

<論 文>

경계요소법을 사용한 선형 점탄성문제의 해석

심 우 진* · 광 병 만**

(1987년 1월 12일 접수)

Analysis of Linear Viscoelastic Problems Using Boundary Element Method

Woo Jin Sim and Byung Man Kwak

Key Words: Relaxation Function(이완함수), Elastic-Viscoelastic Correspondence Principle (탄성-점탄성 상응원리), Boundary Element Method(경계요소법), Fundamental Solution(기본해), Time Marching Process(시간병진해석)

Abstract

Isotropic linear viscoelasticity problems are analyzed numerically in time domain by Boundary Element Method with quadratic isoparametric boundary elements. Viscoelastic fundamental solutions are newly derived by using the elastic-viscoelastic correspondence principle and corresponding boundary integral equations are also presented. Numerical results of two examples are compared with the derived exact solutions to verify the accuracy and validity of the method. A detailed study on the accuracy of displacement and stress in terms of time integration step is given.

1. 서 론

등방성 선형 점탄성문제의 지배식들을 Laplace 변환시키면 탄성문제의 지배식들과 형태에 있어서 구성방정식(constitutive equation)만 조금 다른 것의 동일하다. 이에 착안하여 변환된 영역에서 관련탄성문제(associated elastic problem)⁽¹⁾를 풀어 변환해(transformed solution)를 구한후 이를 역변환시켜서 실제해(actual solution)를 구하는 방법으로 탄성-점탄성 상응원리(elastic-viscoelastic correspondence principle)는 Lee⁽¹⁾

에 의하여 체계화 되었다. 그 후 Lee, Radok 및 Woodward⁽²⁾, Morland 및 Lee⁽³⁾, Rogers 및 Lee⁽⁴⁾ 그리고 Ting⁽⁵⁾ 등에 의해서 점탄성재료의 원통형 용기에 관한 이론적 응력해석이 계속되었다.

한편 실제적 점탄성문제를 대하였을 때 생기는 복잡한 기하형상 및 온도변화를 고려한 수치해석이 Zienkiewicz, Watson 및 King⁽⁶⁾에 의해서 유한요소법을 이용하여 시간영역에서 시간증분에 따른 해석이 시도되었다.

Adey 및 Brebbia⁽⁷⁾는 실험적 이완함수(experimental relaxation function)의 점탄성모델에 관하여 변환된 영역에서 관련탄성문제를 유한요소법을 사용하여 변환해를 구한후 역변환시키는데 있어서 Shapery⁽⁸⁾의 제안을 사용하여 실제해를 구하였다.

* 정회원, 금오공과대학 기계공학과

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

Rizzo 및 Shippy⁽⁹⁾는 점탄성문제의 변환된 경계적분식을 탄성문제의 경계적분식에 상응원리를 적용하여 얻은후 경계요소법을 사용하여 변환해를 구하고 Shapery⁽⁸⁾의 역변환 방법을 사용하여 실제해를 구하였다.

Kusama 및 Mitsui⁽¹⁰⁾는 Rizzo 및 Shippy⁽⁹⁾의 해석과정에서 역변환시 대개변수를 쉽고 합리적으로 택하는 방법을 고안하였다.

Shinokawa 등⁽¹¹⁾은 Laplace 영역에서 변환해를 구한 후 역변환시키는 데에 따른 문제점을 해소시키기 위하여 정수압작용시 탄성의 성질을 갖고 전단(혹은 뒤틀림) 변형시 3 element Voigt type model의 점탄성재료에 대하여 상응원리를 사용하여 시간영역에서의 점탄성기본해(viscoelastic fundamental solution)와 그에 따른 점탄성 경계적분식을 유도하였다. 그리고 경계적분식에서 나타나는 유전적분(hereditary integral)의 해석을 위하여 시간병진해석(time marching process)⁽¹²⁾의 개념을 사용하였으며 구조물, 지반지질물, 터널 등의 토질학적 문제의 수치해석을 위하여 유한요소법과 경계요소법을 결합한 결합해석법(combined method)을 제시하여 몇가지 예로서 타방법(경계요소법과 유한요소법)의 계산결과와 비교하여 결합해석법의 타당성을 보였다. 이때 사용된 요소형상은 선형의 경계요소 및 유한요소이었으며 비교된 방법중 경계요소법의 경우 선형요소를 사용하였다.

본 논문에서는 전자⁽¹¹⁾의 해석중에서 유한요소와 경계요소의 결합으로 생기는 문제점 그리고 증가된 자유도로 인한 경계성의 손실 등을 고려하여 2차의 경계요소만을 사용한 경계요소법을 시도하였으며 다른 형태의 점탄성기본해 및 점탄성 경계적분식을 유도 사용하였다. 그리고 시도된 방법의 타당성을 보이기 위하여 사용된 예제들(평면변형문제)의 이론해를 상응원리를 사용하여 유도하였으며 이를 수치결과와 비교하여 근사해의 정확함을 알 수가 있었다.

2. 지배방정식

등방성 선형 점탄성문제 해석에 있어서의 지배식들은 등방성 선형 탄성문제의 지배식들과 구성방정식(constitutive equation)만을 제외하고는 형태에 있어서 시간변수만 첨가될뿐 동일하다.

(1) 평형방정식

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + f_i(x, t) = 0 \quad (1)$$

여기서 σ_{ij} 는 응력텐서, x_j 는 위치벡터 x 의 직교좌표

성분 그리고 f_i 는 단위체적당 체적력이다.

(2) 응력-변형도 관계식

응력-변형도 관계식은 두가지 형태로 나타낼 수가 있다.

첫째로,

$$\sigma_{ij}(x, t) = 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \delta_{ij} \int_0^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

여기서 $\mu(t)$, $\lambda(t)$ 는 탄성문제에서 Lamé 상수들에 해당되는 이완함수(relaxation function)이다. 위 식으로부터 현시점에서의 응력이 탄성문제와는 달리 과거의 변형도에 의하여 영향을 받는다는 것을 알 수가 있다.

둘째로는 편차(deviatoric)성분과 팽창(dilational)성분으로 나뉜다. 즉

$$\sigma_{ij}'(x, t) = 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}'(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3a)$$

$$= 2\mu * d\varepsilon_{ij}' = 2\varepsilon_{ij}' * d\mu \quad (3b)$$

그리고

$$\sigma_{ii}(x, t) = 3 \int_0^t k(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ii}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4a)$$

$$= 3k * d\varepsilon_{ii} = 3\varepsilon_{ii} * dk \quad (4b)$$

여기서 σ_{ij}' 및 ε_{ij}' 은 편차응력, 편차변형도에 해당되는 텐서이며 $k(t)$ 는 탄성문제에서 체적계수에 해당되는 이완함수이다. 또한 식(3b)와 (4b)의 * 기호는 Stieltjes convolution⁽¹³⁾를 의미하며 두 식이 성립하기 위해서는

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = 0, \quad t < 0 \quad (5)$$

의 조건식이 따른다.

(3) 변형도-변위 관계식

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right] \quad (6)$$

여기서 u_i 는 변위성분이다.

(4) 기하학적 적합조건(2차원문제의 경우)

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}(x, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}(x, t)}{\partial x_1^2} \quad (7)$$

(5) 초기 및 경계조건

$$u_i(x, t) = \varepsilon_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}(x, t) = 0, \quad t < 0 \quad (8)$$

그리고

$$u_i(x, t) = U_i(x, t) \quad S_u \text{에서} \quad (9)$$

$$t_i(x, t) = \sigma_{ij}(x, t) n_j \quad S_t \text{에서}$$

여기서 t_i 는 표면력 성분이고 n_j 는 물체의 표면에서 바깥으로 향하는 단위수직벡터의 성분이며 S_u, S_t 는 변위 및 표면력의 조건이 주어지는 경계면으로써 두면의 경계가 시간에 따라 변하지 않아야 한다.

식 (1), (2) 및 (6)을 결합하면 변위에 관한 운동방

정식을 다음처럼 얻을 수가 있다⁽¹³⁾.

$$\int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i,j}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_0^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u_{k,i}(x, \tau)}{\partial \tau} + f_i(x, t) = 0 \quad (10)$$

여기서 f_i 에 관성력을 포함시키지 않은 운동을 구하면 소위 준정적해(quasi-static solution)가 얻어지고 본 논문에서는 준정적해에 관심을 둔다.

3. 탄성-점탄성 상응원리^(13, 14, 15) (Elastic-Viscoelastic Correspondence Principle)

3.1 변환된 지배방정식(Transformed Governing Equation)

식 (1), (3a), (4a), (6), (7) 및 (9)에 Laplace 변환을 적용시키면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}(x, s)}{\partial x_j} + \hat{f}_i(x, s) = 0 \quad (11)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(x, s) = 2s\hat{\mu}(s)\hat{\epsilon}_{ij}(x, s) \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(x, s) = 3s\hat{k}(s)\hat{\epsilon}_{ij}(x, s) \quad (13)$$

$$\hat{\epsilon}_{ij}(x, s) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{u}_i(x, s)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j(x, s)}{\partial x_i} \right] \quad (14)$$

$$2 \frac{\partial^2 \hat{\epsilon}_{12}(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \hat{\epsilon}_{11}(x, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \hat{\epsilon}_{22}(x, t)}{\partial x_1^2} \quad (15)$$

$$\hat{u}_i(x, s) = \hat{U}(x, s) \quad S_u \text{에서} \quad (16)$$

그리고

$$\hat{i}_i(x, s) = \hat{\sigma}_{ij}(x, s) n_j \quad S_i \text{에서} \quad (17)$$

여기서 $\hat{}$ 는 Laplace 변환된 형태를 나타내며 s 는 변환변수(transform variable)이다.

3.2 탄성-점탄성 상응원리

식 (11)~식 (17)을 선형탄성론의 기본식들과 비교하면 식 (11)~식 (17)은 탄성계수가 $s\hat{\mu}(s)$, $s\hat{k}(s)$ 체적력이 $\hat{f}_i(x, s)$ 그리고 표면력 $\hat{i}_i(x, s)$ 가 경계면 S_i 에 작용하고 외부변위 $\hat{u}_i(x, s)$ 가 경계면 S_u 에 작용하는 등가탄성문제로 된다. 따라서 관련탄성문제(associated elastic problem)⁽¹¹⁾를 풀어 $\hat{\sigma}_{ij}(x, s)$, $\hat{u}_i(x, s)$ 를 구한후 시간영역으로 역변환시키므로써 점탄성문제에 대한 응력 $\sigma_{ij}(x, t)$ 및 변위 $u_i(x, t)$ 를 얻을 수가 있다. 만약 탄성문제의 해를 완전하게 구할 수가 있다면 그 해의 탄성계수 μ, k 대신에 $s\hat{\mu}(s)$, $s\hat{k}(s)$ 를 대입하고 역변환시키므로써 직접 구할 수도 있다. 그러나 이와 같은 탄성-점탄성 상응원리 응용시 주의할 점은 경계조건식 (9), (16) 및 (17)에서 S_u 와 S_i 의 접촉면이 시간에 따라 변하지 않아야 하는 것이다.

4. 점탄성 경계적분식의 유도

4.1 점탄성 기본해(Viscoelastic Fundamental Solution)

등방성 선형 탄성문제의 기본적분방정식은 다음과 같다⁽¹²⁾.

$$u_i(\xi) = \int_V [t_i(x) G^{*}_{ij}(x, \xi) - F^{*}_{ij}(x, \xi) u_j(x)] ds(x) + \int_V f_i(z) G^{*}_{ij}(z, \xi) dv(z) \quad (18)$$

여기서 $G^{*}_{ij}(x, \xi)$ 및 $F^{*}_{ij}(x, \xi)$ 는 단위력 $e_j(\xi)$ 에 의한 변위 및 표면력의 기본해로써 참고문헌 (12)에서 참조할 수 있으며 $f_i(z)$ 는 단위부피당 체적력 그리고 x, ξ 는 각각 관찰점(field point), 하중점(load point)에 해당된다.

식 (18)에서 체적력을 무시하고 Laplace 영역에서의 변환형태를 취하면

$$\hat{u}_i(\xi) = \int_V [\hat{t}_i(x, s) \hat{G}^{*}_{ij}(x, \xi, s) - \hat{F}^{*}_{ij}(x, \xi, s) \hat{u}_j(x, s)] ds(x) \quad (19)$$

이 된다. 이때 $G^{*}_{ij}(x, \xi)$ 및 $F^{*}_{ij}(x, \xi)$ 는 탄성계수를 포함하고 있으므로

$$\mu \leftrightarrow s\hat{\mu}(s) \quad (20)$$

$$k \leftrightarrow s\hat{k}(s)$$

여기서 μ, k 는 탄성계수이고 $\hat{\mu}(s), \hat{k}(s)$ 는 점탄성 이완함수의 Laplace 변환형태이며 s 는 변환변수 그리고 \leftrightarrow 는 상응됨을 뜻한다.

탄성-점탄성 상응원리를 사용하여 $\hat{G}^{*}_{ij}(x, \xi, s)$ 및 $\hat{F}^{*}_{ij}(x, \xi, s)$ 를 구할 수가 있다. 즉

$$\hat{G}^{*}_{ij}(x, \xi, s) = -\frac{1}{8\pi} \left[\frac{2(7\hat{\mu}+3\hat{k})}{s\hat{\mu}(4\hat{\mu}+3\hat{k})} \delta_{ij} \ln r - \frac{2(\hat{\mu}+3\hat{k})}{s\hat{\mu}(4\hat{\mu}+3\hat{k})} \frac{y_i y_j}{r^2} \right] \\ \hat{F}^{*}_{ij}(x, \xi, s) = -\frac{1}{2\pi r^2} \left[\frac{3\hat{\mu}}{(4\hat{\mu}+3\hat{k})} (n_i y_j - n_j y_i) + \hat{\sigma}_{ij} y_k n_k + \frac{2(\hat{\mu}+3\hat{k})}{(4\hat{\mu}+3\hat{k})} \frac{y_i y_j y_k n_k}{r^2} \right] \quad (21)$$

여기서 $y_i = x_i - \xi_i$, $r^2 = y_i y_i$ 그리고 n_i 는 단위의향수 직벡터성분이며 편위상 변환변수 s 를 등식의 우측에서 생략하였다.

식 (21)을 풀기 위해서는 점탄성재료의 특성(즉 이완함수)을 알아야 하는데 여기서는 표준화된 선형 점탄성재료를 가정한다. 즉 경수압 작용시 탄성의 성질을 갖고 전단(혹은 뒤틀림) 변형시 3 parameter solid model⁽¹⁴⁾(혹은 3 element voigt type model⁽¹⁵⁾, stan-

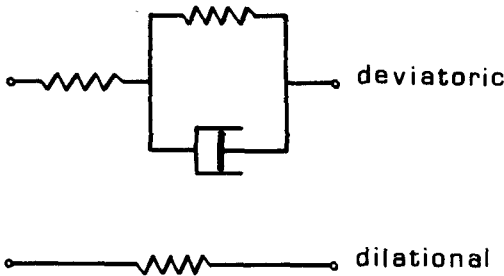


Fig. 1 Viscoelastic model

standard linear material^(5, 9, 14)이라고도 함)처럼 행동한다 (Fig. 1 참조). 즉

$$\begin{aligned} \mu(t) &= G[\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda t}] \\ \hat{k}(t) &= k \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)의 이완함수를 Laplace 변환시키면

$$\hat{\mu}(s) = \frac{G(s+\alpha\lambda)}{s(s+\lambda)} \quad (23)$$

그리고

$$\hat{k}(s) = \frac{K}{S}$$

을 얻는다. 식(23)을 식(21)에 대입시키고 역 Laplace 변환을 위해서 얻어진 결과를 각각 $G^{v_{ij}}(x, \xi, t)$ 및 $F^{v_{ij}}(x, \xi, t)$ 라 하자[부록(A) 참조]. 이를 시간에 관해서 한번더 적분하며 점탄성기분해 $G^{v_{ij}}(x, \xi, t)$ 및 $F^{v_{ij}}(x, \xi, t)$ 를 얻을 수가 있다. 이는 탄성문제의 경우 외력이 순간적으로 작용하지만 점탄성문제의 경우 외력이 일정시간동안 지속되는 것에 의한다. 유도된 선형 점탄성문제의 기본해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G^{v_{ij}}(x, \xi, t) &= -\frac{1}{4\pi} \left[\delta_{ij} \{A_0 H(t) + A_1 e^{-\lambda t} \right. \\ &\quad + A_2 e^{-\alpha \lambda t} \ln r - \{B_0 H(t) + B_1 e^{-\lambda t} \\ &\quad \left. + B_2 e^{-\alpha \lambda t} \} \frac{y_i y_j}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} F^{v_{ij}}(x, \xi, t) &= -\frac{1}{2\pi r^2} \left[\{C_0 H(t) + C_1 e^{-\lambda t}\} \{n_j y_i - n_i y_j \right. \\ &\quad + \delta_{ij} y_k n_k \} + \{D_0 H(t) + D_1 e^{-\lambda t}\} \\ &\quad \left. - \frac{y_i y_j y_k n_k}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $H(t)$ 는 단위계단함수를 의미하며 관련된 모든 상수들을 부록 (A)와 (B)에 수록하였다.

4.2 점탄성 경계적분식

등방성 점탄성재료에 관한 상반정리(Reciprocal work theorem)는 다음처럼 알려져 있다⁽¹³⁾.

어떤 등방성 점탄성 물체가 두개의 서로 다른 하중 상태를 받을 때 즉 체적력, 표면력 및 변위가 각각

(f_i, t_i, u_i) , (f_i', t_i', u_i') 의 경우 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \int_V [t_i' * du_i'] ds + \int_V [f_i' * du_i'] dv &= \int_V [t_i * du_i] ds \\ &+ \int_V [f_i * du_i] dv \end{aligned} \quad (26)$$

위 식에서 ()' 표시한 계(system)는 단위체적력 f_i' 에 의한 가상계이며 f_i' 은 다음과 같다.

$$f_i' = \delta_{ij} \delta(x-\xi) H(t-\tau) e_j \quad (27)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker's delta, δ 는 Dirac delta 함수, H 는 단위계단함수이며 위치 $x=\xi$, 시간 $t=\tau$ 이후에 단위력 e_j 가 지속 작용하는 것을 뜻한다. ()' 표시한 가상계의 u_i' 및 t_i' 에 관한 기본해를 $G^{v_{ij}}(x, \xi, t)$ 및 $F^{v_{ij}}(x, \xi, t)$ 로 놓고 f_i' 에 관한 식(27)을 이용하여 식(26)을 풀면 다음처럼 등방성 점탄성재료에 관한 기본적분방정식을 유도할 수가 있다.

$$\begin{aligned} u_i(\xi, t) &= \int_V [t_i(x, t) * dG^{v_{ij}}(x, \xi, t) \\ &\quad - u_i(x, t) * dF^{v_{ij}}(x, \xi, t)] ds(x) \\ &+ \int_V [f_i(z, t) * dG^{v_{ij}}(z, \xi, t)] dv(z) \end{aligned} \quad (28)$$

혹은

$$\begin{aligned} u_i(\xi, t) &= \int_V [G^{v_{ij}}(x, \xi, t) * dt_i(x, t) \\ &\quad - F^{v_{ij}}(x, \xi, t) * du_i(x, t)] ds(x) \\ &+ \int_V [G^{v_{ij}}(z, \xi, t) * df_i(z, t)] dv(z) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 식(28)과 (29)가 성립하기 위해서는 다음 조건식을 갖는다.

$$u_i(x, t) = t_i(x, t) = f_i(x, t) = 0, \quad t < 0 \quad (30)$$

참고문헌 (11)과 (12)에서는 각각 식(29)와 식(28)을 사용하고 있으며 식(28)을 시간적분항을 넣어 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i(\xi, t) &= \int_V \int_0^t [t_i(x, \tau) \frac{\partial G^{v_{ij}}(x, \xi : t-\tau)}{\partial \tau} \\ &\quad - u_i(x, \tau) \frac{\partial F^{v_{ij}}(x, \xi : t-\tau)}{\partial \tau}] d\tau ds(x) \\ &+ \int_V \int_0^t [f_i(z, \tau) \frac{\partial G^{v_{ij}}(z, \xi : t-\tau)}{\partial \tau}] d\tau dv(z) \end{aligned} \quad (31)$$

식(31)에서 관찰점 ξ 를 경계면상의 점 ξ_0 로 가져 가면 우리가 원하는 경계적분식을 얻을 수가 있다. 즉

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi_0) u_i(\xi_0, t) &= \int_V \int_0^t t_i(x, \tau) \frac{\partial G^{v_{ij}}(x, \xi_0 : t-\tau)}{\partial \tau} \\ &\quad - u_i(x, \tau) \frac{\partial F^{v_{ij}}(x, \xi_0 : t-\tau)}{\partial \tau}] d\tau ds(x) \\ &+ \int_V \int_0^t f_i(z, \tau) \frac{\partial G^{v_{ij}}(z, \xi_0 : t-\tau)}{\partial \tau} \\ &\quad d\tau dv(z) \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 계수(jump term) C_{ij} 는 경계면의 기하학적 성질에 따라서 값을 취하는 상수으로써 연속적인 곡면의 경우 $C_{ij}=0.5 \delta_{ij}$ 의 값을 갖는다.

식 (31)과 (32)는 근사화가 포함되지 않은 완전식(exact formulation)으로 체적력이 없다면 경계에 따른 적분방정식이다. 수치해석을 위한 근사화는 이들 적분의 수치적 계산에 있으며 경계요소법(boundary element method: BEM)으로 발전되어 있다.

5. 시간병진해석(Time Marching Process)

선형 점탄성 경계적분식 (32)에서 ξ_0 대신 ξ 를 사용하고 체적력이 없다고 가정하면 다음 식이 된다.

$$C_{ij}(\xi)u_i(\xi, t) = \int_s \int_0^t \left[t_i(x, \tau) \frac{\partial G_{ij}^v(x, \xi; t-\tau)}{\partial \tau} - u_i(x, \tau) \frac{\partial F_{ij}^v(x, \xi; t-\tau)}{\partial \tau} \right] d\tau ds \quad (33)$$

여기서 ξ 는 경계면상의 점 혹은 영역 내부의 점이 될 수가 있으며 경계점이 될 경우에는 식 (32)의 설명과 같고 내부점이 될 경우에는 $C_{ij}=\delta_{ij}$ 의 값을 갖는다.

식 (33)에서 시간적분을 하기 위한 방안으로서 공간 좌표축(2차원)에 시간축이 더하여진 3차원 좌표축을 생각하고 시간축은 등간격으로 나뉘어졌다고 가정한다. 그러면 임의의 시간 t (혹은 T_N)는 다음처럼 시간 증분의 합으로 나타낼 수가 있다.

$$T_N = \sum_{n=1}^N n\Delta T \quad (34)$$

식 (34)의 개념을 식 (33)에 넣어 다시 쓸 수가 있다. 즉

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)u_i(\xi, T_N) &= \int_{T_{N-1}}^{T_N} \int_s [G_{ij}^v(x, \xi; t-\tau)t_i(x, \tau) \\ &\quad - F_{ij}^v(x, \xi; t-\tau)u_i(x, \tau)] ds d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{T_N-1} \int_s [G_{ij}^v(x, \xi; t-\tau)t_i(x, \tau) \\ &\quad - F_{ij}^v(x, \xi; t-\tau)u_i(x, \tau)] ds d\tau \quad (35) \\ &= R_j(\xi, T_N) \quad (36) \end{aligned}$$

여기서 G_{ij}^v , F_{ij}^v 은 부록 (A)에서 참조할 수가 있다.

식 (36)의 R_j 항은 식 (35)의 우측항을 나타내는 것으로서 현재(T_N)의 변수들에 관한 과거의 변위 및 표면력의 영향을 의미한다. 또한 식 (35)는 경계적분식(32)처럼 근사항을 포함하지 않은 완전식임을 상기할 필요가 있다. 그러나 식 (35)를 적분하기 위해서는 공간함수에 관한 근사적분 이외에 시간에 관한 적분이 필요하게 된다. 시간의 변화에 따른 함수변화의 근사적

표시방법으로서는 시간축을 등간격으로 나누는 후 각각 구간 함수 값을 일정한 것으로 가정하는 경우와 선형적 변화함수로 가정하는 방법 등이 일반적으로 사용되고 있다. 본 논문에서는 전자의 방법을 사용하였으며 그때의 변위 및 표면력에 관한 식이 다음처럼 기술된다.

$$u_i(x, \tau) = \sum_{n=1}^N u^n_i(x) \phi_n(\tau)$$

$$t_i(x, \tau) = \sum_{n=1}^N t^n_i(x) \phi_n(\tau) \quad (37)$$

여기서 $\phi_n(\tau)$ 는

$$(n-1)\Delta T \leq \tau \leq n\Delta T \text{에서 } \phi_n(\tau) = 1 \quad (38)$$

$$\text{그외구간에서 } \phi_n(\tau) = 0$$

으로 정의되는 함수이며 $u^n_i(x)$ 및 $t^n_i(x)$ 는 시간 $T_n = n\Delta T$ 에서 변위 및 표면력의 공간좌표에 따른 함수를 의미한다. 시간증분 ΔT 의 크기 선택에 있어서 너무 작게 하면 계산시간이 오래 걸리며 너무 크게 하면 계산량은 작으나 계산 결과가 정확하지 않다. 그러나 식 (35)에서는 T_N 에서의 변위 및 표면력을 구하기 위하여 과거의 계산결과들과 시간 T_N 의 변수들을 함께 고려하여 계산하기 때문에 해석시 너무 심한 가정을 하지 않는 한 수치적으로 안정한 것으로 알려져 있다.

식 (37)을 식 (35)에 대입 후 시간함수에 관하여 이론적으로 적분하면 결국 공간함수에 관한 표면적분만 남게 된다.

보통의 방법을 사용하여 경계적분을 하면 다음과 같은 형태의 식을 만들 수가 있다.

$$[G^1] \{t^N\} - [F^1] \{u^N\} = \{R^N\} \quad (39)$$

여기서 행렬 $[G^1]$, $[F^1]$ 은 모양함수(shape function)와 G_{ij}^v , F_{ij}^v 의 곱에 관한 경계요소적분들의 결합행렬이고 $\{t^N\}$ 과 $\{u^N\}$ 은 T_N 에서의 표면력, 변위를 의미하며 $\{R^N\}$ 은 과거의 변수들이 T_N 시각에 끼치는 영향, 즉 유전효과(hereditary effect)의 계산을 나타낸다. 식 (39)에 경계조건을 대입 후 간단히 하면 다음처럼 된다.

$$[A] \{x^N\} = \{b^N\} + \{R^N\} \quad (40)$$

여기서 $\{x^N\}$ 은 미지의 변위 및 표면력으로 구성되고 $\{b^N\}$ 은 주어진 경계조건들로부터 계산된다.

식 (40)에서 행렬 $[A]$ 가 일정하므로 매 시간단계에서 해야 할 일은 $\{R^N\}$ 만을 뒤집어야 하여 계산하면 된다. 선형 점탄성문제의 경우 기본해가 시간함수와 공간함수의 곱으로 표시됨으로 행렬 $[A]$ 가 일정하였으나 천이영역의 동적문제(transient dynamic problem)의 경우에는 다르다.

6. 수치계산 예

수치해를 구하기 위하여 2차의 isoparametric 경계 요소법을 사용하여 2배정도(double precision)로 계산하였으며 평면변형의 2가지 예를 다루었다. 계산 결과를 비교 검토하기 위하여 탄성-점탄성 상응원리를 사용하여 각각의 이론해를 구하였다. 이때 사용된 점탄성 재료는 Fig. 1과 식 (22)로 표현되며 관련된 상수 값을 Table 1에 기록하였고 τ 는 지연시간(retardation time)으로 $(\alpha\lambda)^{-1}$ 으로 계산된다.

Table 1 Constants of relaxation function

G	K	α	λ	τ
480	1280	0.25	0.4	10

6.1 점탄성 무한영역내에서 내압을 받는 원형구멍

무한영역 문제의 경우 BEM은 FEM보다 특히 유리하다. 이는 경계적분식 (33)이 경계가 무한한 경우에도 성립하기 때문에 소수의 경계요소로도 정확한 결과를 얻을 수가 있다. 수치결과를 비교하기 위하여 r 방향의 변위에 관한 이론해를 상응원리를 사용하여 다음처럼 유도하였다.

$$u(r, t) = -\frac{Pa}{2G\alpha} [(\alpha - 1)e^{-\alpha t} + 1] \frac{a}{r} \quad (41)$$

여기서 P는 내압, a는 원의 반경을 뜻하고 다른 상수들은 Table 1을 참조한다. 한편 수치해를 얻기 위한 경계요소 형태는 Fig. 2와 같으며 중요소수 13, 총 절점수 26으로 하였다. Table 2에는 적당하다고 판단되는 4 종류의 시간증분(ΔT)에 대하여 경계면($r/a=1$) 및 내부점($r/a=1.5, 2.0, 3.0$)에서의 수치결과를 시간 $t=\Delta T, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ 에서 ($\Delta T=2$ 의 경우에는 부근의 data) 이론해와 비교하여 오차 및 CPU 시간을 기

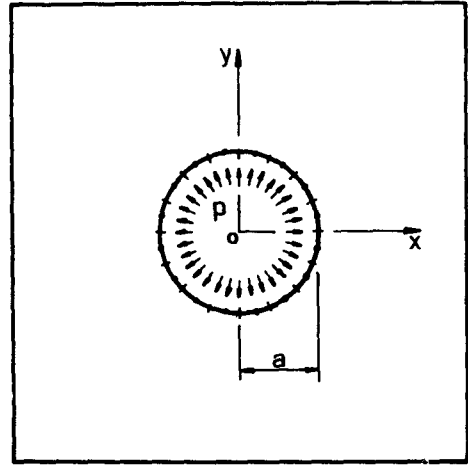


Fig. 2 Discretization of a circular hole within a viscoelastic infinite region subject to constant internal pressure

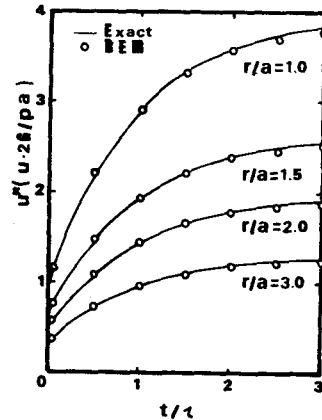


Fig. 3 Radial displacement of a circular hole within a viscoelastic infinite region subject to constant internal pressure

록하였으며 $\Delta T=0.5$ 의 경우를 최적해로 판단하여 무차원화시켜서 Fig. 3에 도시하였다. 그리고 각시간 절

Table 2 Numerical errors and CPU time(PRIME 2655 computer) in radial displacement calculation of a circular hole within a viscoelastic infinite region subject to constant internal pressure

Time step		$\Delta T=0.25$	$\Delta T=0.5$	$\Delta T=1.0$	$\Delta T=2.0$
Comparison terms					
Errors(%)	Boundary ($r/a=1$)	-2.39~0.14	-1.96~1.26	-1.19~3.49	0.09~7.71
	Internal	-2.32~0.19	-1.91~1.31	-1.14~3.52	0.13~7.75
CPU time(sec)		285.82	134.99	85.87	64.29

점은 그때까지의 시간증분의 합으로 식 (34)에서 가정 하였으므로 시간 $t=0$ 에서의 값은 $\Delta T=0$ 로 하여 얻어진 수치결과(탄성해와 동일)를 사용할 수가 있다. 이때 각시간 절점에서의 값을 두 구간의 평균치(averaging)로 구하는 방법도 있다.

6.2 내압을 받는 점탄성원통

내압을 받는 선형 점탄성원통에 대한 r 방향의 변위 u 는 상응정리를 사용하여 다음처럼 유도하였다.

$$u(r,t) = \frac{Pa^2}{2(b^2-a^2)} \left[\frac{b^2}{Gr} \left\{ e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \right\} + \frac{3r}{G+3k} \left\{ e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p} \right\} \right] \quad (42)$$

여기서 P 는 내압이고 a, b 는 각각 내부, 외부반경이며 $q = \frac{G\alpha + 3k}{G + 3k}$ 이다.

수치해를 얻기 위한 경계요소형태는 Fig. 4와 같으

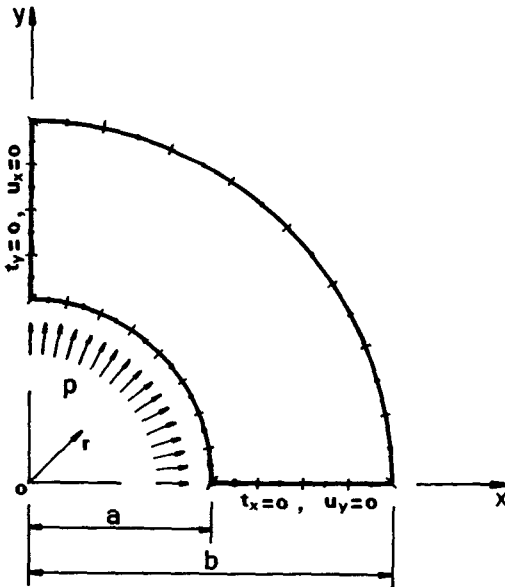


Fig. 4 Discretization of a hollow viscoelastic cylinder subject to constant internal pressure

며 총요소수 24, 총절점수 48로 하였다. 전과 마찬가지로 4종류의 시간증분에 대하여 조사하였으며 경계 변위를 먼저 구하고 다음에 내부변위를 구하였다. 비교와 검토를 목적으로 내부점은 $\frac{1}{4}$ 원통의 분할경계면의 절점들과 같은 반경을 택하였다. Table 3에는 경계면($r/a=1, 2$) 및 내부점($r/a=1.25, 1.5, 1.75$)에서의 수치결과를 이론해와 비교하여 전 시간영역에서의 오차 및 CPU 시간을 기록하였다.

내부점의 변위값은 경계면상의 값으로부터 계산되므로 약간의 오차를 더 포함할 수가 있다. 실제로 내부점과 같은 반경의 분할경계면(직선부분)상의 절점들로부터 얻어진 변위값은 최대오차가 1.33%이었고 모든 계산결과와의 오차가 그 이하의 양의 값으로 계산되었다.

Table 3에서 CPU 시간을 고려하여 변위결과를 곱할 하면 $\Delta T=1.0$ 및 2.0 이 효율적이라고 생각된다. 그러나 이때 계산된 경계응력 값은 만족스럽지 못하다. 그러므로 향상된 응력결과를 얻기 위해서는 ΔT 를 작게 하면 된다. 그러나 이런 경우에 늘어난 계산오차의 축적으로 인하여 변위의 정확도는 Table 3에서 보이

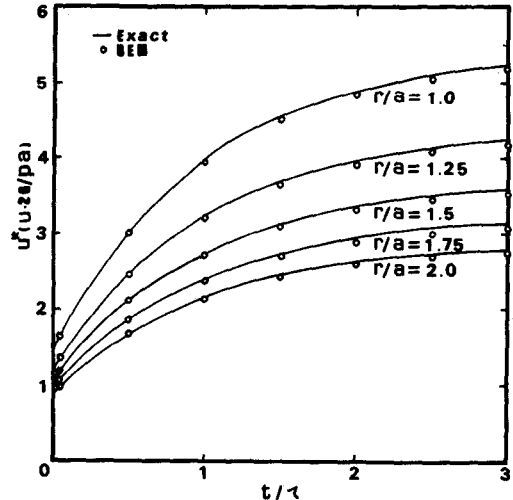


Fig. 5 Radial displacement of a hollow viscoelastic cylinder subject to constant internal pressure

Table 3 Numerical errors and CPU time(PRIME 2655 computer) in radial displacement calculation of a hollow viscoelastic cylinder subject to constant internal pressure

Time step		$\Delta T=0.25$	$\Delta T=0.5$	$\Delta T=1.0$	$\Delta T=2.0$
Comparison terms					
Errors(%)	Boundary ($r/a=1, 2$)	-1.90~0.02	-1.75~0.12	-1.49~0.43	-1.06~1.19
	Internal	-2.15~-0.92	-1.98~-0.67	-1.68~-0.18	-1.19~1.02
CPU time(sec)		524.70	266.53	155.90	145.72

는 것처럼 오히려 멀어지게 나타났다. 따라서 변위결과만을 고려할 경우에는 $\Delta T=1.0$ 의 값이 가장 적당하나 경계응력을 함께 고려할 경우에 $\Delta T=0.5$ 이하의 시간증분을 택하는 것이 바람직하다. 최근에 발표된 논문들^(10,11)은 점탄성문제를 다루었으나 해석된 예제, 점탄성재료의 특성이 서로 다르고 수치결과에 대한 자료가 충분히 기술되지 않아 본 논문과 직접적인 비교검토가 불가능하였다. 그리고 이들 결과에서는 응력에 대한 언급이 없이 변위에 관한 해석만으로 결론을 내렸다.

Fig. 5에서는 $\Delta T=0.5$ 에 대한 변위결과를 무차원화시켜서 도시하였다.

7. 고 찰

수치해석시 계산결과에 영향을 끼치는 중요인자로서는 시간증분(ΔT)과 경계요소의 크기 및 형태를 들 수가 있다. 두 인자 모두가 계산의 정확성과 계산시간에 관련된다. 정확한 변위 및 경계응력 계산에 요구되는 시간증분 크기 비교에 있어서 전자의 경우가 더 크고 적당한 크기의 값에도 정확해로의 수렴성이 좋았다. 반면 시간증분의 크기를 작게 하여 경계응력의 정확도를 향상시켰을 경우에 변위결과는 많은 계산의 반복으로 인한 오차가 누적되어 소모시간만큼의 좋은 결과가 얻어지지 않았다. 본 논문에서는 해석된 예제들로부터 정확한 변위값을 얻기 위한 시간증분량은 $\Delta T=0.5$ 혹은 1.0 (경우에 따라서는 2.0 도 가능)으로 판단되었다. 그러나 이때의 경계응력은 시간증분을 더 작게함으로써 정확성을 증가시킬 수가 있었다. 이런 점에서 최근에 발표된 논문^(10,11)에서는 응력에 대한 언급이 전혀 없이 변위결과만을 비교해석한 것은 목적에 따라 오히려 우려가 있음을 지적할 수가 있다.

8. 결 론

본 논문에서는 점탄성문제 해석을 위하여 탄성-점탄성 상응원리에 근거한 경계적분방정식을 유도하고 경계요소법을 적용하여 실용성과 효율성을 보였다. 이론해와 비교를 통한 수치해석으로 시간증분이 변위와 경계응력의 오차에 미치는 영향을 조사하고 적절한 증분량을 추천하였으며 제시된 방법이 안정되게 바람직한 해를 얻을 수 있음을 보임으로 본 논문의 방법이 실제응용으로 이어질 수 있음을 확인하였다.

후 기

본 연구는 문교부의 IBRD 해외교수파견계획의 지원을 받았으며 연구에 도움을 주신 P.K. Banerjee 교수께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) E.H. Lee, "Stress Analysis in Viscoelastic Bodies", *Quart. Appl. Math.*, Vol. 13, p.183, 1955
- (2) E.H. Lee, J.R.M. Radok and W.B. Woodward, "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials", *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 3, pp.41~59, 1959
- (3) L.W. Morland and E.H. Lee, "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation", *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 4, pp.233~263, 1960
- (4) T.G. Rogers and E.H. Lee, "The Cylinder Problem in Viscoelastic Stress Analysis", *Quart. Appl. Math.*, Vol. 22, No. 2, pp.117~131, 1964
- (5) T.C.T. Ting, "Remarks on Linear Viscoelastic Stress Analysis in Cylinder Problems", *Proc. 9th Midw. Mech. Conf., U. of Wisc.*, pp.263~275, 1965
- (6) O.C. Zienkiewicz, M. Watson and I.P. King, "A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp.807~827, 1968
- (7) R.A. Adey and C.A. Brebbia, "Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems", *J. of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, Vol. 99, No. EM6, Dec., pp.1119~1127, 1973
- (8) R.A. Schapery, "Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis", *Proc. 4th U.S. Nat'l Cong. Appl. Mech.*, Vol. 2, pp.1075~1085, 1962
- (9) F.J. Rizzo and D.J. Shippy, "An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory", *SIAM, J. Appl. Math.*, Vol. 21, No. 2, Sep., pp.321~330, 1971
- (10) T. Kusama and Y. Mitsui, "Boundary Element Method Applied to Linear Viscoelastic Analysis", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 6, Aug., pp.285~290, 1982

- (11) T. Shinokawa, N. Kaneko, N. Yoshida and M. Kawahara, "Application of Viscoelastic Combined Finite and Boundary Element Analysis to Geotechnical Engineering, Boundary Element VII", C.A. Brebbia and G. Maier(Eds), Spring-Verlag, Berlin, pp.10~37, 1985
- (12) P.K. Banerjee and R. Butterfield, Boundary Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, New York, 1981
- (13) R.M. Christensen, Theory of Viscoelasticity, Academic Press, New York and London, 1971
- (14) W. Flügge, Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Company, 1967
- (15) W.N. Findley, J.S. Lai and K. Onaran, Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials, North-Holland, 1976

$$F^{1,ij}(x, \xi, t) = -\frac{1}{2\pi r^2} \left[C_0 \{ \delta(t) + a_3 e^{-w\lambda t} \} (n_i y_j - n_j y_i) + \delta_{ij} y_k n_k + D_0 \{ \delta(t) + a_4 e^{-w\lambda t} \} \frac{y_i y_j y_k n_k}{r^2} \right]$$

여기서

$$A_0 = \frac{7G+3k}{G(4G+3k)}, \quad B_0 = \frac{G+3k}{G(4G+3k)},$$

$$C_0 = \frac{3G}{4G+3k}, \quad D_0 = \frac{2(G+3k)}{4G+3k},$$

$$a_1 = \frac{\lambda(1-w)(w-v)}{w-\alpha}, \quad a_2 = \frac{\lambda(1-w)(w-q)}{w-\alpha},$$

$$a_3 = \frac{3k\lambda(\alpha-1)}{4G+3k}, \quad a_4 = (q-w)\lambda,$$

$$b_1 = \frac{\lambda(1-\alpha)(v-\alpha)}{w-\alpha}, \quad b_2 = \frac{\lambda(1-\alpha)(q-\alpha)}{w-\alpha},$$

$$q = \frac{4G+3k}{G+3k}, \quad v = \frac{7G\alpha+3k}{7G+3k}, \quad w = \frac{4G\alpha+3k}{4G+3k}$$

그리고 y_i, r, n_i 는 식(21)의 설명과 같으며 G, k, α 및 λ 는 이완함수에 나타나는 상수들로 식(22)에서 참조할 수 있다.

부 록

(A) $G^{1,ij}(x, \xi, t)$ 와 $F^{1,ij}(x, \xi, t)$

$$G^{1,ij}(x, \xi, t) = -\frac{1}{4\pi} \left[A_0 \delta_{ij} \{ \delta(t) + a_1 e^{-w\lambda t} + b_1 e^{-\alpha\lambda t} \} \ln r - B_0 \{ \delta(t) + a_2 e^{-w\lambda t} + b_2 e^{-\alpha\lambda t} \} \frac{y_i y_j}{r^2} \right]$$

(B) $G^v_{ij}(x, \xi, t)$ 와 $F^v_{ij}(x, \xi, t)$ 의 상수들

$$A_1 = -\frac{A_0 a_1}{w\lambda}, \quad A_2 = -\frac{A_0 b_1}{\alpha\lambda}, \quad B_1 = -\frac{B_0 a_2}{w\lambda},$$

$$B_2 = -\frac{B_0 b_2}{\alpha\lambda}, \quad C_1 = -\frac{C_0 a_3}{w\lambda}, \quad D_1 = -\frac{D_0 a_4}{w\lambda}$$

여기서 사용된 상수들은 부록 (A)의 상수들과 같다.