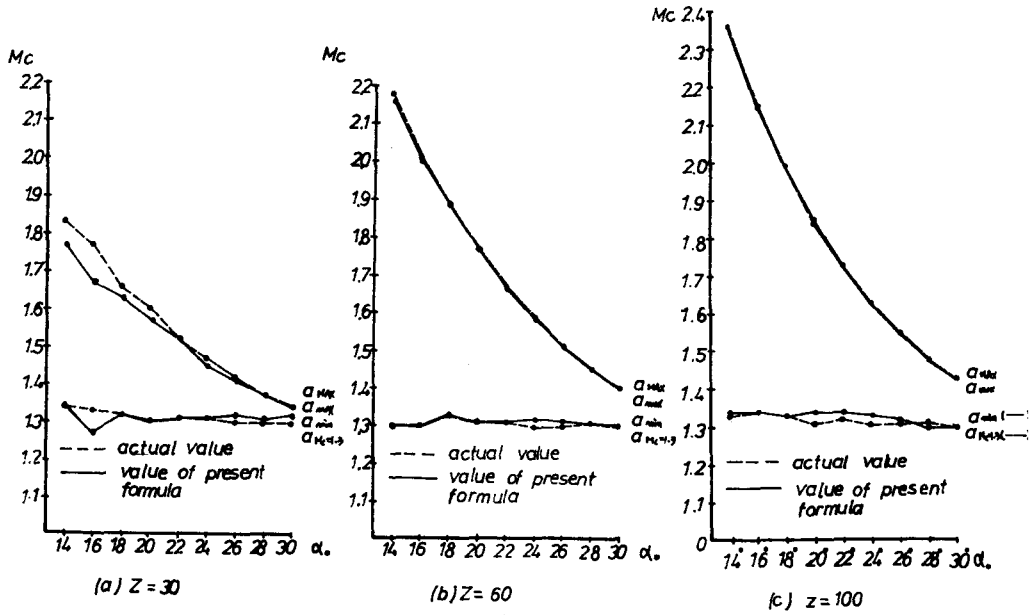


Fig. 6 Comparison of contact ratio

Table 1 Comparison of involute gear with composite gear

Tool pressure angle (deg)	Radius of circular arc	Chodal tooth thickness (mm)		Maximum tensile fillet stress (MPa)		Contact ratio	
		Involute	Composite	Involute	Composite	Involute	Composite
14	a_{min}	8.06	9.15	92.19	73.02	2.32	1.32
	a_{max}		8.13		90.36		2.27
16	a_{min}	8.31	9.24	85.91	70.32	2.12	1.32
	a_{max}		8.32		84.09		2.10
18	a_{min}	8.73	9.62	78.91	67.56	1.96	1.34
	a_{max}		8.75		78.49		1.94
20	a_{min}	8.88	9.68	73.02	64.32	1.83	1.32
	a_{max}		8.89		72.54		1.81
22	a_{min}	9.28	9.76	68.15	61.18	1.71	1.32
	a_{max}		9.28		67.95		1.71
24	a_{min}	9.72	10.16	64.35	58.57	1.62	1.33
	a_{max}		9.72		63.50		1.61
26	a_{min}	10.16	10.59	61.48	55.04	1.54	1.32
	a_{max}		10.16		58.35		1.54
28	a_{min}	10.33	10.65	57.31	52.97	1.47	1.31
	a_{max}		10.33		54.37		1.47

4. 고찰

4.1 치면접촉응력의 고찰

합성치형기어의 치면접촉응력을 구하기 위하여 Hertz 접촉응력식인 식 (14)를 이용한다.

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{0.35P_n E_n}{2b\beta r}} \tag{13}$$

$$\text{단, } E_n = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

Fig. 7은 여러 물림 위치에서 모듈 4, 잇수 80, 공구압력각이 각각 14°, 20°, 30°인 경우 최소원호 반경, 최대원호반경, 인벌류우트에서 각각의 치면접촉응력을 서로 비교한 그림이다. 이때 탄성계수는 $E_1 = E_2 = 206(\text{GPa})$ 이며 한 쌍의 치가 전체 하중을 받는다고 생각한다.

Fig. 7에서 보는 바와 같이 피치점에서 풀림각 1°까지는 합성치형이 인벌류우트 곡선으로 이루어지므로 세 경우 모두 치면접촉응력이 같다. 또 최소원호반경에서 치면접촉응력이 가장 작고 원호반경이 증가할수록 치면접촉응력이 점점 증가하여 최대원호반경에서는 인벌류우트에서의 치면접촉응력과 거의 비슷하다. 또 합성치형에서는 피치점에서 멀어질수록 치면접촉응력이 현저히 감소한다.

4.2 위험단면에서의 이뿌리 두께, 최대 이뿌리 인장응력, 물림틀의 고찰

모듈 4, 풀림각 1°, 잇수 80, 공구압력각 14°~28°에서 표준 인벌류우트 기어와 합성치형기어의 위험단면에서의 이뿌리 두께, 최대 이뿌리 인장응력, 물림틀을 비교하면 Table 1과 같다.

Table 1에서 보는 바와 같이 합성치형의 함수식에 의한 위험단면에서 이뿌리 두께는 표준 인벌류우트 치형보다 최소원호반경에서 3.1~13.52% 증가하였고 최대원호반경에서 0~0.87% 증가했다.

최소원호 반경의 함수식에 의한 최대 이뿌리 인장응력은 표준 인벌류우트 치형보다 압력각이 14°에서 28° 사이에서 7.57~20.79% 감소하였고, 최대원호 반경의 함수식에 의한 최대 이뿌리 인장응력은 0.29~5.09% 감소하였다.

또 합성치형의 함수식에 의한 물림틀은 표준 인벌류우트 치형보다 최소원호반경에서 10.88~43.1% 감소, 최대원호반경에서 0~2.16% 감소하였다.

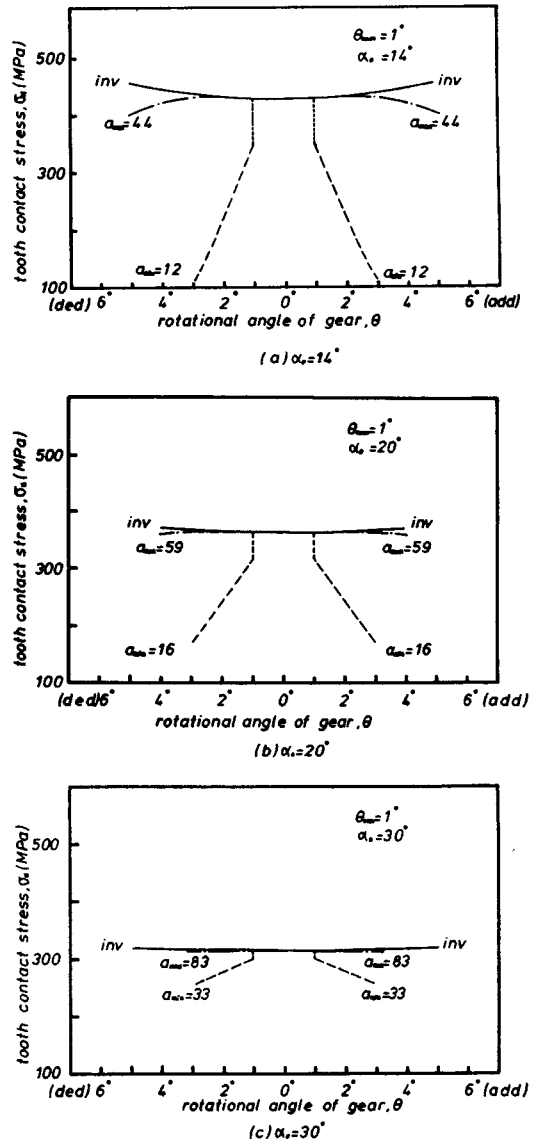


Fig. 7 Tooth contact stress ($m=4, Z_1=Z_2=80$)

5. 결론

인벌류우트-원호합성치형기어에서, 풀림각은 최적치 1°로 하고, 공구압력각 14°~30°, 잇수를 30~100개로 할 때 물림틀이 1.3 이상일 때의 최소원호반경 a_{min} 과 치형조건을 만족하는 최대원호반경 a_{max} 을 다음과 같이 함수화하였다.

$$a_{min} = m[61.25 - 69\eta + 31.6175\eta^2 - 6.98\eta^3]$$

$$+0.75515\eta^4 - 0.031575\eta^5]$$

여기서

$$\eta = 0.2\alpha_0 + 0.3\cos\left(\frac{z-70}{90}\pi\right)$$

$$a_{\max} = m[0.0785(z-2)\alpha_0 + 0.0235z + 0.75]$$

함수화된 식을 이용하면 합성치형기어의 여러가지 특성을 나타내는 원호반경의 범위를 보다 간편하고 정확하게 구할 수 있다.

위의 함수식에 의한 원호반경의 값은 기존치형식에 의한 값에 비하여 a_{\min} 값은 약간 크게, a_{\max} 값은 약간 작게 나타나며, 이것은 설계상 안전함을 의미한다.

참 고 문 헌

(1) 최상훈, 변준형, 윤갑영, “인벌류우트-원호 합성

치형의 창성에 대한 연구”, 대한기계학회논문집, 제 9권, 제 5호, pp. 572~578, 1985

(2) 최상훈, “인벌류우트-원호 합성치형에 대한 연구”, 한양대학교 대학원 박사 학위논문, 1986

(3) Earle Buckingham, *Analytical Mechanics of Gears*, Dover Pub. New York, pp. 23, 1949

(4) Lee W. Johnson and R. Dean Riess, *Numerical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1982

(5) Shan S. Kuo, *Computer Applications of Numerical Methods*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972