

<論 文>

補剛平板의 一般理論 研究

金 天 旭* · 元 鍾 鎮**

(1986年 12月 17日 接受)

Study on the General Theory of Stiffened Plates

Chon Wook Kim and Chong Jin Won

Key Words: Obliquely Stiffened Plate(斜交補剛平板), Adjusted-Centroid(修正圖心), Strain Energy(變形에너지), Equivalent Rigidities(等價剛性)

Abstract

The general equation of equilibrium is presented for a stiffened plate on which the stiffeners having rectangular cross-sections are attached by one or both sides with arbitrarily angles.

The principle of minimum potential energy is applied using the concept of adjusted-centroid to derive the equilibrium equation for the stiffened plate.

Equivalent rigidities in the present theory are in good agreement with the experiments by the vibration method.

1. 序 論

補剛平板은 平板에 補剛材를 溶接등의 方法에 의하여 부착시켜 굽힘 및 비틀림剛性を 향상시킨 構造要素로서 교량의 床板, 선박의 덱 플레이트(deck-plate), 철도차량 및 항공기 등의 각종 구조물에서 負荷能力을 증대시키기 위하여 널리 사용되고 있다.

보강평판은 보강재의 배치방향에 따라 構造的 異方性を 나타내는데, Huber^(1,2)는 均일 두께를 갖는 直交 異方性板의 굽힘이론을 세우고, 縱橫 방향으로 철근량이 다른 콘크리트 상판의 굽힘문제에 응용하였다.

平板의 上下面에 보강재가 대칭적으로 배치된 대칭 보강평판의 경우에는 中立面이 板의 중앙면에 위치하게 되므로 보강평판요소에 대하여 剛性を 산정하고 等價의 직교이방성판으로 치환하여 해석하였다.^(3~5)

비대칭보강평판의 경우는 面內應力の 영향 때문에 중립면이 판의 중앙면이 되지 않고 하중 및 경계조건 등에 따라 이동하게 된다. 따라서 적절한 가정을 도입하여 판의 굽힘에 있어 면내응력의 항을 소거함으로써 Huber형 방정식을 유도하였다. Giencke⁽⁶⁾는 片面 직교보강평판의 해석에서 보강재 交叉部의 力學的 特性과 면내응력에 미치는 직교축방향 曲率의 영향을 무시하고 힘의 평형관계로부터 각 횡단면의 修正圖心을 구하였으며 수경도심을 中立軸으로 하여 등가강성을 산정하였다. Cusens, Zeiden 및 Pama⁽⁷⁾는 편면직교보강평판에서 판과 직교보강재가 一體構造로 굽힘모우멘트

* 正會員, 延世大學校 工科大學 機械工學科

** 正會員, 國民大學校 工科大學 機械設計學科

에 저항하는 것으로 가정하고 Giенcke와 같이 수정도심의 개념을 적용하여 보강재 교차부의 역학적 특성을 고려한 굽힘강성을 산정하였으며 Nishino, Pama 및 Lee⁽⁸⁾는 판과 보강재교차부가 剪斷變形에 대하여 일체로 변형한다고 가정하여 이들의 상호작용을 고려한 비틀림강성을 산정하였다. Hasegawa, Akiyama 및 Nishino⁽⁹⁾는 Cusens 등⁽⁷⁾과 Nishino⁽⁸⁾ 등의 가정을 토대로 보강재교차부의 역학적 특성을 고려한 편면직교보강 평판의 평형미분방정식을 유도하고 판 중앙면의 면내응력이 일정하다는 가정하에 Huber형 방정식을 유도하였다.

한편, 보강재가 일정한 각도로 경사지어 배치된 직교보강평판의 굽힘문제에 대하여, Karmakar⁽¹⁰⁾는 等傾斜角度로 조밀하게 배치된 나선형보강재와 종방향보강재를 가지는 圓筒 쉘의 해석에서 微小要素를 보강평판 요소로 취급하여 평형미분방정식을 유도하였다. 또한, 백운수⁽¹¹⁾는 보강재가 등경사각도로 배치된 片面斜交보강평판에서 판의 강성과 사교보강재의 강성을 중첩하고 중립면의 이동에 따른 補正項을 고려하여 등가강성을 산정하였다. 지금까지의 연구들은 보강재가 兩側, 片側, 직교 또는 사교로 배치된 경우의 각각에 대하여 되도록 엄밀한 굽힘이론을 제시하려고 하였다.

본 논문에서는 보강평판이론의 일반화를 위하여 해석모델을 비대칭 사교보강평판으로 설정하였으며 응력과 변형율의 관계식을 수정도심을 이용하여 표시하였다. 힘의 평형관계로부터 직교축방향 곡률의 영향을 고려한 수정도심의 위치를 산정하였으며 변형에너지법에 의하여 보강재교차부의 역학적 특성을 고려한 판의

처짐의 4계편미분방정식을 유도하였다. 또한, 본 이론의 정밀성을 입증하기 위하여 振動法⁽¹²⁾에 의한 실험 등가강성을 산정하고 이론치와 비교, 검토하였다.

2. 一般補剛平板理論

일반보강평판의 평형방정식을 유도하기 위하여 Fig. 1과 같이 분포하중이 작용하는 임의 사교보강평판을 해석모델로 설정한다.

Fig. 1 으로부터 Fig. 2와 같이 미소요소를 취하여 판 중앙면으로부터 수정도심 C_1, C_2 까지의 거리를 각각 e_x', e_y' 라 하고 C_1, C_2 에 국부좌표계 (x_1, y_1, z_1) , (β_1, β_1', z_1) 및 (x_2, y_2, z_2) , $(\alpha_2, \alpha_2', z_2)$ 를 각각 설정한다.

Fig. 2의 미소요소를 Fig. 3과 같이 純粹板部, 上面 보강재의 完全格子部 및 순수길이 보강재부로 나누어 각 요소의 變形率과 變位の 관계 및 응력과 변형율의 관계를 구한다.

2.1 변형율과 변위의 관계

보강평판 요소의 변형을 해석함에 있어 線形板理論에 적용되는 기본 가정의에 다음 가정을 추가하여 설정한다.

- (1) 보강재는 등간격으로 조밀하게 배치된다.
- (2) 보강재의 응력상태는 보강재 교차부에서는 평면 응력상태이고, 그의 보강재부에서는 1축응력상태이다.

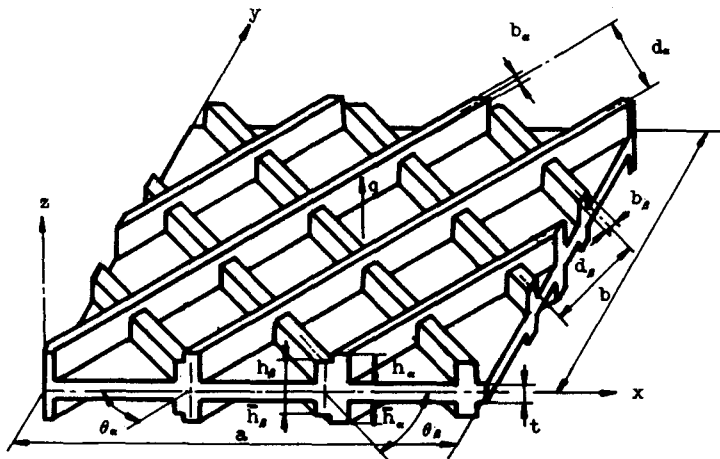


Fig. 1 Configuration of analysis model

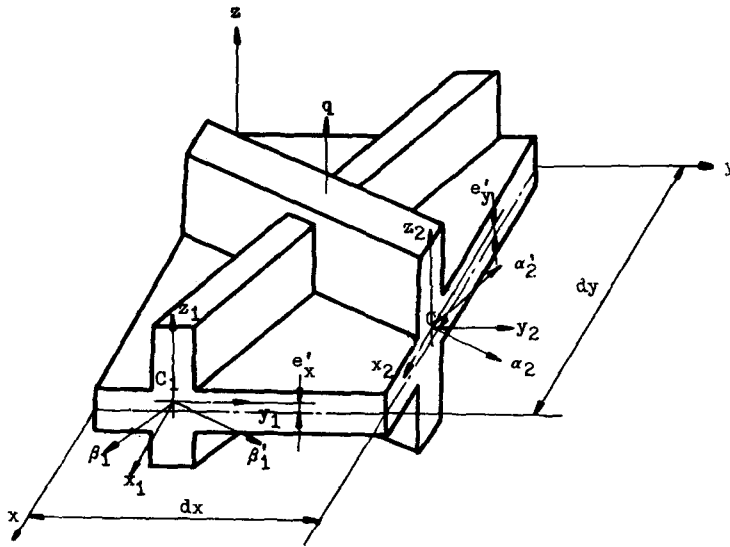


Fig. 2 Infinitesimal element of analysis model

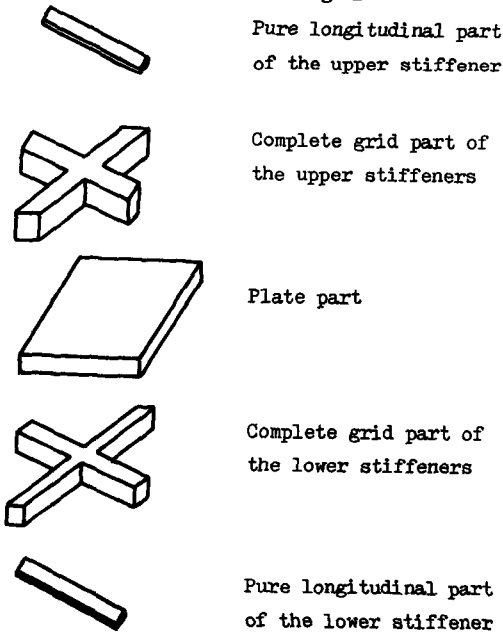


Fig. 3 Decomposition of infinitesimal element

Pure longitudinal part of the upper stiffener

Complete grid part of the upper stiffeners

Plate part

Complete grid part of the lower stiffeners

Pure longitudinal part of the lower stiffener

위치 e'_x, e'_y 로 각각 다음과 같이 표시된다⁽⁶⁾.

$$\begin{aligned} \epsilon^{\circ}_x &= -e'_x k_x \\ \epsilon^{\circ}_y &= -e'_y k_y \\ \gamma^{\circ}_{xy} &= -(e'_x + e'_y) k_{xy} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 x, y 축 방향의 곡률변화 k_x, k_y 및 비틀림 k_{xy} 는 z 축 방향변위 w 의 함수로 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} k_x &= -w_{,xx} \\ k_y &= -w_{,yy} \\ k_{xy} &= -w_{,xy} \end{aligned} \quad (2)$$

순수판부의 임의의 점에서의 x, y 축 방향 변형율은 판 중앙면의 변형율로 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1} &= \epsilon^{\circ}_x + (z_1 + e'_x) k_x \\ \epsilon_{y1} &= \epsilon^{\circ}_y + (z_1 + e'_y) k_y \\ \gamma_{xy1} &= \gamma^{\circ}_{xy} + 2(z_1 + e'_x) k_{xy} \\ \epsilon_{x2} &= \epsilon^{\circ}_x + (z_2 + e'_x) k_x \\ \epsilon_{y2} &= \epsilon^{\circ}_y + (z_2 + e'_y) k_y \\ \gamma_{xy2} &= \gamma^{\circ}_{xy} + 2(z_2 + e'_y) k_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

판 중앙면의 α, β 축 방향 변형율 $\epsilon^{\circ}_\alpha, \epsilon^{\circ}_\beta$ 및 $\gamma^{\circ}_{\alpha\beta}$ 와 곡률변화 k_α, k_β 및 비틀림 $k_{\alpha\alpha'}, k_{\beta\beta'}, k_{\alpha\beta}$ 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{\circ}_\alpha &= \epsilon^{\circ}_x \cos^2 \theta_\alpha + \epsilon^{\circ}_y \sin^2 \theta_\alpha + \frac{\gamma^{\circ}_{xy}}{2} \sin 2\theta_\alpha \\ \epsilon^{\circ}_\beta &= \epsilon^{\circ}_x \cos^2 \theta_\beta + \epsilon^{\circ}_y \sin^2 \theta_\beta - \frac{\gamma^{\circ}_{xy}}{2} \sin 2\theta_\beta \\ \gamma^{\circ}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [(\epsilon^{\circ}_x - \epsilon^{\circ}_y) (\sin 2\theta_\alpha + \sin 2\theta_\beta) \\ &\quad + \gamma^{\circ}_{xy} (\cos 2\theta_\beta - \cos 2\theta_\alpha)] \end{aligned}$$

(3) 전단변형에 대해서 평판 및 보강재는 일체구조로 작용하며, 평판과 보강재 교차부와의 접촉면에서 전단변형율의 연속조건이 만족된다.

上記 가정하에서 각 요소에 대한 변형율과 변위 관계는 수정도식에 설정한 군부좌표계로 다음과 같이 표시할 수 있다.

순수판부에 대하여 수정도식의 정의로부터 판 중앙면의 x, y 축 방향변형율 $\epsilon^{\circ}_x, \epsilon^{\circ}_y$ 및 γ°_{xy} 는 수정도식의

$$\begin{aligned}
 k_a &= k_x \cos^2 \theta_a + k_y \sin^2 \theta_a + k_{xy} \sin 2\theta_a \\
 k_\beta &= k_x \cos^2 \theta_\beta + k_y \sin^2 \theta_\beta + k_{xy} \sin 2\theta_\beta \\
 k_{aa}' &= \frac{k_y - k_x}{2} \sin 2\theta_a + k_{xy} \cos 2\theta_a \\
 k_{\beta\beta}' &= \frac{k_x - k_y}{2} \sin 2\theta_\beta + k_{xy} \cos 2\theta_\beta \\
 k_{a\beta}' &= \frac{1}{2} \left[\frac{k_x - k_y}{2} (\sin 2\theta_a + \sin 2\theta_\beta) + k_{xy} (\cos 2\theta_\beta - \cos 2\theta_a) \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

상하면 보강재부의 수직변형률 $\epsilon_{a1}, \epsilon_{\beta 1}, \epsilon_{a2}$ 및 $\epsilon_{\beta 2}$ 는 판 중앙면의 α, β 축 방향 변형률로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{a1} &= \epsilon^\circ_a + (z_1 + e'_x) k_a \\
 \epsilon_{\beta 1} &= \epsilon^\circ_\beta + (z_1 + e'_x) k_\beta \\
 \epsilon_{a2} &= \epsilon^\circ_a + (z_2 + e'_y) k_a \\
 \epsilon_{\beta 2} &= \epsilon^\circ_\beta + (z_2 + e'_y) k_\beta \quad (5)
 \end{aligned}$$

상하면 보강재의 완전격자부의 전단변형률 $\gamma'_{a\beta}$ 와 $\bar{\gamma}'_{a\beta}$ 는 가정 (3)으로부터 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \gamma'_{a\beta} &= \gamma^\circ_{a\beta} + 2e_\beta k_{a\beta} \\
 \bar{\gamma}'_{a\beta} &= \gamma^\circ_{a\beta} - 2\bar{e}_\beta k_{a\beta} \quad (6)
 \end{aligned}$$

여기서

$$e_\beta = \frac{t + h_\beta}{2}, \quad \bar{e}_\beta = \frac{t + \bar{h}_\beta}{2} \quad (7)$$

2.2 응력과 변형률의 관계

순수판부에서의 응력과 변형률의 관계는 Hooke의 법칙으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x1} &= E'(\epsilon_{x1} + \nu\epsilon_{y1}) \\
 \sigma_{y2} &= E'(\epsilon_{y2} + \nu\epsilon_{x2}) \\
 \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (9)$$

상하면 보강재의 완전격자부에 대하여는 완전격자부의 α, β 축 방향보강재의 수직응력 σ'_{a2} 및 $\sigma'_{\beta 1}$ 는 β 와 α 축 방향보강재가 각각 α 와 β 축 방향보강재와 交角 ϕ 로 部分結合되어 있으므로 프와송의 영향을 고려하여 $\epsilon_{a1}, \epsilon_{\beta 1}, \epsilon_{a2}$ 및 $\epsilon_{\beta 2}$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{a2} &= E^*(\epsilon_{a2} + \nu\eta_\beta \sin^2 \phi \cdot \epsilon_{\beta 2}) \\
 \sigma'_{\beta 1} &= E^*(\epsilon_{\beta 1} + \nu\eta_\alpha \sin^2 \phi \cdot \epsilon_{a1}) \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 E^* &= \frac{E}{1 - \nu^2 \eta_\alpha \eta_\beta \sin^4 \phi} \\
 \eta_\alpha &= \frac{b_\alpha}{d_\alpha}, \quad \eta_\beta = \frac{b_\beta}{d_\beta} \quad (11)
 \end{aligned}$$

상하면 보강재의 완전격자부의 전단응력 $\tau'_{a\beta}$ 와 $\bar{\tau}'_{a\beta}$

는 식 (6)으로부터 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \tau'_{a\beta} &= G\gamma'_{a\beta} \\
 \bar{\tau}'_{a\beta} &= G\bar{\gamma}'_{a\beta} \quad (12)
 \end{aligned}$$

상하면 보강재의 순수결이 보강재부는 1축 응력상태로서 응력과 변형률의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma'_{a2} = E\epsilon_{a2} \quad (13)$$

2.3 수정도심의 결정

식 (1)~(13)으로부터 Fig. 2의 x, y 축 단면의 수직력의 합력을 각각 구하고 힘의 평형관계를 적용하면 상대 직교축방향 곡률변화가 수직응력에 미치는 영향을 고려한 e'_x 및 e'_y 의 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (C_{11}k_x + C_{13}k_{xy})e'_x + (C_{12}k_y + C_{13}k_{xy})e'_y - C_{14}k_x \\
 - C_{15}k_y - C_{16}k_{xy} = 0 \\
 (C_{21}k_x + C_{23}k_{xy})e'_x + (C_{22}k_y + C_{23}k_{xy})e'_y - C_{24}k_x \\
 - C_{25}k_y - C_{26}k_{xy} = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 $C_{11} \sim C_{26}$ 는 참고문헌 (13)에 수록되어 있다.

식 (14)로부터 e'_x 및 e'_y 는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 e'_x &= \frac{(C_{14} + C_{15} \frac{k_y}{k_x} + C_{16} \frac{k_{xy}}{k_x})(C_{22} + C_{23} \frac{k_{xy}}{k_y}) - (C_{24} \\
 &\quad - (C_{11} + C_{13} \frac{k_{xy}}{k_x})(C_{22} + C_{23} \frac{k_{xy}}{k_y}) - (C_{12} + C_{13} \frac{k_{xy}}{k_y}) \\
 &\quad + C_{25} \frac{k_y}{k_x} + C_{26} \frac{k_{xy}}{k_x})(C_{12} + C_{13} \frac{k_{xy}}{k_y})}{\times (C_{21} + C_{23} \frac{k_{xy}}{k_x})} \\
 e'_y &= \frac{(C_{25} + C_{24} \frac{k_x}{k_y} + C_{26} \frac{k_{xy}}{k_y})(C_{11} + C_{13} \frac{k_{xy}}{k_x}) - (C_{15} \\
 &\quad - (C_{11} + C_{13} \frac{k_{xy}}{k_x})(C_{22} + C_{23} \frac{k_{xy}}{k_y}) - (C_{12} + C_{13} \frac{k_{xy}}{k_y}) \\
 &\quad + C_{14} \frac{k_x}{k_y} + C_{16} \frac{k_{xy}}{k_y})(C_{21} + C_{23} \frac{k_{xy}}{k_x})}{\times (C_{21} + C_{23} \frac{k_{xy}}{k_x})} \quad (15)
 \end{aligned}$$

식 (15)에서 강성계수항에 비하여 곡률변화를 포함하는 항들이 작아 무시하면^(6,7) e'_x 및 e'_y 는 각각 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 e'_x &= \frac{C_{14}C_{22} - C_{12}C_{24}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \\
 e'_y &= \frac{C_{11}C_{25} - C_{12}C_{15}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (16)
 \end{aligned}$$

2.4 系の 포텐셜에너지 관계식

일반적으로 탄성체에서의 변형에너지 U 는 다음과 같이 표시된다.

$$U = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx dy dz \quad (17)$$

해석모델의 변형에너지 U 는 Fig. 3의 각 구성요소(순수판부, 상하면 보강재의 완전격자부, 상하면 보강재의 순수길이 보강재부)의 신장 및 굽힘에 의한 변형에너지 $U_p, U_{cs}, \bar{U}_{cs}, U_{is}$ 및 \bar{U}_{is} 와 상하면 보강재부의 St. Venant 비틀림에 의한 변형에너지 U_{ts} 및 \bar{U}_{ts} 의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = U_p + U_{cs} + \bar{U}_{cs} + U_{is} + \bar{U}_{is} + U_{ts} + \bar{U}_{ts} \quad (18)$$

변형률과 변위의 관계식 (3), (5) 및 (6)과 응력과 변형률의 관계식 (8), (10), (12) 및 (13)을 식 (17)에 대입하면 다음과 같이 각 구성요소의 변형에너지를 구할 수 있다.

순수판부의 변형에너지 U_p 는 식 (8) 및 (17)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$U_p = \frac{E'}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu'} (\epsilon_{x1}^2 + \nu \epsilon_{x1} \epsilon_{y1}) dz_1 \right. \\ \left. + \int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu'} (\epsilon_{y1}^2 + \nu \epsilon_{x2} \epsilon_{y2}) dz_2 + \frac{1-\nu}{2} \right. \\ \left. \times \int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu'} \gamma_{xy}^2 dz_1 \right] dx dy \quad (19)$$

상하면 보강재의 완전격자부의 변형에너지 U_{cs} 와 \bar{U}_{cs} 는 식 (10), (12) 및 (17)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$U_{cs} = \frac{E^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu' + h} \eta_a (\epsilon_{a2}^2 + \nu \eta_a \sin^2 \phi \epsilon_{a2} \epsilon_{\beta 2}) dz_2 \right. \\ \left. + \int_{\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu' + h} \eta_\beta (\epsilon_{\beta 1}^2 + \nu \eta_\beta \sin^2 \phi \epsilon_{\beta 1} \epsilon_{a 1}) dz_1 \right] dx dy \\ + \frac{G}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu' + h} \xi \gamma_{a\beta}^2 dz_1 \right] dx dy \\ \bar{U}_{cs} = \frac{E^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{-\frac{z}{2} - \nu' + h} \eta_a (\epsilon_{a2}^2 \right. \\ \left. + \nu \eta_a \sin^2 \phi \epsilon_{a2} \epsilon_{\beta 2}) dz_2 + \int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{-\frac{z}{2} - \nu' + h} \eta_\beta (\epsilon_{\beta 1}^2 \right. \\ \left. + \nu \eta_\beta \sin^2 \phi \epsilon_{\beta 1} \epsilon_{a 1}) dz_1 \right] dx dy \\ + \frac{G}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{-\frac{z}{2} - \nu' + h} \xi \bar{\gamma}_{a\beta}^2 dz_1 \right] dx dy \quad (20)$$

여기서

$$\xi = \frac{\eta_a \eta_\beta}{\eta_a + \eta_\beta} \quad (21)$$

상하면 보강재의 순수길이 보강재부의 변형에너지 U_{is} 와 \bar{U}_{is} 는 식 (13) 및 (17)로부터 각각 다음과 같이 표시된다.

$$U_{is} = \frac{E}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{\frac{z}{2} - \nu'}^{\frac{z}{2} - \nu' + h} \eta_a \epsilon_{a2}^2 dz_2 \right] dx dy \\ \bar{U}_{is} = \frac{E}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{-\frac{z}{2} - \nu'}^{-\frac{z}{2} - \nu' + h} \eta_a \epsilon_{a2}^2 dz_2 \right] dx dy \quad (22)$$

St. Venant 비틀림에 의한 보강재부의 변형에너지 U_{ts} 와 \bar{U}_{ts} 는 곡률변화 및 비틀림 상수로 각각 다음과 같이 표시된다.

$$U_{ts} = \frac{G}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{J_a}{d_a} k_{aa}^2 + \frac{J_\beta}{d_\beta} k_{\beta\beta}^2 \right) dx dy \\ \bar{U}_{ts} = \frac{G}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\bar{J}_a}{d_a} k_{aa}^2 + \frac{\bar{J}_\beta}{d_\beta} k_{\beta\beta}^2 \right) dx dy \quad (23)$$

여기서 J_a, r_β, \bar{J}_a 및 \bar{J}_β 는 각각 상하면 보강재의 비틀림상수를 나타낸다.

식 (19), (20), (22) 및 (23)에 식 (1)~(6)을 각각 대입하여 식 (18)로부터 전 변형에너지 U 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{\epsilon\}^T [C_{ij}] \{\epsilon\} dx dy \quad (24)$$

여기서 강성계수 행렬 $[C_{ij}]$ 는 참고문헌 (13)에 수록되어 있으며 $\{\epsilon\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^x, \epsilon^y, \gamma^x, k_x, k_y, k_{xy}\}^T \quad (25)$$

분포하중 q 의 포텐셜에너지 v_q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_q = \int_0^a \int_0^b q w dx dy \quad (26)$$

식 (24) 및 (26)으로부터 전포텐셜에너지 π 는 다음과 같이 된다.

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{\epsilon\}^T [C_{ij}] \{\epsilon\} dx dy - \int_0^a \int_0^b q w dx dy \quad (27)$$

2.4 평형방정식

포텐셜에너지 원리로부터 평형방정식을 구하기 위하여 식 (27)의 1次變分 $\delta\pi$ 를 0으로 놓으면 다음과 같이 된다.

$$\delta\pi = - \int_0^a \int_0^b \left(- \{ (C_{44} - 2C_{14}e_x' + C_{11}e_x'^2) w,_{xx} \right. \\ \left. + (C_{45} - 2C_{15}e_y' + C_{12}e_x'e_y') w,_{yy} + [C_{46} - C_{16}e_x' \right. \\ \left. - C_{34}(e_x' + e_y') + C_{13}e_x'(e_x' + e_y')] w,_{xy} \right)_{,xx} \\ - \{ (C_{45} - 2C_{15}e_x' + C_{12}e_x'e_y') w,_{xx} + (C_{55} - 2C_{25}e_y' \\ \left. + C_{22}e_y'^2) w,_{yy} + [C_{56} - C_{26}e_y' - C_{35}(e_x' + e_y') \right. \\ \left. + C_{23}e_y'(e_x' + e_y')] w,_{xy} \right)_{,yy} - \{ [C_{46} - C_{16}e_x' \\ - C_{34}(e_x' + e_y') + C_{13}(e_x' + e_y')] w,_{xx} + [C_{56} - C_{26}e_y' \\ - C_{35}(e_x' + e_y') + C_{23}e_y'(e_x' + e_y')] w,_{yy} + [C_{66} \\ - 2C_{36}(e_x' + e_y') + C_{33}(e_x' + e_y')^2] w,_{xy} \right)_{,xy} \\ \left. + q \right) \delta w dx dy + \int_0^b \left(- \{ (C_{44} - 2C_{14}e_x' + C_{11}e_x'^2) w,_{xx} \right. \\ \left. + (C_{45} - 2C_{15}e_y' + C_{12}e_x'e_y') w,_{yy} + [C_{46} - C_{16}e_x' \right. \\ \left. - C_{34}(e_x' + e_y') + C_{13}e_x'(e_x' + e_y')] w,_{xy} \right)_{,x} - \{ [C_{46} \\ - C_{16}e_x' - C_{34}(e_x' + e_y') + C_{13}e_x'(e_x' + e_y')] w,_{xx} \\ \left. + [C_{56} - C_{26}e_y' - C_{35}(e_x' + e_y') + C_{23}e_y'(e_x' \right. \\ \left. + e_y')] w,_{yy} + [C_{66} - 2C_{36}(e_x' + e_y') + C_{33}(e_x' \\ \left. + e_y')^2] w,_{xy} \right)_{,y} \delta w + \{ (C_{44} - 2C_{14}e_x' \\ \left. + C_{11}e_x'^2) w,_{xx} + (C_{45} - 2C_{15}e_y' + C_{12}e_x'e_y') w,_{yy} \right. \\ \left. + [(C_{46} - C_{16}e_x' - C_{34}(e_x' + e_y') + C_{13}e_x'(e_x' \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+e_y')w_{,xy}]\delta w_{,x} \Big] dx + \int_0^a \left[-\{(C_{45}-2C_{15}e_x' \right. \\
 &+C_{12}e_x'e_y')w_{,xx}+(C_{55}-2C_{25}e_y'+C_{22}e_y'^2)w_{,yy} \\
 &+[C_{56}-C_{26}e_y'-C_{35}(e_x'+e_y')+C_{23}e_y'(e_x' \\
 &+e_y')]w_{,xy}\}_{,y}-\{[C_{46}-C_{16}e_x'-C_{34}(e_x'+e_y') \\
 &+C_{13}e_x'(e_x'+e_y')][w_{,xx}+[C_{56}-C_{26}e_y'-C_{35}(e_x' \\
 &+e_y')+C_{23}e_y'(e_x'+e_y')]\}_{,y}+ [C_{66}-2C_{36}(e_x' \\
 &+e_y')+C_{33}(e_x'+e_y')]w_{,yy}\}_{,x} \Big] \delta w + \{(C_{45} \\
 &-2C_{15}e_x'+C_{12}e_x'e_y')w_{,xx}+(C_{55}-2C_{25}e_y' \\
 &+C_{22}e_y'^2)w_{,yy}+[C_{56}-C_{26}e_y'-C_{35}(e_x'+e_y') \\
 &+C_{23}e_y'(e_x'+e_y')]\}_{,y} \Big] \delta w_{,y} \Big] dx = 0 \quad (28)
 \end{aligned}$$

식 (28)로부터 다음과 같이 w 만으로 표시된 평형방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 D_x w_{,xxxx} + 2Hw_{,xyxy} + D_1 w_{,xyyy} = q + D_a w_{,xxx} \\
 + D_b w_{,xyyy} \quad (29)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 D_x &= C_{44} - 2C_{14}e_x' + C_{11}e_x'^2 \\
 2H &= 2[C_{45} - C_{15}(e_x' + e_y') + C_{12}e_x'e_y'] \\
 &\quad + C_{66} - 2C_{36}(e_x' + e_y') + C_{33}(e_x' + e_y')^2 \\
 D_y &= C_{55} - 2C_{25}e_y' + C_{22}e_y'^2 \\
 D_a &= -2[C_{46} - C_{16}e_x' - C_{34}(e_x' + e_y') + C_{13}e_x'(e_x' \\
 &\quad + e_y')] \\
 D_b &= -2[C_{56} - C_{26}e_y' - C_{35}(e_x' + e_y') + C_{23}e_y'(e_x' \\
 &\quad + e_y')] \quad (30)
 \end{aligned}$$

식 (29)에서 종방향 및 직교방향 보강의 경우와 등경사각 보강($\theta_a = \theta_b$)인 경우는 D_a 및 D_b 는 0이 되고 그 외의 경우에도 조밀하게 보강된 경우는 굽힘에 미치는 비틀림의 변화 및 비틀림에 미치는 폭틀의 변화를 무시할 수 있으므로 식 (29)는 다음과 같이 Huber형 방정식이 된다.

$$D_x w_{,xxxx} + 2(D_1 + 2D_{xy})w_{,xyxy} + D_1 w_{,xyyy} = q \quad (31)$$

여기서

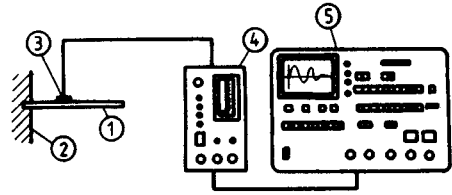
$$\begin{aligned}
 D_1 &= C_{45} - C_{15}(e_x' + e_y') + C_{12}e_x'e_y' \\
 D_{xy} &= \frac{1}{4}[C_{66} - 2C_{36}(e_x' + e_y') + C_{33}(e_x' + e_y')^2] \quad (32)
 \end{aligned}$$

3. 實 驗

동일단면의 보강재가 한쪽면에만 등경사각도로 배치된 편면사교보강평판의 등가강성을 다음과 같이 振動法⁽¹²⁾에 의하여 실험적으로 구하였다.

3.1 等價剛性的 實驗式

보강평판의 등가강성은 참고문헌 (12)로부터 다음과 같이 주어진다.



- ① Cantilever plate
- ② Clamping support
- ③ Gap sensor
- ④ Amplifier
- ⑤ FFT Analyzer

Fig. 4 Schematic diagram of experimental equipments

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{f_{11}^2}{0.3073g} ma^4 \\
 D_y &= \frac{f'_{11}{}^2}{0.3073g} mb^4 \\
 D_{xy} &= \frac{(f_{12}^2 - 1.6228f_{11}^2)}{3.9448g} ma^2b^2 \quad (33)
 \end{aligned}$$

여기서 f_{11} 과 f_{12} 는 각각 $y=0$ 을 고정단으로 하는 외팔판의 1 및 2차 모드에서의 고유진동수이며 f'_{11} 는 $x=0$ 을 고정단으로 한 경우의 1차 모드에서의 고유진동수이다. 또한, \bar{m} 는 단위면적당 중량이고 g 는 중력가속도이다.

이들 고유진동수 f_{11}, f'_{11} 및 f_{12} 를 측정하여 식 (33)에 대입하면 실험등가강성 D_x, D_y 및 D_{xy} 를 각각 구할 수 있다.

3.2 實驗裝置 및 方法

Fig. 4는 외팔판의 자유진동 실험장치의 概要圖를 보여주고 있으며, 외팔판의 자유진동에 의한 판의 수직방향 변위를 갭센서(gap sensor)로 感知하고 증폭기에서 증폭시킨 다음 FFT 해석기에 入力시켜 고유진동수를 측정한다.

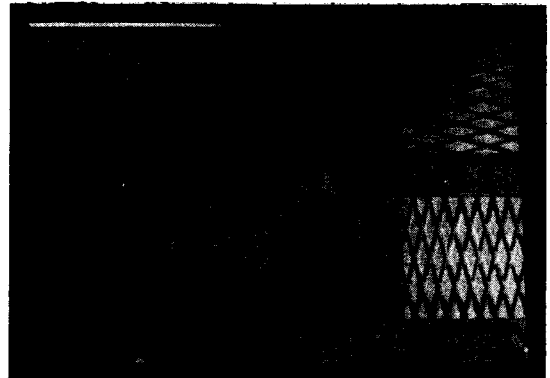


Fig. 5 View of test specimens

Table 1 Specimen dimensions for obliquely stiffened plates denoted by A-1~A-11 and isotropic plates denoted by I-1~I-3 (mm)

| Specimen | a | b | t | $\frac{b_a=b_p}{=b_s}$ | $\frac{h_a=h_p}{=h_s}$ | $\frac{d_a=d_p}{=d_s}$ | $\theta_s(^{\circ})$ |
|----------|-----|-----|---|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------|
| I-1 | 200 | 200 | 1 | — | — | — | — |
| I-2 | 200 | 200 | 2 | — | — | — | — |
| I-3 | 200 | 200 | 3 | — | — | — | — |
| A-1 | 200 | 200 | 1 | 9.0 | 1.0 | 25.00 | 30 |
| A-2 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 25.00 | 30 |
| A-3 | 200 | 200 | 1 | 3.0 | 3.0 | 25.00 | 30 |
| A-4 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 25.00 | 45 |
| A-5 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 28.28 | 45 |
| A-6 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 35.36 | 45 |
| A-7 | 200 | 200 | 1 | 9.0 | 1.0 | 25.00 | 60 |
| A-8 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 25.00 | 60 |
| A-9 | 200 | 200 | 1 | 3.0 | 3.0 | 25.00 | 60 |
| A-10 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 25.00 | 15 |
| A-11 | 200 | 200 | 1 | 4.5 | 2.0 | 25.00 | 75 |

3.3 試驗片

시험편의 재료는 알루미늄 5052P의 構造用알루미늄 판을 사용하였으며 판과 보강재는 強力接着劑(商品名: Chain-lock)로 접착하였다.

알루미늄 5052P의 탄성계수 E 와 프와송의 비 ν 는

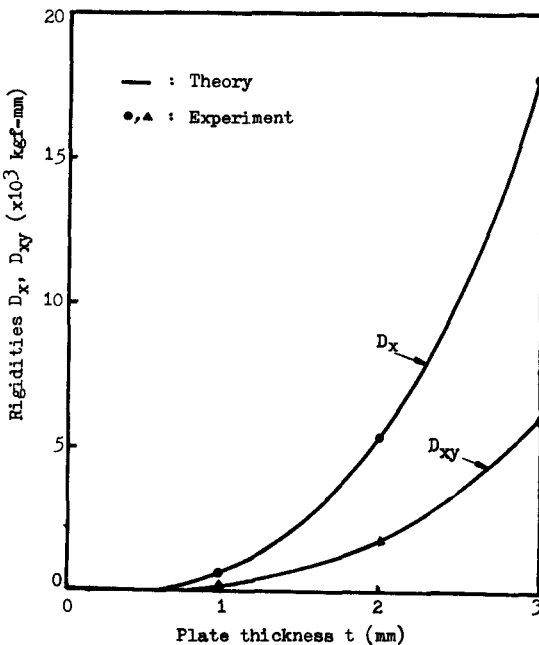


Fig. 6 Rigidities of unstiffened plates

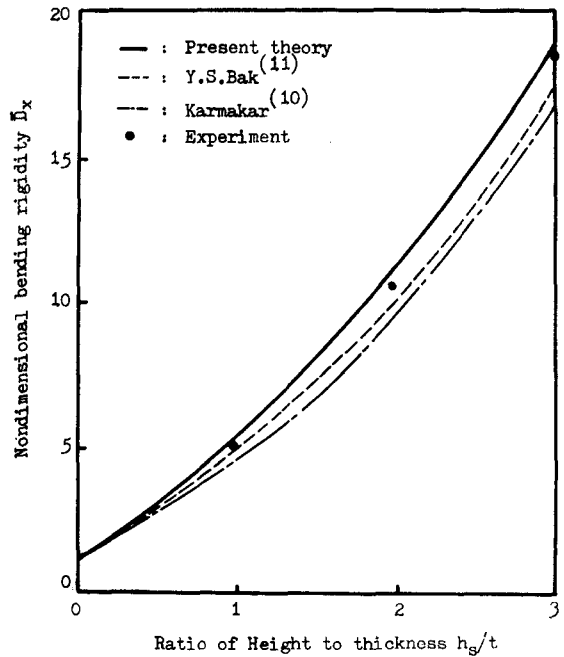


Fig. 7 Bending rigidities of obliquely stiffened plates for the variation of stiffener height (A-1, A-2, A-3)

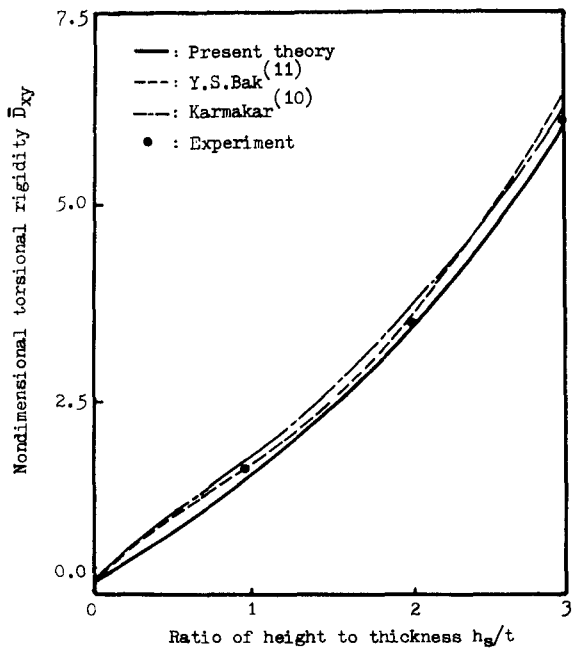


Fig. 8 Torsional rigidities of obliquely stiffened plates for the variation of stiffener height (A-1, A-2, A-3)

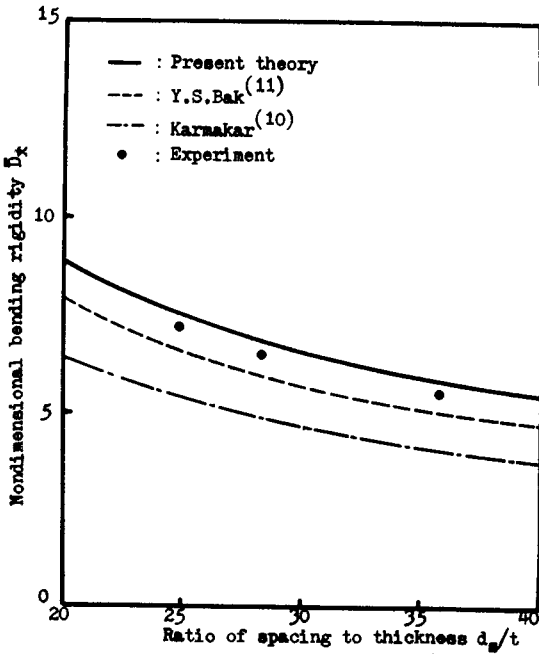


Fig. 9 Bending rigidities of obliquely stiffened plates for the variation of stiffener spacing (A-4, A-5, A-6)

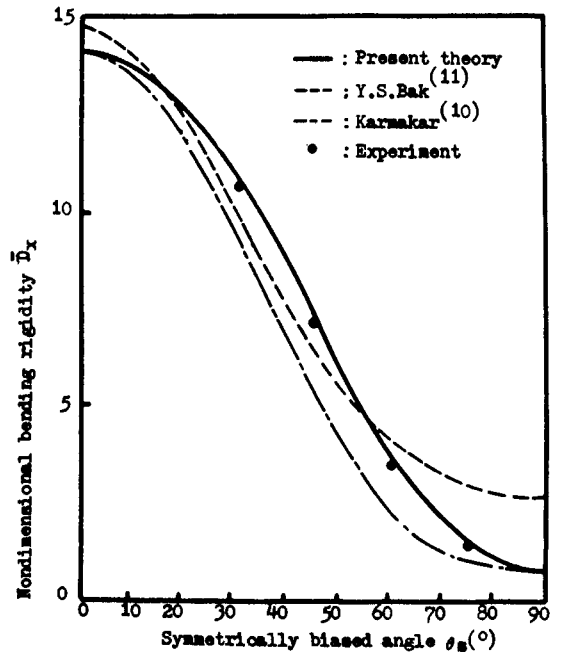


Fig. 11 Bending rigidities of obliquely stiffened plates for the variation stiffening angle (A-2, A-4, A-8, A-10, A-11)

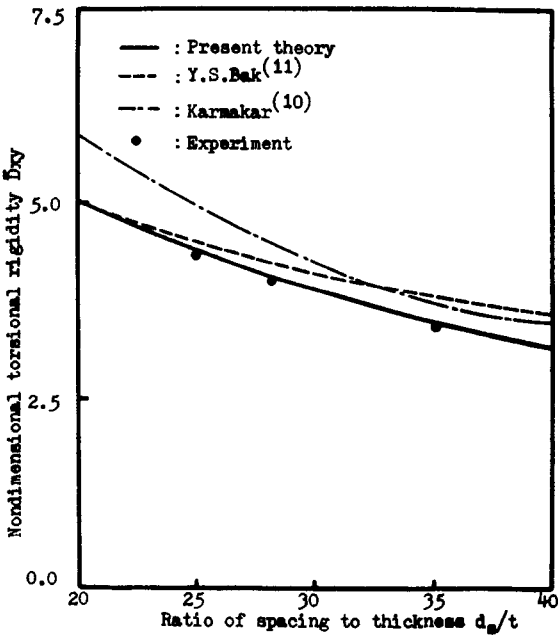


Fig. 10 Torsional rigidities of obliquely stiffened plates for the variation of stiffener spacing (A-4, A-5, A6)

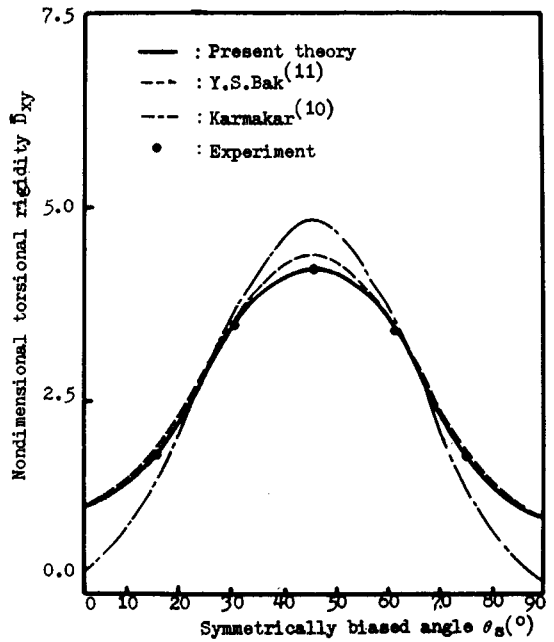


Fig. 12 Torsional rigidities of obliquely stiffened plates for the variation of stiffening angle (A-2, A-4, A-8, A-10, A-11)

인장 실험을 통하여 측정하였으며 그 값은 각각 7,100 kgf/mm² 과 0.333 이었다.

Fig. 5는 본 시험편의 형상을 보여주고 있으며 상세한 치수는 Table 1에 표시하고 있다.

4. 實驗結果 및 檢討

진동법의 檢證을 위하여 非보강평판의 실험등가강성을 산정하였으며 그 결과를 Fig. 6에서 보여주고 있다. Fig. 6에서 실험치가 이론치에 비해 2.5~3.5% 정도 낮은데 이것은 공기의 저항과 고정경계조건에 따른 減衰現象 때문인 것으로 생각된다.

편편 사교보강평판의 등가강성의 실험치를 비보강평판의 굽힘강성 D 로 無次元化하여 Fig. 7~12로 나타내었다. Fig. 7과 9에서 D_x 의 실험치는 본 이론치에 접근하고 있는데 Karmakar⁽¹⁰⁾와 백운수⁽¹¹⁾는 약간 낮은 값을 보이고 있다. Fig. 8과 10에서 D_{xy} 의 실험치도 본 이론에 접근하고 있으며 Karmakar⁽¹⁰⁾와 백운수⁽¹¹⁾는 모두 보강재 교차부의 평면응력상태를 고려하지 않아 과대평가되어 있다. Fig. 11과 12에서는 보강재의 경사각도의 변화에 따른 D_x 와 D_{xy} 의 실험치를 보여주고 있는데 모두 본 이론치에 접근함을 알 수 있다.

5. 結 論

직 4 각형 단면의 보강재가 임의의 각도로 배치되어 보강된 일반 보강평판의 평형방정식을 에너지법을 사용하여 유도하고 진동법에 의하여 실험등가강성을 구하여 이론값과 비교하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 수정도심의 개념을 적용하여 일반 보강평판의 응력과 변형을 관계식을 구하고 평형방정식을 Huber형 방정식으로 유도하였다.

(2) 본 이론에 의한 등가강성은 진동법에 의하여 구한 실험치와 잘 일치하였다.

후 기

본 연구는 1985년도 한국과학재단 차관연구비의 지원으로 이루어졌으며 관계자 여러분께 감사사를 드린다.

參 考 文 獻

(1) Huber, M.T., "Die Grundlagen einer Rationellen

Berechnung der Kreuzweise Bewehrten Eisenbetonplatten, zeitschrift des Osterr", Ingenieur und Architekten Bereines, Vol. 66, No. 30, pp.557~564, 1914

(2) Huber, M.T., "Die Theorie der Kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben uber rechteckige Platten", Bauingenieur, Vol. 5, pp.354~360, 392~395, 1923

(3) S.G. Lechnitsky, Anisotropic Plates, Translated by S.W. Tsai, G & B Sc. Publishers, Inc. p.273, 1968

(4) Huffington, Jr. N.J., "Theoretical Determination of Rigidity Properties of Orthogonally Stiffened Plates", J. Applied Mech., Vol. 23, No. 1 pp.15~20, 1956

(5) Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, N.Y. 1959

(6) Giencke, E., "Die Grundgleichungen fur die Orthotrope Platte mit Extentrishen Steifen", Stahlbau, Vol. 24, No. 6, pp.128~129, 1955

(7) Cusens, A.R., Zeiden, M.A. and Pama, R.P., "Elastic Rigidity of Ribbed Plates", Building Science, Vol. 7, pp.23~32, 1922

(8) Nishino, F., Pama, R.P. and Lee, S.L., "Orthotropic Plates with Eccentric Stiffeners", Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 34- II, pp.117~129, 1974

(9) Hasegawa, A., Akiyama, H. and Nishino, F., "Analysis of Plates with Single-Sided Stiffeners", Japan Society of Civil Engineering, Vol. 270, pp. 23~34, 1975

(10) R. Karmakar, "Buckling of Waffle Cylinders", Aeronautical Journal, Vol. 83, pp.274~278, 1979

(11) 백운수, "이방성 보강평판의 강성에 관한 연구", 연세대 대학원 기계공학과 석사학위논문, 1981

(12) 김천욱 외 3인, "진동법에 의한 보강평판의 강성측정연구", 대한기계학회논문집, 제 9권, 제 2호, pp.174~180, 1985

(13) 원종진, "사교 보강평판의 최적강성설계에 관한 연구", 연세대학교 대학원 기계공학과 박사학위논문, 1986