

<論 文>

領域適應法을 利用한 彈性體 形狀의 最適設計

鄭 均 陽*

(1986年 9月 15日 接受)

Shape Optimal Design of Elastic Structures by the Domain Adaptive Method

Kyoon Yang Chung

Key Words : Shape Optimal Design(형상 최적설계), Local Constraint(국부 제한), Mutual Energy(상호 에너지), Domain Adaptation(영역적응), Grid Adaptation(격자 적응)

Abstract

The solution of shape design problems based on variational analysis has been approached by using the domain adaptive method. The objective of the structural shape design is to minimize the weight within a bound on local stress measure, or to minimize the maximum local stress measure within a bound on the weight. A derived optimality condition in both design problems requires that the unit mutual energy has constant value along the design boundary. However, the condition for constant stress on the design boundary was used in computation since the computed mutual energy oscillates severely on the boundary.

A two step iteration scheme using domain adaptation was presented as a computational method to solve the example designs of elastic structures. It was also shown that remeshing by grid adaptation was effective to reduce oscillatory behavior on the design boundary.

1. 서 론

최적 형상 설계는 형상 그 자체가 결정되어야 할 설계 변수라는 점에서 기하학적으로 고정된 부재 치수의 최적화 문제와는 달리 취급될 수 있다. 대부분의 형상 설계에서 형상의 변화와 목적 함수 또는 구속조건들과의 관계는 비선형이기 때문에 민감도 해석을 사용하여 이러한 비선형 관계식을 개략화시킨다. 즉 목적함수나

구속조건을 설계변경에 대하여 1차미분시키는 방법이다. 현재까지 형상설계에 이용된 민감도 해석법은 크게 두가지 방법으로 나누어진다. 첫째 방법은 유한요소해석의 한 과정으로 민감도를 계산하는 것인데 주로 Zienkiewicz 와 Campbell⁽¹⁾, Francavilla 등⁽²⁾, Braibant 와 Fleury⁽³⁾에 의하여 수행되었다. 둘째 방법은 목적함수 또는 제한조건식의 설계민감도를 해석적으로 표현하거나 최적조건 (optimality condition)의 명확한 형태를 구하는 것이다. 이 방법은 주로 Choi 와 Haug⁽⁴⁾, Dems 와 Morz⁽⁵⁾ 그리고 Banichuk⁽⁶⁾들에 의해 사용되

* 正會員, 現代重工業(株) 船舶海洋研究所

있는데 변분법에 의하여 민감도를 연속 형태로 나타내었다. 이상과 같이 이론적인 해석법은 비교적 잘 정립되어 있으나 최적형상설계의 수치계산 분야, 나아가서 실제 설계에의 적용에는 해결해야 할 어려움이 있다. 응력이 집중된 부근이나 기하학적인 구속이 가해진 경계면에서 발생하는 불규칙한 형상도 그중의 하나이다. 본 논문에서는 변분법으로 유도한 최적조건을 수치계산에 적용키 위해 영역적응법이 사용되었으며 불규칙한 형상의 방지에는 격자 적응법이 제시되었다. 설계문제로는 '국부 응력치의 일정 한도내에서 구조물 무게의 최소화' 또는 대등한 문제로 '제한된 구조물의 무게 한도내에서 최대 국부응력치의 최소화'를 다루었다.

2. 수학적 해석 및 적용

2.1 필요조건들의 유도

본 절에서는 Lagrangian Formulation에 의한 약변분(weak variation)을 사용하여 최적화문제의 최적조건을 유도해 보기로 한다. 특히 목적함수나 구속조건이 국부 응력치인 문제를 다루었다. Fig. 1에서와 같은 탄성체의 형상설계문제에서 설계면 Γ_{d1} , Γ_{d2} 는 자유경계 Γ_0 의

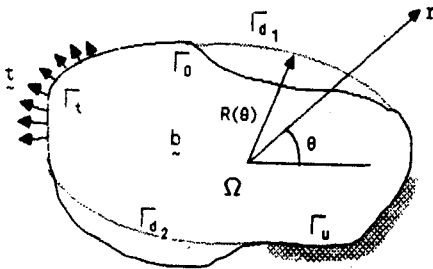


Fig. 1 Shape design model

일부분이고, $R(\theta)$ 는 설계면들의 극좌표계 반경방향 위치이다. 범함수 F 의 최소화 문제는 대표적인 예로서

$$\text{Minimize } [F = \int_{\Omega} f(u, \nabla u) d\Omega] \quad (2)$$

Subject to

$$(1) a(u, v) - 1(v) = 0 \text{ in } \Omega \text{ for any } u \in U, v \in U_0 \quad (3)$$

$$(2) \int_{\Omega} d\Omega - \bar{A} \leq 0 \quad (4)$$

$$(3) \underline{R}(\theta) \leq R(\theta) \leq \bar{R}(\theta) \text{ on } \Gamma_d \quad (5)$$

여기서는 \bar{A} , $\underline{R}(\theta)$, $\bar{R}(\theta)$ 들은 주어진 값들이며 구속조건 (3)은 상태식(state equation)과 경계조건을 가산

변형원리(principle of virtual displacement)의 변분형으로 표시한 것인데 $a(u, v)$ 는 에너지의 bilinear 형태이고 $1(v)$ 는 bounded linear form이다. 변위 벡터 u 는 kinematically admissible 한 공간 U 에 속하고 가상변위벡터 v 는 U 의 homogeneous 공간인 U_0 , 즉 $U_0 = \{v | v_i = 0 \text{ on } \Gamma_i\}$ 에 속한다. 구속조건(4)와 (5)는 각각 재료의 일정치 구속조건 및 설계변수 $R(\theta)$ 의 기하학적 한계구속 조건이다.

최소화문제의 Lagrangian 은

$$L(u, A, \lambda) = \int_{\Omega} f(u, \nabla u) d\Omega + A_1 [a(u, v) - 1(v)] + A_2 \left[\int_{\Omega} d\Omega - \bar{A} \right] + \int_{\Gamma_d} [\lambda_1 (R - \underline{R}) + \lambda_2 (R - \bar{R})] d\Gamma \quad (6)$$

여기서 A_1, A_2 는 불변인, λ_1, λ_2 는 변화 가능한 Lagrange 승수들이다.

Lagrangian L 의 안정치(stationary value)를 갖기 위한 필요조건은 변위 u 와 설계변수 $R(\theta)$ 에 대한 약변분을 이용하여 구할 수 있다.

$$\Delta L = L(u + \epsilon w, R + \epsilon \hat{R}, A, \lambda) - L(u, R, A, \lambda) \quad (7)$$

식 (7)에서 ϵ 은 임의의 정수의 파라미터이고 $w(x)$ 와 $\hat{R}(\theta)$ 는 $u + \epsilon w$ 와 $R + \epsilon \hat{R}$ 이 admissible하다는 조건에 제한을 받는 연속 함수들이다. Lagrange 승수에 대한 변분은 여기서 고려되지 않는 대신 Kuhn-Tucker 조건으로 취급하였다. 또 외력 t 와 body force b 의 변분도 고려 대상에서 제외시키고 Taylor 식 전개 및 고차항 무시, 부분적분을 이용하면 $\Delta L = 0$ 의 필요조건들은 식 (8)부터 식 (11)과 같이 유도된다.

$$-\sigma_{ij}(v),_{j} = -\frac{\partial f}{\partial u_i} - \left[-\frac{\partial f}{\partial u_{i,j}} \right],_{j} \text{ in } \Omega \quad (8)$$

$$v = 0 \text{ on } \Gamma_u \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}(v) n_j = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{i,j}} \right) n_j \text{ on } \Gamma_d \quad (10)$$

$$\sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) - f = A_2 = \text{constant on } \Gamma_d \quad (11)$$

식 (8)은 adjoint variable $v(v \in U_0)$ 에 대한 식이고 식 (9)와 (10)은 adjoint system의 경계조건식들이다. body force와 기하학적 구속조건이 없는 경우 위의 최소화문제의 최적조건은 식 (11)식과 같이 얻어지는데 이 결과는 참고문헌 (4, 5, 6)의 민감도 해석에서도 똑같은 형태로 나타낼 수 있다. 경계면의 변환(transformation)이 각각 다른 형태로 표기되었으나, 즉 $x_i = x + t(x)$ in Ω , (Choi and Haug), $x_i = x + \phi(x)$ in Ω , (Dems and Mroz), $x_i = x + \delta_r$ on Γ (Banichuk), $x_i = R + \epsilon \hat{R}(\theta)$ (펠자), 민감도의 결과 또는 최적 조건의

마지막 형태는 모든 경우에 똑같다. 그러나 경계면내 (경계면을 포함하지 않은 영역)에서의 민감도가 필요한 경우에는 Choi와 Haug의 결과가 유용하다.

2.2 적용가능문제

앞절에서 유도한 최적조건은 탄성체의 형상설계에서 일반적인 목적함수(예 ; mean compliance, 중량, 응력, 변위등)의 최소화에 적용가능하다. 그중에서, 가장 흔히 쓰이는 목적함수로서 구조물의 중량 및 국부 응력 두 경우를 본절에서 다루었다. 많은 경우에 중량물의 최소화 문제는 국부응력에 대한 구속조건을, 국부응력의 최소화 문제는 중량의 제한인 일정조건 (isoperimetric constraint)을 수반하기 마련이다. 즉

$$\text{Min}_{\Gamma_d} (\text{Area} = \int_{\Omega} dQ) \text{ s.t. } |F(u, \nabla u) - \beta| \leq 0 \text{ in } \Omega \quad (12)$$

와

$$\text{Min}_{\Gamma_d} \{ \text{Max}_{x \in \Omega} |F(u, \nabla u)| \} \text{ s.t. } \int_{\Omega} dQ - \bar{A} \leq 0 \text{ in } \Omega \quad (13)$$

식들로 표기되는데 F 는 국부치(응력 또는 변위)이며 β 와 \bar{A} 는 국부치나 면적의 한계치이다. 식 (13)은 다음과 같은 문제로 치환될 수 있다⁽⁷⁾.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min}_{\Gamma_d} \beta \\ \text{Subject to } \int_{\Omega} dQ - \bar{A} \leq 0 \\ |F(u, \nabla u)| - \beta \leq 0 \text{ in } \Omega \end{array} \right\} (14)$$

앞절에서 다른 유도방법으로 최소 또는 최대값을 갖기 위한 Lagrangian L 의 필요조건((12)와 (14)의 상한식만 이용)들은

$$1 - \int_{\Omega} \lambda_1 dQ = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \sigma_{ij}(v),_{j} = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} - \left[\lambda_1 \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right],_{j} \text{ in } \Omega \\ v = 0 \text{ on } \Gamma_d \\ \sigma_{ij}(v) n_j = \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j \text{ on } \Gamma_0 \text{ and } \Gamma_1 \end{array} \right\} (16)$$

$$A_1 [\sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) - b_i v_i] + \lambda_1 (F - \beta) = -A_2 \text{ on } \Gamma_d \quad (17)$$

$$\lambda_1 (F - \beta) = 0; \lambda_1 \geq 0, F - \beta \leq 0 \text{ in } \Omega \quad (18)$$

식 (15)는 문제 (14)의 경우에만 유도되며 Lagrange 승수 λ_1 의 normalization을 나타낸다. 또 문제 (12)의 경우엔 식 (17)의 A_2 가 1로 나타나므로 최적조건 (17)은 body force가 없는 경우

$$\sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) = -\frac{1}{A_1} = \text{Constant on } \Gamma_d \quad (19)$$

즉 ‘단위 상호에너지 (specific mutual energy)는 설계면에서 일정값을 갖는다’이다. 문제 (14)에서 면적 구속에 연관된 Lagrange 승수 A_2 를 1로 지정한다면 두 최소화문제 (12)와 (13)의 최적조건이 서로 일치한다. 이는 ‘행동구속조건 (behavioural constraint)을 가진 면적의 최소화’문제와 ‘면적구속조건을 가진 최대 목적함수의 최소화’문제는 동일하게 취급될 수 있음을 보여 주는 것이다. 즉 두 문제에서 같은 면적에 대하여는 β 의 값도 서로 같게 된다.

2.3 계산상의 유용한 최적조건

국부치를 다루는 최소화 문제에서 유도된 최적조건은 단위상호에너지 (unit mutual energy)가 설계면에서 일정하여야 함이다. 상호에너지의 계산과정은 어렵지 않다. 왜냐하면 adjoint equation은 원래의 유한요소 해석과정에서 구한 강성행렬을 그대로 사용할 수 있는 편의를 제공하기 때문이다. 그러나 필자의 경험에 의하면 계산된 설계면상의 상호에너지 값은 너무 크게 변동 (oscillate)하므로 비현실적인 형상결과를 초래한다. 이러한 현상은 adjoint system 식 (16)의 우변항이 Dirac Delta 함수로 표시되는 응력 텐서의 일차 미분항을 가지고 있기 때문이다.

또한 만일 전 영역 Ω 에서 $\lambda_1=0$ 으로 가정한다면 식 (16)에서 $v=0$ 이 되고 이에 식 (17)과 (18)은 모순이 된다. 그러므로 전 영역 Ω 의 적어도 한 부영역 Ω_s 에서 $\lambda_1 > 0$ 이어야 하고, 따라서 Ω_s 에서 식 (18) 즉 $F - \beta = 0$ 임이 증명된다. 이는 국부치의 상한 (upper bound)이 만족되어야 한다는 결과로서 단지 설계면에서만 최대 응력을 취급한다는 가설을 합리화시켜주는 근거이다. 모든 경계면이 설계면이라면 설계문제는 ‘전 응력설계 (fully stress design)’가 된다. 이러한 전 응력설계는 두께가 일정한 일반구조물에서는 거의 기대할 수 없다. 만약 최대응력이 설계면 밖에서 일어난다면 형상 설계는 간접적인 방법으로만이 가능하지만 반드시 최적해로 수렴하지는 않는다.

3. 수치 계산법

3.1 영역 적용법

많은 자유경계문제에서와 같이 탄성체의 형상 설계에도 영역적응법이 쓰일 수 있다. 대부분의 경우 영역 적용 개념은 최적 조건을 만족시키기 위한 2단계 반

복과정에 사용된다. 즉 첫단계에서는 설계형상이 고정되었다는 가정하에 구하고자 하는 값들을 유한요소법을 이용하여 계산하고 둘째 단계에서는 계산된 값과 주어진 또는 가정된 값의 차에 비례하여 유한요소의 절점을 이동시킨다. 두가지 설계문제 (12)와 (13)의 최적조건은 설계면에서 일정한 값을 가지는 응력임을 앞장에서 설명하였다. 이 조건을 주어진 오차내에서 만족시키는 최종형상으로 수렴되도록 설계면을 이동하는 것이 둘째 단계의 방법이다. 간단히 그 이동 과정을 설명하기로 한다.

설계면상의 N 개의 절점의 새 위치는 k 차 반복과정에서

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta x_i^k \quad i=1, \dots, N \quad (20)$$

여기서 Δx_i^k 는 주어진 방향으로의 절점의 이동량이며 값은 경계면에 수직인 방향으로의 이동량 Δx_{ni} 로부터

$$\Delta x_i = \frac{\Delta x_{ni}}{\cos \theta_i} \quad (21)$$

로 얻어지는데 θ_i 는 절점 i 에서 단위수직벡터 n_i 와 주어진 방향으로의 단위방향벡터 α_i 사이의 각을 나타낸다(Fig. 2).

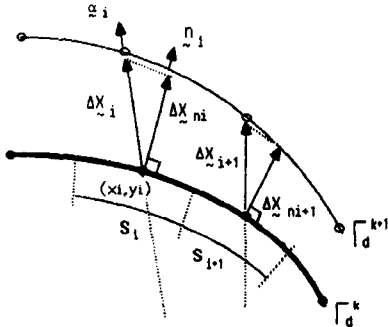


Fig. 2 Domin adaptive method

편의상 반복차수 k 를 생략하고 표기하기로 한다. k 차 반복에서 절점 i 에서의 수직 이동량 Δx_{ni}

$$\Delta x_{ni} = \frac{\Delta A_i}{S_i} \quad (22)$$

$S_i = 1/2(1_{i-1} + 1_i)$ 에서 얻을 수 있다.

식 (22)에서 ΔA_i 는 절점 i 에 할당된 면적이고 1_i 는 설계면상 i 번째 요소의 길이를 나타낸다. 할당 면적 ΔA_i 는 k 차 반복과정중 유한요소법으로 계산한 응력

$F(\sigma)$ 값과 주어진 값 β (Min (max F)의 경우 $F(\sigma)$ 의 평균값으로 가정)와의 비율로부터 구할 수 있다. 즉

$$\Delta A_i = \Delta \text{Area} \left[\frac{\frac{F_i - \beta}{\beta} S_i}{\sum_{i=1}^N \left| \frac{F_i - \beta}{\beta} \right| S_i} \right] \quad (23)$$

F_i 는 절점 i 에서의 $F(\sigma)$ 이며 ΔArea 는 설계면 Γ_d^{k+1} 과 Γ_d^k 사이의 면적이다.

ΔArea 값은 초기 반복에서 충분히 크고 반복이 진행됨에 따라 점차 적어지도록 수렴시키기 위하여 '최적해로부터의 퍼센트 오차'를 다음과 같이 L^2 norm을 사용하여 정의한다.

$$DTP = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(S_i \frac{F_i - \beta}{\beta} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{1}{\bar{S}} \quad (24)$$

\bar{S} 는 설계 면상요소들의 평균 길이로서

$$\bar{S} = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N S_i \right] \quad (25)$$

이로 ΔArea 값은 DTP 를 이용하여

$$\Delta \text{Area} = (\text{전영역 면적}) * C * DTP^2 \quad (26)$$

로 정의한다. 경험에 의하면 C 는 0과 1.0사이의 값으로 문제에 따라 또 수렴속도에 따라 달라진다. C 값이 크면 클수록 수렴 속도는 빨라지나 경계면의 모양은 물론 퍼센트 오차 DTP 도 불규칙하게 진동한다. 반면에 C 값이 적으면 수렴속도도 느려지므로 적합한 값은 적용과정에서 조절되어야 한다. 이상의 algorithm은 영역 Ω 의 면적이 감소되는 방향으로 절점이 이동되도록 구성되었으므로 필요조건인 최적조건만이 쓰였지만 반복되는 과정은 자동적으로 최소값만을 도출하게 하였다.

3.2 격자 적응법(Grid Adaptation)

형상설계 문제의 처리에는 유한요소법의 사용이 보편화되었으나 유한요소법의 근사해가 형상설계에 미치는 영향은 거의 다루어지지 않았다. 특히 반복과정을 이용한 수치 계산중 응력 집중 부근이나 기하학적으로 곡률이 부과된 근방에서 불규칙한 형상이 일어나기 쉽고 영역 적응 과정중 찌그러진 또는 나란히꼴 모양의 4절 유한요소들은 더욱 오차가 심한 근사해를 도출하게 되어 역시 불규칙한 형상이 일어난다. 이렇게 찌그러진 요소들에 의한 근사해의 interpolation error 계산은 참고문헌 (8)에서 상세히 설명되었다, 불규칙한 형

상의 방지엔 spline 곡선등을 이용한 parametric 표현방법들이 많이 쓰이고 있으나 이러한 방법으로는 복잡한 형상을 표현하는데 어려움이 있을 뿐 아니라 일그러진 요소가 형상 설계에 미치는 영향을 감지하기 어렵다. 본문에서는 그러한 규칙 구속(regularity constraint)을 사용하는 대신 영역 적응과정중 불규칙 형상이 일어나면 격자 적응법을 이용한 유한요소의 자동재배치를 한 후 다시 영역 적응과정을 계속하여 매끄러운 형상으로 수렴토록 하였다.

Babuska 등 참고문헌 (9, 10)에 의해 발견된 격자 적응법에는 크게 r, h, p 3 가지 방법이 있으나 그중 r -방법만을 간단히 소개한다. 유한요소의 근사해 오차를 E_e 로 정의하고 이 오차를 최소화시키도록 절점을 재배치하는 문제를 생각하면

$$\text{Min node relocation} \quad \{ \text{Max}_{e=1, \dots, E} E_e \} \quad (26)$$

와 같이 되며 E 는 요소의 총 숫자이다. 이 문제의 필요조건은

$$E_e = \text{constant} \quad e=1, \dots, E \quad (27)$$

이므로 조건 (27)을 만족하도록 절점을 재배치 하면 된다. 계산가능한 오차 E_e 의 선별에 관한 연구는 참고문헌 (8)에 소개되었으므로 자세한 설명은 생략키로 한다.

4. 선형탄성체의 최적 형상설계 예

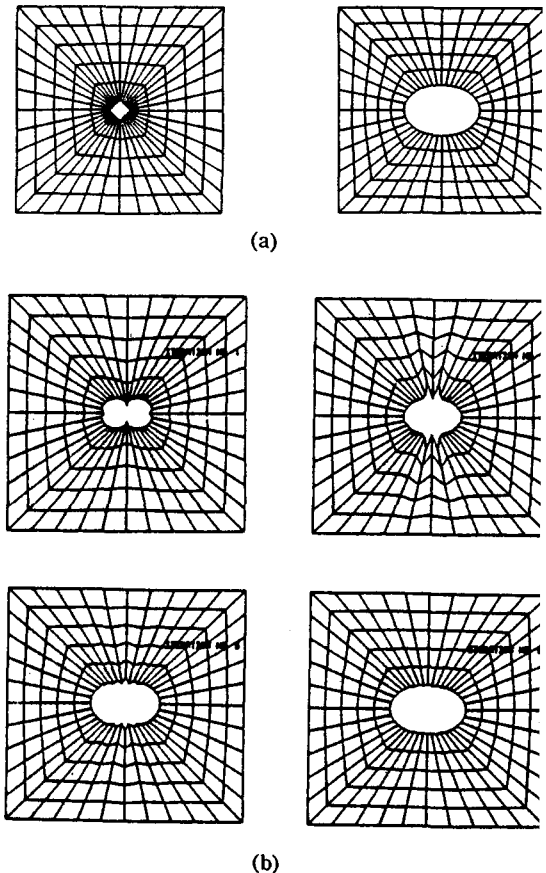
앞장에서 제시된 영역적응법을 2 단계 반복과정에 이용하여 최적조건(설계면에서 일정한 응력 분포)을 만족하도록 프로그램이 마련되었는데 특히 반복과정중 격자적응이 사용자의 선택에 따라 자동적으로 이루어지게 구성되었다. 본절에서는 수치계산이 탄성체의 형상 설계에 이용된 3 가지 예를 제시하였는데 von Mises 등가 응력이 목적함수 또는 구속조건으로 사용되었다.

4.1 사각 평판에서의 타원형 구멍

이 예제는 가장 기초적인 형상설계 예제로 서로 다른 인장이 수직과 수평 바깥 경계면에 2 대 3의 비율로 분포되어 있다. 무한 평판에 대한 해석적인 해는 수평과 수직 인장비를 가지는 타원이다(Banichuk⁽⁶⁾). 반이나 1/4 모델을 사용하지 않고 전 평판을 모델로 한 이유는 Braibant 와 Fleury⁽³⁾가 지적한 불규칙 형상을

조사하기 위함이었는데 실제로 1/4 모델에서 불규칙한 현상이 제일 적었다. 이는 대칭면에서 자유도의 제한이 설계과정의 불규칙한 현상에 영향을 미친다는 것을 설명해 준다.

Fig. 3에는 반복과정에서의 형상이 나타나 있다. 매우 큰 불규칙 형상이 곧 없어져 가고 마침내 타원형으로 수렴되었다. 경계 규칙 구속(boundary regularity constraint)이나 격자 적응법을 사용하지 않고 영역 적응법만으로도 불규칙한 형상이 없어진 현상은 아마도 설계면인 내부 구멍에 기하학적 구속조건이나 응력 집중이 없는 때문인 것으로 판단된다. 또한 ‘면적의 최소화’ 경우와 ‘최대 응력의 최소화’ 문제는 동일한 결과 (같은 면적과 같은 최대 응력)를 보여 주었는데 Fig. 4 와 같이 ‘최대 응력의 최소화’ 경우가 더 빠르고 안정된 수렴 과정을 보여 주었다. 즉 2 대 3의 수



(a) Initial and final shapes
(b) Iteration history of converging shapes

Fig. 3 Shape design of a hole in plate

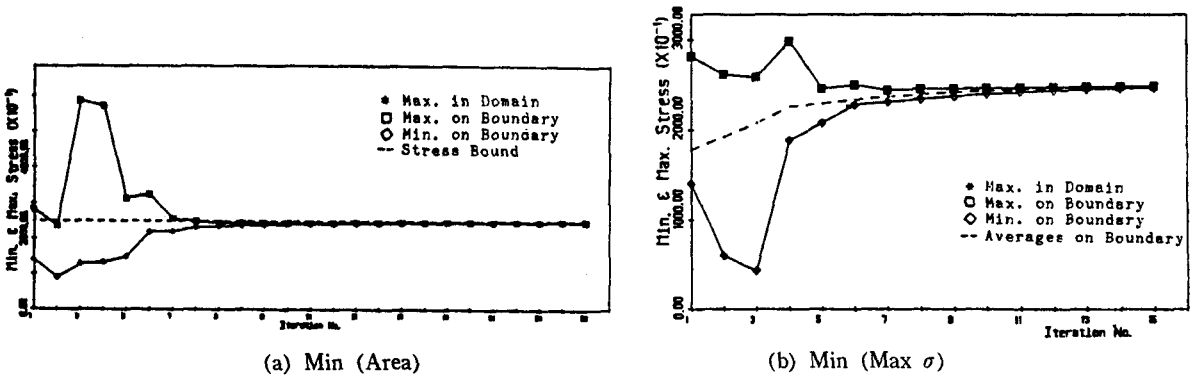


Fig. 4 Converging characteristics

직 수평축 타원과 5% 이내 오차를 갖는 형상으로 수렴하기까지는 각각 25번과 15번의 반복과정이 필요하였다.

4.2 필렛 설계

탄성체의 형상 설계에서 필렛 (fillet)설계는 가장 많이 다루어진 문제중의 하나로서 대부분의 경우 스플라인 (spline)을 이용한 곡선의 규칙 조건이 많이 사용되어 왔다. 본 예제에서는 설계면 좌우에 기하학적 구속 조건이 가해졌을 경우와 좌측에만 구속조건이 가해졌을 경우를 비교하였다. 만일 설계면 주위에 아무 구속 조건도 없이 필렛의 형상 설계를 한다면 그 결과는 직사각형과 같은 바아(bar)모양이거나 이와 면적이 같

은 무수한 단조(fiber)의 조합이 될 수도 있을 것이다. 영역 적응법을 이용하여 수렴시킨 형상이 Fig. 5에 제시되었는데 설계면에서의 응력은 일정하게 분포되었으나 구속 조건이 가해진 부근에 불규칙형상이 나타나 있다. 또한 이 불규칙한 형상은 매우 미세한 유한요소를 사용한 경우에도 제거되지 않았다. 이러한 경우 앞에서 제시한 r 방법을 이용한 격자 적응기법이 적용되었다. Fig. 6은 반복과정 중 격자를 변경한 2차도면이며 영역 적응법을 이용하여 수렴시킨 마지막 결과 (Fig. 7)에는 불규칙형상이 소생되지 않았다.

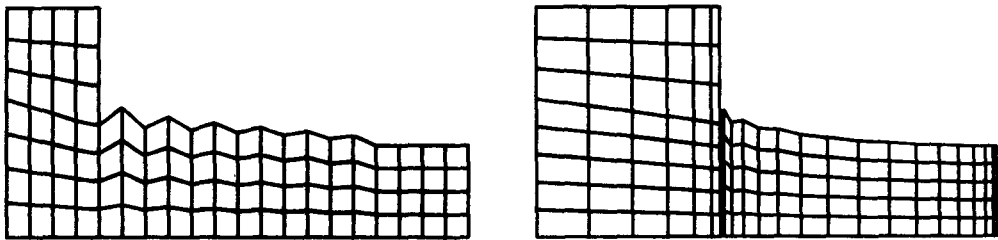


Fig. 5 Converged shapes with irregularity

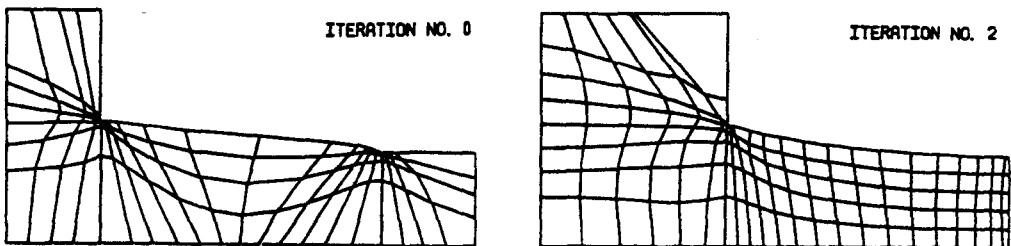


Fig. 6 Remeshed second initial grid by r-method

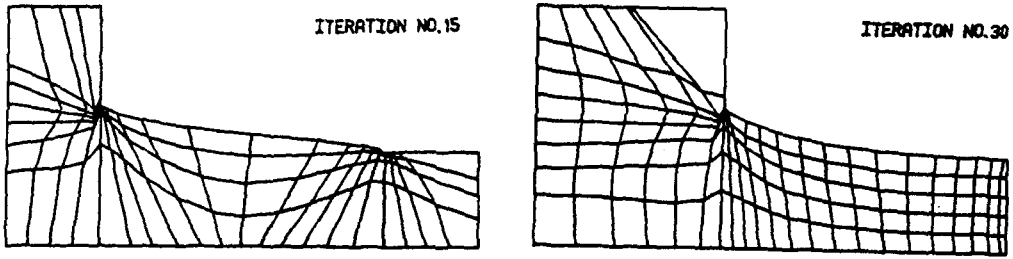


Fig. 7 Converged shape from the remeshed model

4.3 삼각 브래킷의 형상 설계

Fig. 8에 도시된 브래킷(bracket)중량의 최소화 문제는 참고문헌 (11)에서 다루어 졌는데 본 연구에서도 같은 경계조건을 사용 영역 적응법을 적용하여 보았다. 2개의 설계면, 즉 외부(1st boundary)와 내부(2nd boundary)면상의 절점을 이동시켜 무게를 최소화시키는 과정이 나타나 있다. 국부 응력의 허용치는 항복 응력인 $\sigma_s = 8 \times 10^4 N/cm^2$ 을 취하였고 3개원들의 절점들에는 미끄럼 경계 조건을 가하였다. 편의상 원들에서의 접촉 문제는 다루어지지 않았고 상단의 원에 수평으로 작용하는 집중하중을 대등한 분포하중으로 환산하여 절점에 가하였다. Fig. 9에 3개원의 두께가 영으로 가까이 가며 설계면에서 불규칙한 형상들이 나타나 있다. 이 상태에서 계속 계산을 진행한다면 브래킷의 중량은 줄어들겠지만 매우 불합리한 형상으로 수렴될 것이다. 그리하여 3개의 원에 최소 두께를 유지하 기끔 구속 조건을 가하고 반복 계산중간에 least square

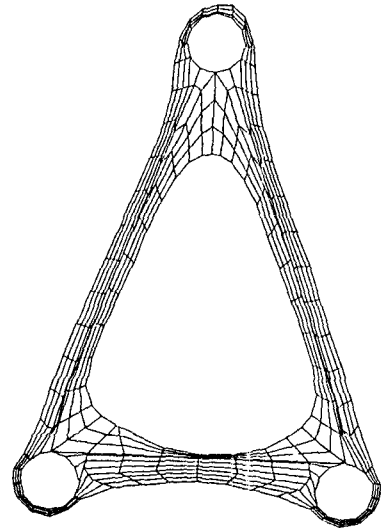
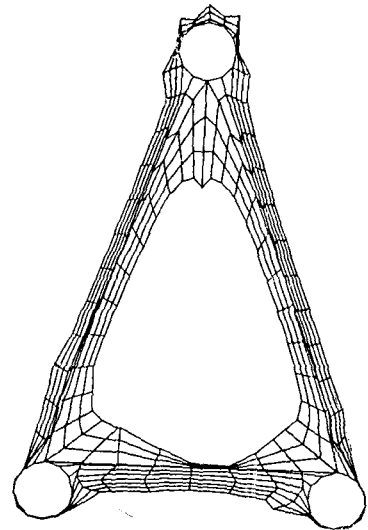


Fig. 9 Shape design of a bracket without and with design restriction on the circle thickness and on the smoothness.

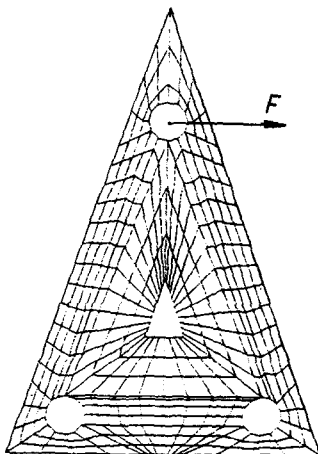


Fig. 8 FEM model of a bracket design

method를 이용한 smoothing scheme을 사용하면 그 결과는 Fig. 9에 나타난 바와 같으나 아직 완전히 수렴된 결과는 얻지 못하였다. 즉 그림에 나타난 결과는 중량이 약 1/3로 줄어들긴 하였으나 최적 조건(경계면에서 일정 응력)과의 편차는 80%에서 40%로 줄인 데 불과하였다.

이 예제는 절점 이동 방향 설정에 많은 어려움이 있어 영역 적응과정중 유한요소가 일그러지는 경우가 많았으며 실제 경계면상에 응력 집중이나 기하학적 구속이 없었지만 경계면이 불규칙하게 되는 경향이 있었다. 이는 3개의 원에 가해진 미끄름 경계 조건 탓으로 추측되나 이러한 어려움을 극복하고 완전히 수렴된 결과를 얻기 위해선 아마도 훨씬 많은 수의 유한 요소를 적절히 배치한 초기 모델을 사용하거나 영역 적응 과정에서 격자 적응 이외의 또다른 기법을 이용한 요소의 자동 재배치가 필요할 것이다.

5. 결 론

본 연구에서는 국부 응력치를 취급하는 형상 설계 문제가 어느정도 취급될 수 있는지를 보여 주었다. 필요 조건의 하나로 상호 에너지 대신 일정 응력 조건이 쓰였으며 유한요소법과 영역적응법이 조합되어 2단계 반복과정으로 형상 설계에 사용되었다. 유한요소의 배치 및 응력 집중에 따라 불규칙한 형상이 설계면의 끝단 및 응력 집중부위에 나타나는 경우, 유한요소의 적절한 배치를 위한 격자적응(grid adaptation)을 영역 적응 중에 적용함으로써 해결될 수도 있음을 보였다. 제시된 두 예제에서는 영역 적응기법이 성공적으로 사용될 수 있는 간단한 예이었으나 마지막 예인 브래킷 설계의 경우 영역 적응이 현재 적용될 수 있는 한계를 보였다. 앞으로 영역 적응법을 이용하여 더욱 복잡한 형상 및 많은 제한 조건을 가진 형상 설계를 풀려면 다음과 같은 분야의 연구가 지속되어야 한다.

(1) 적합한 절점이동 방향 : 이동 방향을 적절히 선정함으로써 요소들이 과도하게 굴곡되는 현상을 어느 정도 막고 수렴 속도를 증가시킬 수 있다.

(2) p -방법을 이용한 요소의 재배치 : 경계면에서의 불규칙한 형상 방지에 r -격자적응법이 쓰였으나 이와 같이 재배치된 절점들은 이동 방향 설정에 어려움이 있으므로 p -방법을 이용한 재배치의 연구가 효과적일 것으로 판단된다.

(3) Elliptic 요소 생성에 의한 재배치 : Thompson 등⁽¹²⁾이 제안한 elliptic 요소 생성으로 경계면에 수직한

요소들을 반복제산시 재배치하여 경계면에 수직으로 절점들을 이동하는 방법이 쓰인다면 절점이동 방향 설정에 어려움이 있는 영역 적응법이 보완될 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

- (1) O.C. Zienkiewicz and J.S. Campbell, Shape Optimization and Sequential Linear Programming, Chap. 7 in Optimum Structural Design (eds: Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C.), Wiley, London, 1973
- (2) A. Francavilla, C.V. Ramakrishnan and O.C. Zienkiewicz, "Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration", J. Strain Analysis, Vol. 10, No. 2, pp. 63~70, 1975
- (3) V. Braibant and C. Fleury, "Shape Optimal Design Using B-Splines", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 44, pp. 247~267, 1984
- (4) K.K. Choi and E.J. Haug, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures", J. Struct. Mech., Vol. 11(2), pp. 231~269, 1983
- (5) K. Dems and Z. Mroz, "Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis- II", Int. J. Solids and Structures, Vol. 20, No. 6, pp. 527~552, 1984
- (6) N.V. Banichuk, Problems and Methods of Optimal Structural Design, Translated by Komkov, V. and Haug, E.J. Plenum Press, New York, 1983
- (7) J.E. Taylor and M.P. Bendsøe, "An Interpretation for Min-Max Structural Design Problems Including a Method for Relaxing Constraints", J. Solids and Structures, Vol. 20, No. 4, pp. 301~314, 1984
- (8) N. Kikuchi, K.Y. Chung, T. Torigaki and J.E. Taylor, Adaptive Finite Element Methods for Shape Optimization of Linearly Elastic Structures, Comp. Methods in Appl. Mech. and Engng, to appear.
- (9) I. Babuska and W.C. Rheinboldt, Reliable Error Estimation and Mesh Adaptation for the Finite Element Method, in Computational Methods in Nonlinear Mechanics, ed. by J.T. Oden, North-Holland, pp. 67~109, 1980, Amsterdam
- (10) I. Babuska and B. Szabo, "On the Rate of Convergence of the Finite Element Method", Int. J.

- Num. Meth. in Engng., Vol. 18, pp. 323~341, 1982
- (11) V. Braibant and C. Fleury, "Shape Optimal Design: A Performing C.A.D. Oriented Formulation", Report SA-114, The Univ. of Liege, 1984
- (12) J.F. Thompson, F.C. Thames, and C.W. Mastin, "TOMCAT-A code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", J. of Comp. Physics, 24, pp. 274~302, 1977
- (13) K.Y. Chung, "Shape Optimization and Free Boundary Problems with Grid Adaptation", Ph D. Thesis, The Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1985