

< 論 文 >

直交 異方性 無限平版 內部的 圓孔周圍 龜裂 解析

鄭 成 均* · 洪 昌 善*

(1987年 7月 20日 接受)

Analysis of Cracks Emanating from a Circular Hole in an Orthotropic Infinite Plate

S.K. Cheong and C.S. Hong

Key Words: Crack(균열), Hole(원공), Mixed-Mode(혼합 모드), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Mapping-Collocation(사상선점), Anisotropy(이방성)

Abstract

This paper investigates the problem of cracks emanating from a circular hole in an orthotropic infinite plate. The mixed-mode stress intensity factors are obtained by using the modified mapping-collocation method. To investigate the effect of anisotropy and circular hole boundary on crack tip singularity, stress intensity factors are considered as functions of the normalized crack length for various types of laminated composite. The results indicate a strong dependence of the stress intensity factor on the material anisotropy and geometry.

1. 서 론

복합 재료의 사용이 증가함에 따라서 이방성 탄성론을 이용한 파괴 역학적 해석이 많이 이루어지고 있다. 그러나, 실제 및 실험에 적용할 수 있는 해는 극히 제한되어 있는 편이다. 이방성체 내부 균열 선단부의 응력장에 대한 일반방정식이 복소 변수를 이용하여 유도될 수 있음을 참고문헌 (1)에서 보여주고 있다. Lekhnitskii⁽²⁾는 복소 변수 해석 함수를 이용하여 이방성 탄성론을 포괄적으로 다루었고, Savin⁽³⁾은 무한 평판 내부의 원공 및 균열 문제를 집중적으로 해석하였다.

균열은 대부분 구조물의 응력 집중 부위에서 발생한다. 따라서, 구조물에 많이 포함되어 있는 원공 주위

균열 문제의 해석은 학문적으로는 물론 실제적인 문제로써 중요하다. 등방성 평판 내부의 원공 주위 균열 문제를 해석하기 위하여 그동안 많은 연구가 보고되었다⁽⁴⁻⁹⁾. 이러한 문제를 해석하기 위하여 등각사상법, 경계선점법 및 Mellin 변환법이 이용되었다. 등방성의 경우에 있어서는 이러한 방법들 외에 가중 함수를 이용하거나 유한 요소법 등을 이용하여 해석한 보고들이 많다. 그러나, 이방성 재료에 있어서 응력집중^(10,11)이나 파단강도^(12,13)에 관한 연구는 많지만 응력집중 부위에서 발생한 균열 문제의 해석은 거의 없다. Wad-doups등⁽¹⁴⁾은 선형 파괴 역학을 이용하여 원공을 갖는 복합재료의 파단을 연구하였으나 등방성에 대한 Bowie의 결과를 해석 과정에서 적용하였다. Wang과 Yau⁽¹⁵⁾는 유한 차원의 일방향 복합 적층판 내부의 원공주위 균열 문제를 유한 요소 및 J -적분 개념을 이용

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

하여 해석하였다.

본 연구에서는 참고문헌 (16)과 (17)에서 등방성과 이방성에 각각 처음으로 제시한 수정 사상 선점법(modified mapping-collocation method)을 이용해서 직교 이방성 무한 평판 내부의 원공 주위 균열 문제에 대한 혼합모우드 응력 강도 계수를 구하고자 한다. 본 문제는 기하학적으로 복잡하고 재료의 이방성이 강하기 때문에 해가 아직 보고되어 있지 않다. 먼저 이론적 해석을 전개함으로써 균열 면에서의 무부하 조건과 무한 점에서의 경계 조건을 완전하게 만족시킨다. 그 후 나머지 원공 경계에 최소 자승 선점 과정(least square collocation procedure)을 적용하여 근사해를 얻게 된다. 균열 선단 응력 특이성에 미치는 원공 경계 및 이방성의 효과를 알아보기 위해서 여러가지 형태의 적층판에 대한 응력 강도 계수를 무차원화된 균열 길이의 함수로 나타내 보았다.

2. 이방성 재료의 이차원 탄성 해석

이방성 탄성 해석에 필요한 기본 방정식을 참고문헌 (2)를 토대로 간단하게 설명하고자 한다.

체적력(body force)이 없는 경우의 평형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

적합 방정식(compatibility equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

평면 응력 상태에 있는 이방성 재료에 대한 응력-변형도 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기에서 a_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)는 콤플라이언스 성분으로서 재료 상수이다.

다음과 같은 Airy 응력함수 $F(x, y)$ 를 도입하면 평형 방정식은 자동적으로 만족된다.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (3)에 대입하고 다시 식 (2)에 대입하면 미분 방정식을 얻게 된다. 특성 방정식의 근이 모두 다르다고 가정하면, 응력 함수의 일반화된 형태는 다음과 같다.

$$F(x, y) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (5)$$

여기에서

$$z_k = x + s_k y \quad (k=1, 2) \quad (6)$$

이며, F_1 과 F_2 는 각각 변수 z_1 과 z_2 의 해석 함수이다. 복소 인자(complex parameter) s_1, s_2 는 특성 방정식의 근 중에서 허수부가 양수인 것으로 정의하였으며 특성방정식은 다음과 같다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (7)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하면 응력 성분에 대한 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re}[s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\text{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re}[s_1 \phi_1'(z_1) + s_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 사용한 응력 함수의 관계식은 다음과 같다.

$$\phi_k(z_k) = F_k'(z_k) \quad (k=1, 2) \quad (9)$$

응력-변위 관계식과 식 (3)을 이용하면 다음과 같은 변위식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} u &= 2\text{Re}[p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] \\ v &= 2\text{Re}[q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 사용한 계수들의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_k &= a_{11}s_k^2 + a_{12} - a_{16}s_k \\ q_k &= (a_{12}s_k^2 + a_{22} - a_{26}s_k)/s_k \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (11)$$

Traction 형태의 경계조건 역시 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_1(s) + if_2(s) &= i \int_0^s (X_n + iY_n) ds \\ &= (1 + is_1)\phi_1(z_1) + (1 + is_2)\phi_2(z_2) \\ &\quad + (1 + i\bar{s}_1)\overline{\phi_1(z_1)} \\ &\quad + (1 + i\bar{s}_2)\overline{\phi_2(z_2)} + c \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서 X_n, Y_n 은 경계면을 따라서 작용하는 단위 면적당 힘의 x, y 성분이다. 여기에서 막대 표시는 공액 복소수를 나타내는 부호이다.

3. 문제 해석

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 무한 평판 내부의 원공 주위 균열 문제를 해석하고자 한다. 기하학적 복잡성 및 재료의 큰 이방성 때문에 이 문제의 해는 아직 보고되어 있지 않다. 이 문제를 해석하기 위하여 수정 사상 선점법을 이용하였다. 수정 사상 선점법은 원래 등방성 재료의 경우에 대한 문제를 해석함에 있어서 도입되었는데⁽¹⁶⁾ 그 후에 Bowie와 Freese가 직교 이방성 재료의 경우에 대한 문제를 해석하는데까지 확장하였다⁽¹⁷⁾. 함수의 해석 접속원리를 이용하면 균열 면에서의 무부하 조건을 만족시킬 수 있다.

먼저 다음과 같이 단순한 사상을 도입한다⁽¹⁷⁾.

$$z = \omega(\zeta) = \frac{L}{2} \left\{ \zeta + \frac{1}{\zeta} \right\} \quad (13)$$

위의 사상 함수는 ζ -평면에서의 단위원과 외부를 균열과 그 외부로 대응시킨다. z -평면에서 균열외의 다른 경계에 대한 대응점은 다음 식으로 표시된다.

$$\zeta = \frac{z}{L} + \left[\left\{ \frac{z}{L} \right\}^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (14)$$

다음과 같은 두 복소 평면의 사상 함수를 고려한다.

$$z_k = \omega(\zeta_k) = \frac{L}{2} \left\{ \zeta_k + \frac{1}{\zeta_k} \right\} \quad (k=1, 2) \quad (15)$$

균열 면에서 z, z_1, z_2 가 같으므로 단위원 위에서 ζ, ζ_1, ζ_2 가 일치하게 되고, 그 외의 경계에 대한 대응 점은 다음과 같다.

$$\zeta_k = \frac{z_k}{L} + \left[\left\{ \frac{z_k}{L} \right\}^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (k=1, 2) \quad (16)$$

여기에서는 Fig. 1의 물리 평면을 매개 평면에 대응시키는 정확한 사상 함수를 찾는 일을 피하고 단순한 사상 함수를 이용하였다. 이것은 사상 선점법의 장점 중의 하나이다.

편의상 매개 평면에서의 응력함수를 다음과 같이 정의한다⁽¹⁷⁾.

$$\begin{aligned} \phi_k(z_k) &= \phi_k[\omega(\zeta_k)] = \phi_k(\zeta_k), \\ \phi_k'(z_k) &= \phi_k'(\zeta_k) / \omega'(\zeta_k) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

윗 식에서 사용한 미분 식은 다음과 같다.

$$\omega'(\zeta_k) = \frac{L}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\zeta_k^2} \right\} \quad (k=1, 2) \quad (18)$$

따라서 매개 평면에서의 응력에 대한 식은 식 (8)과 (17)을 고려하면 다음과 같다.

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} \left[s_1^2 \frac{\phi_1'(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + s_2^2 \frac{\phi_2'(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \right]$$

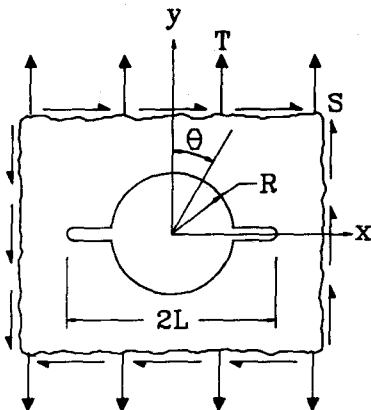


Fig. 1 Cracks emanating from a circular hole in an orthotropic infinite plate under combined stress

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\phi_1'(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + \frac{\phi_2'(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \right] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \left[s_1 \frac{\phi_1'(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + s_2 \frac{\phi_2'(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

변위에 대한 식은 식 (10)과 (17)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)] \\ v &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \phi_1(\zeta_1) + q_2 \phi_2(\zeta_2)] \end{aligned} \quad (20)$$

합력(resultant-force)에 대한 식은 식 (12)와 (17)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(s) + if_2(s) &= (1 + is_1) \phi_1(\zeta_1) + (1 + is_2) \phi_2(\zeta_2) \\ &\quad + (1 + is_1) \overline{\phi_1(\zeta_1)} \\ &\quad + (1 + is_2) \overline{\phi_2(\zeta_2)} + c \end{aligned} \quad (21)$$

ζ_1 과 ζ_2 에 해당하는 두 개의 매개 영역을 $S_{c_1}^+$ 과 $S_{c_2}^+$ 로 표시하자. 그리고 Fig. 2에 도시된 바와 같이 두 영역의 합을 S_c^+ 라고 하자.

응력 함수들 사이에 다음과 같은 관계식을 도입한다⁽¹⁷⁾.

$$\phi_2(\zeta_2) = B \bar{\phi}_1 \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} + C \phi_1(\zeta_2) \quad (22)$$

여기에서 사용한 계수 및 정의 식은 다음과 같다⁽¹⁷⁾.

$$\bar{\phi}_1 \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\} = \overline{\phi_1 \left\{ \frac{1}{\zeta} \right\}} \quad (23)$$

$$B = (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) / (s_2 - \bar{s}_2), \quad C = (\bar{s}_2 - s_1) / (s_2 - \bar{s}_2) \quad (24)$$

만약 $\phi_1(\zeta)$ 가 S_c^+ 와 단위원에 관한 그 역 영역(inverse region)에서 해석적이면 균열 면에서의 무부하 조건이 만족될 수 있다⁽¹⁷⁾. 원공 경계에서 단위 두께당 작용되는 총 합력이 영이라고 하면 해석 함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\zeta + i)^{-n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\zeta - i)^{-n} \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서 A_n, B_n 및 C_n 은 복소 상수이다. 식 (25)는 모든 이차원 이방성 재료의 경우에 대해 적용할 수 있

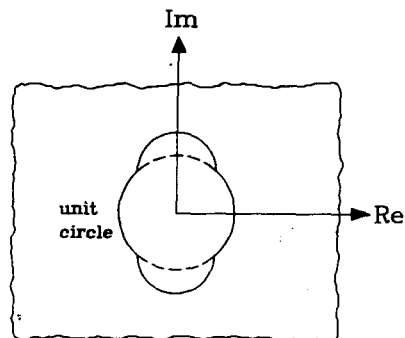


Fig. 2 ζ -transformed plane

는 응력 함수이다.

응력의 대칭성을 고려하면 응력 함수를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\phi_1(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta (\zeta^2 + 1)^{-n} \quad (26)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 새로운 복소 상수이다. 식 (26)에서 첫 번째 급수만을 고려하면 직교 이방성 사각형 평판 내부에 존재하는 균열 문제를 해석할 수 있다. 이러한 문제는 참고문헌 (17)과 (18)에서 이미 해석하였다.

이제는 외부 경계 조건이 만족되도록 식 (26)의 계수들을 결정하는 문제로 바뀌었다. 다음과 같은 무한 점에서의 경계 조건을 대입하여 계수 A_n 은 직접 얻을 수 있다.

$$\sigma_z = 0, \sigma_r = T, \tau_{rz} = S \quad (27)$$

무한 점에서 응력 성분들이 유한하고 원공 경계 내부에 작용하는 총 합력이 영이라는 점을 고려하면 z 가 짝 경우에 응력 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽¹⁹⁾.

$$\phi_1(z_1) \rightarrow D z_1, \quad \phi_2(z_2) \rightarrow (E + iF) z_2 \quad (28)$$

식 (27)과 (28)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 연립 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} (s_1^2 + \bar{s}_1^2)D + (s_2^2 + \bar{s}_2^2)E + i(s_2^2 - \bar{s}_2^2)F &= 0 \\ 2D + 2E &= T \quad (29) \\ (s_1 + \bar{s}_1)D + (s_2 + \bar{s}_2)E + i(s_2 - \bar{s}_2)F &= -S \end{aligned}$$

윗 연립 방정식을 풀면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} D &= \{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)T + 2\alpha_2 S\} / \Delta \\ E &= \{(\alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \alpha_2)T - 2\alpha_2 S\} / \Delta \\ F &= \{[\alpha_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2)]T \\ &\quad + [(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - (\alpha_2^2 - \beta_2^2)]S\} / \beta_2 \Delta \quad (30) \end{aligned}$$

여기에서 사용된 관계식은 다음과 같다.

$$\Delta = 2\{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)\} \quad (31)$$

식 (15)와 (28)을 고려하면, 매개 평면에서의 응력 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta_1) &\rightarrow (LD/2)\zeta_1, \\ \phi_2(\zeta_2) &\rightarrow \{L(E + iF)/2\}\zeta_2 \quad (32) \end{aligned}$$

식 (22)를 고려하고 식 (26)과 (32)를 비교하면 계수를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_0 &= LD/2 \\ A_{-1} &= L(E - iF - D\bar{C})/2\bar{B} \\ A_n &= 0 \quad (n \geq 1 \text{ 및 } n \leq -2) \quad (33) \end{aligned}$$

따라서, 직교 이방성 무한 평판 내부의 원공 주위 균열에 대한 응력 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= (LD/2)\zeta + (L/2\bar{B})(E - iF - D\bar{C})\frac{1}{\zeta} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)\zeta(\zeta^2 + 1)^{-n} \quad (34) \end{aligned}$$

여기에서 계수 a_n 과 b_n 은 결정해야 할 실 상수이다. 결과적으로, 원공 주위 경계 조건이 만족되도록 계수들을 결정하는 문제로 단순화되었다. 수치 해석을 하기 위하여 식 (34)의 급수에서 N 항을 잘라 내어 해석하여야 한다.

식 (34)를 식 (19)에 대입하면 응력의 x 성분에 대한 식은 다음과 같이 표현할 수 있다. 다른 성분들도 유사하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_1^2}{\omega'(\zeta_1)} \left(A_0 - \frac{A_{-1}}{\zeta_1^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_2^2}{\omega'(\zeta_2)} \left\{ A_0 \left(C - \frac{B}{\zeta_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\bar{A}_{-1} B - \frac{A_{-1} C}{\zeta_2^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N S_{1n} a_n + \sum_{n=1}^N S_{2n} b_n \right] \quad (35) \end{aligned}$$

여기에서 사용한 계수의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{1n} &= \frac{s_1^2}{\omega'(\zeta_1)} \left[\frac{(1-2n)\zeta_1^2 + 1}{(\zeta_1^2 + 1)^{n+1}} \right] + \frac{s_2^2}{\omega'(\zeta_2)} \\ &\quad \left[\frac{B\{(2n-1)\zeta_2^{2n-2} - \zeta_2^{2n}\} + C\{(1-2n)\zeta_2^2 + 1\}}{(\zeta_2^2 + 1)^{n+1}} \right] \\ S_{2n} &= \frac{is_1^2}{\omega'(\zeta_1)} \left[\frac{(1-2n)\zeta_1^2 + 1}{(\zeta_1^2 + 1)^{n+1}} \right] + \frac{is_2^2}{\omega'(\zeta_2)} \\ &\quad \left[\frac{-B\{(2n-1)\zeta_2^{2n-2} - \zeta_2^{2n}\} + C\{(1-2n)\zeta_2^2 + 1\}}{(\zeta_2^2 + 1)^{n+1}} \right] \quad (36) \end{aligned}$$

식 (34)를 식 (20)에 대입하면 변위 성분 u 에 대한 식을 다음과 같이 표현할 수 있으며 성분 v 에 대한 표현도 유사하게 할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} \left[p_1 (A_0 \zeta_1 + A_{-1} / \zeta_1) + p_2 (A_0 (B / \zeta_2 \right. \\ &\quad \left. + C \zeta_2) + \bar{A}_{-1} B \zeta_2 + A_{-1} C / \zeta_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N D_{1n} a_n + \sum_{n=1}^N D_{2n} b_n \right] \quad (37) \end{aligned}$$

여기에서 사용한 계수의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_{1n} &= p_1 \left[\frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + 1)^n} \right] \\ &\quad + p_2 \left[B \frac{1}{\zeta_2 (1/\zeta_2^2 + 1)^n} + C \frac{\zeta_2}{(\zeta_2^2 + 1)^n} \right] \\ D_{2n} &= ip_1 \left[\frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + 1)^n} \right] \\ &\quad + ip_2 \left[-B \frac{1}{\zeta_2 (1/\zeta_2^2 + 1)^n} + C \frac{\zeta_2}{(\zeta_2^2 + 1)^n} \right] \quad (38) \end{aligned}$$

식 (34)를 식 (21)에 대입하면 합력의 y 방향 성분

에 대한 식은 다음과 같이 표현할 수 있으며 x 방향 성분도 유사하게 표현할 수 있다.

$$f_1 = 2Re \left[(A_0 \zeta_1 + A_{-1}/\zeta_1) + (A_0(B/\zeta_2 + C\zeta_2) + (\bar{A}_{-1}B\zeta_2 + A_{-1}C/\zeta_2)) + \sum_{n=1}^N F_{1n} a_n + \sum_{n=1}^N F_{2n} b_n \right] + c_1 \quad (39)$$

여기에서 사용한 계수의 정의는 다음과 같다.

$$F_{1n} = \left[\frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + 1)^n} + \left[B \frac{1}{\zeta_2(1/\zeta_2^2 + 1)^n} + C \frac{\zeta_2}{(\zeta_2^2 + 1)^n} \right] \right]$$

$$F_{2n} = i \left[\frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + 1)^n} + i \left[-B \frac{1}{\zeta_2(1/\zeta_2^2 + 1)^n} + C \frac{\zeta_2}{(\zeta_2^2 + 1)^n} \right] \right] \quad (40)$$

원공 경계 조건이 충분히 만족되도록 식 (34)의 계수를 잘라서 계산하면, 응력 함수를 결정할 수 있게 된다. 본 연구에서는 참고문헌 (16)에서 제시한 최소자승 선점 과정을 따랐다. 여러 경계 조건 중에서 합력에 대한 경계 조건이 잘 맞으면 좋은 결과를 얻을 수 있기 때문에^(16,17), 본 연구에서도 이 방법을 이용하였다.

응력 강도 계수는 응력 함수로부터 직접 계산할 수 있다. 응력 강도 계수와 응력 함수의 관계는 다음과 같다⁽²⁰⁾.

$$K_I + \frac{K_{II}}{s_2} = 2\sqrt{2\pi} \left[\frac{s_2 - s_1}{s_2} \right] \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \sqrt{z_1 - z_0} \phi_1'(z_1) \quad (41)$$

사상 함수를 고려하고 식 (15)~(18)을 이용하면 다음과 같은 관계식을 얻게 된다.

$$K_I + \frac{K_{II}}{s_2} = 2\sqrt{\pi/L} \left[\frac{s_2 - s_1}{s_2} \right] \phi_1'(1) \quad (42)$$

식 (34)를 식 (42)에 대입하면, 응력 강도 계수를 다음과 같이 응력 함수의 계수들로 표현할 수 있다.

$$K_I + \frac{K_{II}}{s_2} = 2\sqrt{\pi/L} \left[\frac{s_2 - s_1}{s_2} \right] \left[A_0 - A_{-1} + \sum_{n=1}^N \frac{1-n}{2^n} a_n + i \sum_{n=1}^N \frac{1-n}{2^n} b_n \right] \quad (43)$$

그러므로, 응력 함수의 계수가 결정되면 응력 강도 계수를 얻을 수 있게 된다.

4. 수치 결과 및 검토

앞의 해석을 근거로 하여 컴퓨터 코오드를 만들고, 이 프로그램을 이용해서 직교 이방성 무한 평판 내부의 원공 주위 균열에 대한 혼합 모드 응력 강도 계

수를 얻었다. 응력 강도 계수는 여러 형태의 적층판에 대하여 무차원 균열길이 $(L-R)/L$ 의 함수로 도시하였다. $(L-R)/L$ 이 0이라는 것은 원공 주위에 균열이 없음을 의미하며, 이때에 응력 강도 계수는 0이 된다. $(L-R)/L$ 이 1이라는 것은 원공 반경이 0으로서 균열만이 존재함을 의미하며, 이때에 응력 강도 계수는 무한 평판 내부의 균열에 대한 값이 된다. 문제를 해석하는 과정에서 식 (34)는 응력 대칭성이 고려되었으므로 원공 경계의 반만을 고려하면 된다. 특히 복소 인자가 순허수이고 하층이 대칭이면, 식 (34)에서 허수부의 계수를 모두 영으로 놓을 수 있다. 이러한 경우에는 원공 경계의 4분의 1만을 고려하면 된다.

Fig. 3에서는 자른 항에 대한 해의 수렴성을 보여주고 있는데 40항 정도를 취하면 충분함을 알 수 있다. 본 연구에서는 응력 강도 계수를 무한 평판 내부에 존재하는 길이 $2L$ 의 균열에 대한 응력 강도 계수로 무차원화 하였다. 따라서, $(L-R)/L$ 이 1에 가까워지면 무차원화된 응력 강도 계수는 1에 접근할 것이다. 그리고 본 연구에 사용한 유리 섬유유의 재료 상수는 다음과 같다.

$$E_1 = 53.74 \text{ GPa} (7.80 \times 10^6 \text{ psi})$$

$$E_2 = 17.91 \text{ GPa} (2.60 \times 10^6 \text{ psi})$$

$$G_{12} = 8.96 \text{ GPa} (1.30 \times 10^6 \text{ psi}), \nu_{12} = 0.25$$

Fig. 4는 균일 인장 응력을 받고 있는 등방성의 경우에 대한 결과를 보여주고 있는데 참고문헌 (4)와 (7)의 결과와 잘 일치하고 있다. 여기에서 등방성의 경우에 대한 결과는 복소 인자를 $s_1 = 1.0i$ 와 $s_2 = 0.995i$ 로 하여 얻었다. Fig. 5는 균일 전단 응력을 받고 있는 등방성의 경우에 대한 결과를 보여주고 있으며 복합 하중을 받고 있는 등방성의 경우에 대한 결과는 Fig. 6

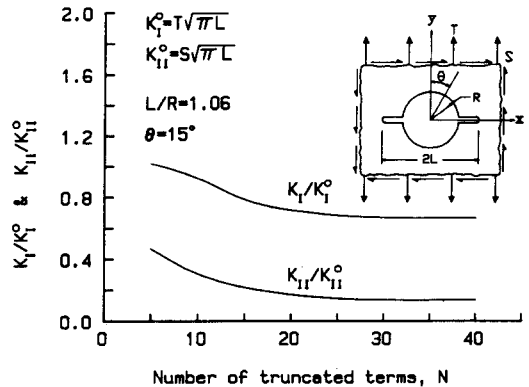


Fig. 3 Convergence curves for cracks emanating from a circular hole in an orthotropic infinite plate under combined stress

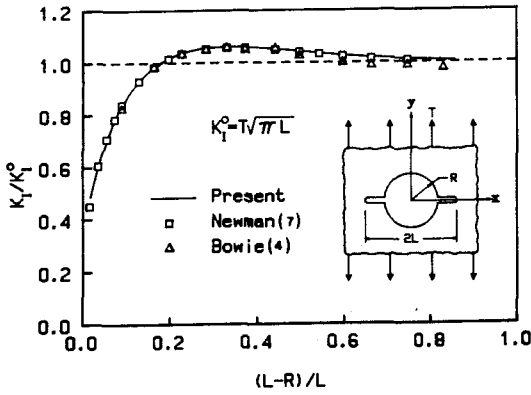


Fig. 4 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in an isotropic infinite plate under uniform tensile stress

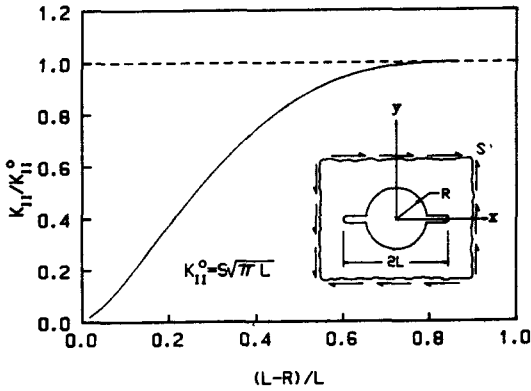


Fig. 5 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in an isotropic infinite plate under uniform shear stress

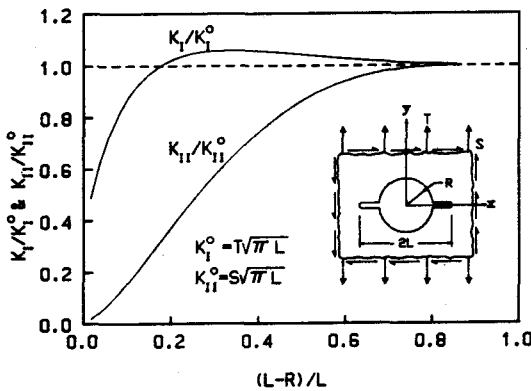


Fig. 6 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in an isotropic infinite plate under combined stress

에서 보여주고 있다. 전단 변형도와 수직 응력 그리고 전단 응력과 수직 변형도 사이에 연계성이 없으므로 Fig. 6의 결과는 Fig. 4와 5의 결과와 각각 일치하고 있다. 이 그림에서 모우드 I의 응력 강도 계수는 균열 길이에 대하여 급하게 증가하나 모우드 II의 응력 강도 계수는 완만하게 증가하고 있음을 알 수 있다. Fig. 7은 균일 인장 응력을 받고 있는 일방향 적층판 내부의 원공 주위 균열에 대한 결과를 여러가지 섬유방향에 대하여 보여주고 있다. 인장에 의해 모우드 II가 유기되고 균열 길이가 작은 경우에는 섬유 방향이 변함에 따라서 응력 강도 계수가 크게 다름을 알 수 있다. Fig. 8은 전단 응력을 받는 경우에 대한 결과인데, 전단에 의해 모우드 I이 발생하고 모우드 II의 응력 강도 계수는 섬유 방향이 변함에 따라서 균열

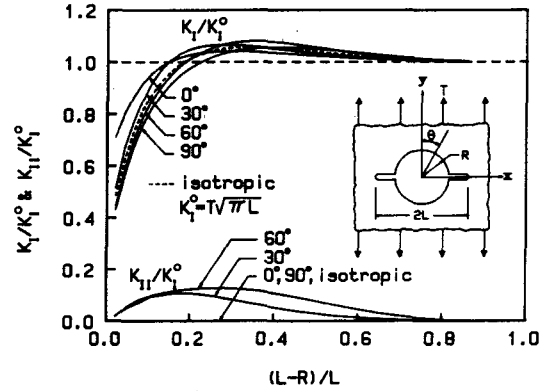


Fig. 7 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in glass/epoxy unidirectional laminate for various angles under uniform tensile stress

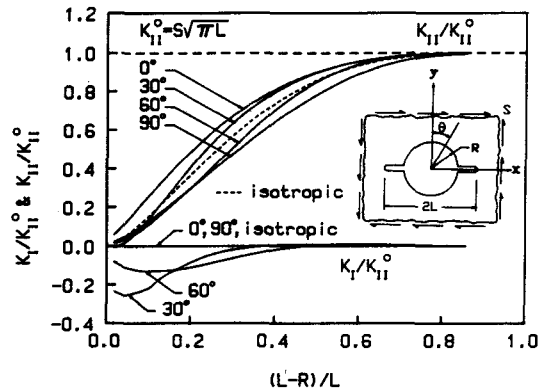


Fig. 8 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in glass/epoxy unidirectional laminate for various angles under uniform shear stress

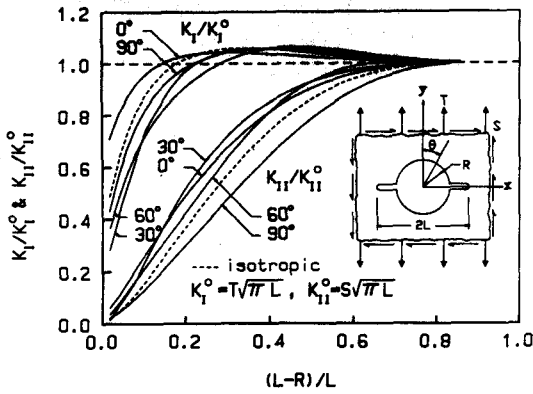


Fig. 9 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in glass/epoxy unidirectional laminate for various angles under combined stress

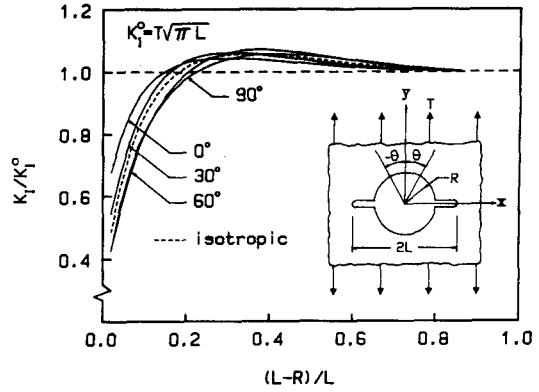


Fig. 11 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in glass/epoxy angle-ply laminate $[\pm\theta]_s$ under uniform tensile stress

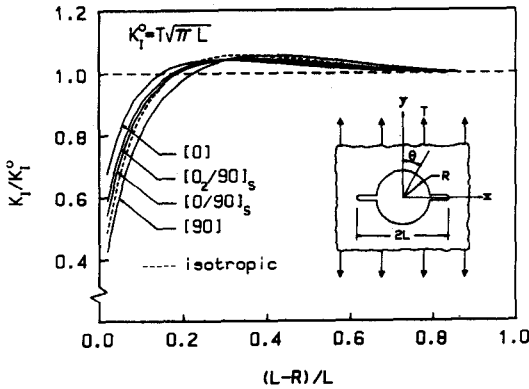


Fig. 10 Correction factors for cracks emanating from a circular hole in glass/epoxy cross-ply laminate $[0_n/90_m]_s$ under uniform tensile stress

길이 전방에 걸쳐 다음을 알 수 있다. Fig. 9는 복합 하중을 받는 경우에 대한 결과인데 Fig. 7과 8의 결과를 중첩하여 얻은 것과 같다. 본 해석에서는 인장 응력과 전단 응력을 같게 하여 계산하였는데 그 이유는 균열 선단의 특성에 미치는 영향으로서 이방성과 원공 경계만을 고려하고자 하기 때문이다. 섬유방향이 0도가 아니거나 90도가 아니면 전단 변형도와 수직 응력 그리고 전단 응력과 수직 변형도 사이에 연계성이 있다. 따라서, 섬유 방향이 0도나 90도가 아니면 인장에 의해 모드 II가 생기고 전단에 의해 모드 I이 생긴다. Fig. 10은 균열 인장 응력을 받고 있는 cross-ply 적층판에 대한 결과를 보여주고 있다. 여기에서 cross-ply 적층판이라 함은 섬유 방향 θ

가 0도와 90도인 층의 조합으로 이루어진 적층판을 말하는 것으로 대칭인 이들의 균열을 $[0_n/90_m]_s$ 로 나타내었다. 예로서, $[0/90]_s$ 는 적층 순서가 $[0/90/90/0]$ 인 적층판을 의미한다. Fig. 10을 보면 균열 길이가 작은 범위에서 모든 cross-ply 적층판의 경우에 대한 결과는 0도와 90도의 결과들 사이에 위치하게 됨을 알 수 있고, 0도 층이 많으면 많을수록 응력 강도 계수가 커짐을 알 수 있다. Fig. 11은 균열 인장응력을 받고 있는 angle-ply 적층판의 경우에 대한 결과를 보여주고 있다. 여기에서 angle-ply 적층판이라 함은 섬유 방향 θ 와 $-\theta$ 의 층이 교대로 적층된 판을 말하며, $[\pm\theta]_s$ 는 적층 순서가 $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$ 인 적층판을 간단하게 나타낸 것이다. Fig. 11을 보면 균열 길이가 작은 범위에서 응력 강도 계수는 섬유 방향이 변함에 따라 크게 다르고 60도 근처에서 최소가 됨을 알 수 있다.

5. 결 론

직교 이방성 무한 평판 내부의 원공 주위 균열에 대한 혼합 모드 응력 강도 계수를 수정 사상 선점법을 이용해서 구하였다. 해석 결과로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

- (1) 무한 평판 내부의 원공 주위 균열 문제를 해석함에 있어서 수정 사상 선점법의 응용이 가능하며, 특히 혼합 모드 해석에 유용하다.
- (2) 원공 주위 균열 문제에 있어서, 균열 길이에 대하여 모드 I의 응력 강도 계수는 급하게 증가한 후

거의 변화가 없지만 모우드 II의 응력 강도 계수는 균열 길이 전반에 걸쳐 완만하게 증가한다.

(3) 일방향 적층판의 경우에 있어서, 전단 변형도와 수직 응력 그리고 전단 응력과 수직 변형도 사이에 연계성이 있을 때 인장에 의해 모우드 II가 유기되고 전단에 의해 모우드 I이 유기된다. 섬유 방향이 변함에 따라서 모우드 I의 응력 강도 계수는 균열 길이가 작은 범위에서만 크게 다르나 모우드 II의 응력 강도 계수는 균열 길이 전반에 걸쳐 다르다.

(4) Cross-ply 적층판의 경우에 있어서, 균열 길이가 작은 범위에서는 모든 결과가 0도와 90도의 결과 사이에 위치하고 0도 층이 많을수록 응력 강도 계수는 크다.

(5) Angle-ply 적층판의 경우에 있어서, 균열 길이가 작은 범위에서는 섬유 방향이 변함에 따라 응력 강도 계수가 크게 다르고 60도 근처에서 최소이다.

(6) 등방성의 경우에 대한 결과를 얻기 위하여 새로운 해석을 할 필요가 없이 본 연구에 사용한 프로그램을 이용하면 등방성의 결과도 얻을 수 있다.

후 기

본 연구의 일부는 1986년도 한국과학재단 목적기초 연구의 일부로서 지원되었으며, 한국과학기술원 시스템공학센터와 한국 IBM사와의 협력사업인 SEC 컴퓨터 시스템 사용에 대하여 관계자 여러분께 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Sih, G.C., Paris, P.C., and Irwin, G.R., 1965, "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies", *Int'l J. of Fracture Mechanics*, Vol. 1, No. 3, pp. 189~203.
- (2) Lekhnitskii, S.G., 1968, "Anisotropic Plates, Gordon and Breach", Science Publishers, Inc., New York.
- (3) Savin, G.N., 1970, "Stress Distribution Around Holes", NASA TT F-607, Washington, D.C.
- (4) Bowie, O.L., 1956, "Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating at the Boundary of an Internal Circular Holes", *Int'l J. Math. and Physics*, Vol. 35, pp. 60~71.
- (5) Hsu, Y.C., 1975, "The Infinite Sheet with Cracked Cylindrical Hole under Inclined Tension or In-plane Shear", *Int'l J. of Fracture*, Vol. 11, No. 4, pp. 571~581.
- (6) Shivakumar, V., and Forman, R.G., 1980, "Green's Function for a Crack Emanating from a Circular Hole in an Infinite Sheet", *Int'l J. of Fracture*, Vol. 16, pp. 305~316.
- (7) Newman, J.C., Jr., 1971, "An Improved Method of Collocation for the Stress Analysis of Cracked Plates with Various Shaped Boundaries", NASA TN D-6376.
- (8) Tweed, J., and Rooke, D.P., 1973, "The Distribution of Stress Near The Tip of a Radial Crack at the Edge of a Circular Hole", *Int'l J. of Engineering Science*, Vol. 11, pp. 1185~1195.
- (9) Tweed, J., and Rooke, D.P., 1976, "The Elastic Problem for an Infinite Solid Containing a Circular Hole with a Pair of Radial Edge Cracks of Different Lengths", *Int'l J. of Engineering Science*, Vol. 14, pp. 925~933.
- (10) Konish, H.J., and Whitney, J.M., 1975, "Approximate Stresses in an Orthotropic Plate Containing a Circular Hole", *J. of Composite Materials*, Vol. 9, pp. 157~166.
- (11) Hong, C.S., and Crews, J.H., Jr., 1979, "Stress Concentration Factors for Finite Orthotropic Laminates with a Circular Hole and Uniaxial Loading", NASA Technical Paper 1469.
- (12) Chang, F.K., Scott, R.A., and Springer, G.S., 1984, "Failure of Composite Laminates Containing Pin Loaded Holes-Method of Solution", *J. of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 255~278.
- (13) Nuismer, R.J., and Whitney, J.M., 1975, "Uniaxial Failure of Composite Laminates Containig Stress Concentrations", *Fracture Mechanics of Composite*, ASTM STP 593, pp. 117~142.
- (14) Waddoups, M.E., Eisenmann, J.R., and Kaminski, B.E., 1971, "Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials", *J. of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 446~454.
- (15) Wang, S.S., and Yau, J.F., 1980, "An Analysis of Cracks Emanating from a Circular Hole in Unidirectional Fiber-Reinforced Composite", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 13, pp. 57~67.

- (16) Bowie, O.L., and Neal, D.M., 1970, "A Modified Mapping Collocation Technique for Accurate Calculation of Stress Intensity Factors", *Int'l J. of Fracture Mechanics*, Vol. 6, pp. 199~206.
- (17) Bowie, O.L., and Freese, C.E., 1972, "Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet", *Int'l J. of Fracture mechanics*, Vol. 8, No. 1, pp. 49~58.
- (18) Gandhi, K.R., 1972, "Analysis of an Inclined Crack Centrally Placed in an Orthotropic Rectangular Plate," *J. of Strain Analysis*, Vol. 7, No. 3, pp. 157~162.
- (19) Sih, G.C., 1973, *Mechanics of Fracture*, Vol. 1, Ed. by Sih, G.C., Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, pp. 13~20.
- (20) Sih, G.C., and Liebowitz, H., 1978, *Fracture*, Vol. II, Ed. by Liebowitz, H., Academic Press, New York, pp. 67~190.