

<論 文>

직사각형 밀폐공간내에서의 복사 및 자연대류 열전달

김기훈* · 이택식** · 이준식**

(1987년 1월 27일 접수)

Combined Radiation-Natural Convection Heat Transfer
in a Rectangular Enclosure

Ki Hoon Kim, Taik Sik Lee and Joon Sik Lee

Key Words: Optical Thickness(광학두께), Incident Radiation(투사복사), Stark Number (Stark 수), Radiation Intensity(복사강도), P-1 Approximation(P-1 근사), Surface Radiation(표면복사), Gray Diffuse Surface(회산광면)

Abstract

A numerical analysis has been conducted on the interaction of the thermal radiation and natural convection in a rectangular enclosure filled with a gray fluid.

P-1 approximation is adopted for the radiative transfer and its application limit is examined.

Considered are the Stark number effect, the optical thickness effect and the wall emissivity effect on the flow and heat transfer characteristics.

As the Stark number increases or the optical thickness decreases, the boundary layer thickness and the flow velocity increase. Transition to turbulence is retarded with the increase of the radiation effect.

When the optical thickness is one, the radiation effect is negligible for the Stark numbers larger than 10.

기 호 설 명

- A : 종횡비, $A=H/L$
- a : 유체의 흡수계수
- c : 비열
- G : 무차원 투사복사(incident radiation)
- g : 투사복사 또는 중력가속도
- H : 밀폐공간의 가로길이

- i : 복사강도(intensity)
- J : 무차원 radiosity
- j : Radiosity
- k : 유체의 열전도율
- H : 밀폐공간의 세로길이
- N : Stark 수
- N^* : 수정된 Stark 수
- Nu_m : 평균 Nusselt 수
- n : 유체의 굴절율
- P : 무차원 압력

* 정희원, 서울대학교 대학원 기계공학과
 ** 정희원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

p	: 압력
Pr	: Prandtl 수
Q	: 무차원 열유속
q	: 열유속
Ra	: Rayleigh 수
S	: 벽에서의 위치 좌표
s	: 복사의 진행방향
T	: 무차원 온도
T_m	: 무차원 평균온도, $T_m = (t_h + t_c) / 2(t_h - t_c)$
t	: 온도
U	: 무차원 u 속도
u	: x 방향 속도
V	: 무차원 v 속도
v	: y 방향 속도
X	: 무차원 x 좌표
x	: 직교 좌표계의 횡 좌표
Y	: 무차원 y 좌표
y	: 직교 좌표계의 종 좌표

그리이스문자

α	: 열확산계수
β	: 열팽창계수
ϵ_i	: 벽면 i 에서의 방사율 ($i=1, 2, 3, 4$)
θ	: 위치 벡터와 y 축이 이루는 각
ν	: 동점성계수
ρ	: 밀도
ρ_i	: 벽면 i 에서의 반사율
σ	: Stefan-Boltzmann 상수
σ_s	: 유체의 산란계수
τ_0	: 광학두께 (optical thickness)
ϕ	: 방위각 (azimuthal angle)
ω	: 입체각 (solid angle)

상첨자

'	: 방향을 갖는 상태량
*	: 수정된 상태량

하첨자

b	: 흑체
c	: 저온벽
cond	: 전도
conv	: 대류
h	: 고온벽
i	: 벽면 ($i=1, 2, 3, 4$)
m	: 평균값

o	: 기준상태
r	: 복사
w	: 벽면에서의 값
x	: x 방향
y	: y 방향
λ	: 파장

기 타

—	: 벡터량
\wedge	: 단위 벡터
dt	: $t_h - t_c$

1. 서 론

지난 수년간 밀폐공간에서의 자연대류에 대한 연구는 많이 수행되어 왔으며, 상당한 학문적, 기술적 축적을 이루었다⁽¹⁻⁵⁾. 그러나 보일러, 산업용 로, 엔진 실린더 내부에서의 열전달, 고체입자를 갖는 고온 열시 시스템에서의 열전달 등의 해석에서 복사 열전달에 의한 영향은 무시될 수 없으며, 따라서 최근 벽면에서의 전도와 벽면사이의 복사를 포함하는 문제의 확장이 중요시되고 있다.

수직 밀폐공간의 경계층 영역에서의 대류와 복사의 상호연관성에 대하여 Bratis와 Novotny⁽⁶⁾가 해석적, 실험적으로 검토하였다. 이들은 그리 높지 않은 온도를 갖는 복사 기체인 경우에 있어서 경계층 해석을 시도하였다. Larson과 Viskanta⁽⁷⁾는 열복사가 있는 정사각형 밀폐공간내에서 종류 자연대류의 시간에 따른 변화과정을 연구하였는데, 이들은 복사에 의해 밀폐공간의 벽면과 기체의 온도가 상승하고, 유동과 이에 따르는 대류현상도 상당히 변화한다는 것을 발견하였다. Modak과 Mathew⁽⁸⁾는 뜨거운 밀폐공간의 벽면과 기체층으로부터 밀폐공간내의 입의의 방향으로의 열복사 교환에 대한 연구에서 복사가 화재의 형성에 미치는 영향이 지대하다는 것을 밝히고 있다. Lauriat⁽⁹⁾는 밀폐공간내에서 최유체에서의 열복사가 자연대류에 미치는 영향에 대해 2차원 P-1 근사를 이용하여 수치적으로 연구하였다. 전도, 천이 그리고 경계층 영역에서의 복사의 영향을 검토하였는데, 낮은 Rayleigh 수에서 복사는 유동을 약화시키는데 비해 대류 영역에서는 오히려 유동을 촉진시킨다는 결과를 얻었다. Chang, Yang 그리고 Lloyd⁽¹⁰⁾ 등은 정사각형 밀폐공간내의 천정과 바닥의 중앙에 간막이가 존재할 때 복사와 자연대류의 상호영향에 대한 2차원적 해석을 유한 차분법을 이용해 수행하였다. 이들은 밀폐공간내의 복사교환계산에

radial flux 방법을 도입하였다.

복사 열전달의 해석에 있어서 주로 1차원 모델이 사용되어 왔으나 실제 적용면에서 다차원 형상에 응용할 수 있는 방법을 모색하게 되어 Monte Carlo 방법, Hottel's Zonal 방법, 그리고 근사방법 등이 개발되어 왔다. 그러나 Monte Carlo 방법과 Hottel's Zonal 방법은 산란 문제를 다루는데 있어 너무 시간이 많이 걸리고 내용이 복잡하다는 단점이 있다. 2차원 열전달 현상에서 복사계산에 수반되는 수학적 복잡성 때문에 근사 해석의 적용이 중요하게 되었다. 그중 2차원 이상의 복사 열전달에 가장 적합하다고 알려진 방법이 미분형 수식화이다. Traugott⁽¹¹⁾는 유체의 열복사에 있어서 파장의 영향을 수용하기 위해 spherical harmonic method의 P-1 근사를 이용하였고, Deissler⁽¹²⁾는 순수하게 복사만이 존재하는 1차원 문제에 대해 P-1 근사를 사용해서 계산하였으며, Chou와 Tien⁽¹³⁾은 수정된 1차 근사에 의해 해석하였다. 또한 1차원 형상에 대한 P-1 근사의 정확성과 다차원 Cartesian 형상에 대한 정확성 여부가 검토된 바 있다. Higenly와 Bayazitoglu⁽¹⁴⁾는 축대칭 복사장에 대한 P-1 근사의 타당성에 대한 자료를 제시하였다. Razel과 Howell⁽¹⁵⁾은 단지 흡수와 방사만을 하는 매체에 대해 P-N 근사를 이용해 2차원으로 해석하였다. 여기에서 이들은 P-1 근사의 적용범위와 P-3 근사와의 차이 등에 대해 매우 유익한 자료를 제공하고 있다. 또한 Yuen과 Wong⁽¹⁶⁾에 의해 최근에 발표된 미결정 파라미터를 사용한 방법이 있다.

본 연구에서는 직사각형 밀폐공간내에서 자연대류와 복사의 상호 영향에 대해서 P-1 근사를 이용하여 수치적으로 해석하였다. 밀폐공간내에서의 온도분포, 속도분포 및 열전달계수를 구하였으며 열경계층내에서의 전도와 복사의 상호 영향에 대하여 고찰하였다. 표면 복사만이 존재하는 경우에 대해서도 고찰함으로써 P-1 근사의 적용한계를 규명하였다. 벽면을 산광 방사 및 반사체(diffuse emitter and reflector)로, 기체는 회색체(gray body)로 가정하였다. 이는 복사 물성치의 파장에 따른 변화를 고려할 때의 대단히 복잡한 계산 과정을 피할 수 있고, 현재의 이론적 수준에 비추어 복사 열전달의 영향을 정성적으로 규명하는데 타당한 가정이다.

2. 해 석

본 연구에서 고찰하고자 하는 모델은 Fig. 1과 같

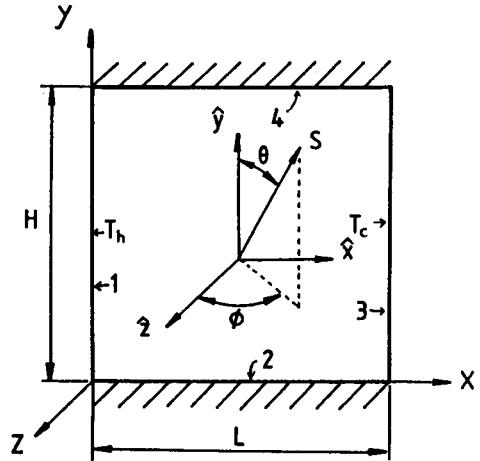


Fig. 1 Geometry and coordinate system

다. 계산영역내의 한점에서의 복사강도는 위치의 함수일 뿐 아니라 방향을 갖는 상태량이므로 이를 해석하기 위하여는 각 위치에서 방향을 표시하는 별도의 좌표계를 구성하여야 한다. Fig. 1에서 \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} 는 별도의 좌표계를 나타내며 s 는 복사강도의 진행방향이며 숫자는 각 벽면을 뜻한다. 등온으로 유지되는 벽면과, 바닥과 천정이 단열인 2차원 직 4각형 밀폐공간내에서 자연대류와 복사가 결합되어 있을 때 열전달 현상을 해석한다.

2.1 지배방정식

지배방정식은 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식, 그리고 복사에 의한 열전달을 나타내는 복사 전달방정식으로 구성된다.

Boussinesq 근사를 적용하면 직교좌표계에서 지배방정식은 다음과 같다.

연속방정식

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

운동량방정식

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho v \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g \beta (t - t_w) \quad (3)$$

에너지방정식

$$\rho c u \frac{\partial t}{\partial x} + \rho c v \frac{\partial t}{\partial y} = k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial q_{r,x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{r,y}}{\partial y} \right) \quad (4)$$

여기서 q_r 은 복사 열유속을 나타낸다.

위 지배방정식을 다음과 같은 무차원 변수를 이용하여 무차원화 하였다.

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad A = \frac{H}{L}, \quad U = \frac{u}{\nu/L},$$

$$V = \frac{v}{\nu/L}, \quad P = \frac{p^*}{\rho(\nu/L)^2}, \quad T = \frac{t}{\Delta t}.$$

위의 무차원 변수를 사용하여 식 (1)~(4)를 정리하면 다음과 같은 무차원 지배방정식이 유도된다.

연속방정식

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

운동량방정식

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (6)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}$$

$$+ \frac{Ra}{Pr} (T - T_\infty) \quad (7)$$

에너지방정식

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right)$$

$$- \frac{1}{Pr \tau_0 N} \left(\frac{\partial Q_{r,x}}{\partial X} + \frac{\partial Q_{r,y}}{\partial Y} \right) \quad (8)$$

복사 열유속에 대해서는 $n^2 \sigma t_m^3 \Delta t$ 로 무차원화 하였으며, 위 식에서 Pr 은 Prandtl 수 $\frac{\nu}{\alpha}$, Ra 는 Rayleigh 수 $\frac{g \beta L^3 \Delta t}{\alpha \nu}$, N 은 Stark 수 $\frac{k_a}{n^2 \sigma t_m^3}$ 를 나타내며 τ_0 는 광학두께이다.

2.2 복사 전달방정식

(1) 투명한 유체

밀폐공간내의 유체가 열복사에 대하여 투명한 경우 열복사는 표면복사이며 이때 대류는 벽면에서의 온도 경계조건을 통하여 복사와 연계된다.

국소 열적 평형상태에 있는 밀폐공간내에서의 복사 전달방정식은 임의의 온도분포를 갖는 회산광(gray diffuse)인 벽에 대해 다음과 같다.

$$q_{r,i}(S_i) = (\epsilon_i / \rho_i) \{ n^2 \sigma t_m^3 (S_i) - j_i(S_i) \} \quad (9)$$

각 벽에서의 radiosity j 는 해석 모델의 형상에 따라 결정되는 형상계수의 함수인 kernel, K , 를 이용하여 표현된다.

$$j_i(S_i) = n^2 \epsilon_i \sigma t_m^3 (S_i) + \rho_i \sum_{j=1}^4 j_j(S_j) K(S_i, S_j) dA_j \quad (10)$$

Radiosity j 는 열유속과 마찬가지로 $n^2 \sigma t_m^3 \Delta t$ 로 무차원화 하면 다음과 같이 표시된다.

$$J_i(S_i) = \epsilon_i \frac{T_i^4(S_i)}{T_m^3} + \rho_i \sum_{j=1}^4 J_j(S_j) K(S_i, S_j) dA_j \quad (11)$$

Fig. 1의 각벽에 대하여 상술하면 다음과 같다.

$$J_1(Y_1) = \frac{\epsilon_1 T_1^4(Y_1)}{T_m^3} + \frac{\rho_1}{2} \left\{ \int_0^1 \frac{J_2(X_2) Y_1 X_2}{[Y_1^2 + X_2^2]^{3/2}} dX_2 \right.$$

$$+ \int_0^A \frac{J_3(Y_3)}{[1 + (Y_3 - Y_1)^2]^{3/2}} dY_3$$

$$+ \left. \int_0^1 \frac{J_4(X_4) (A - Y_1) X_4}{[(A - Y_1)^2 + X_4^2]^{3/2}} dX_4 \right\} \quad (12)$$

$$J_2(X_2) = \frac{\epsilon_2 T_2^4(X_2)}{T_m^3} + \frac{\rho_2}{2} \left\{ \int_0^A \frac{J_1(Y_1) X_2 Y_1}{[X_2^2 + Y_1^2]^{3/2}} dY_1 \right.$$

$$+ \int_0^A \frac{J_3(Y_3) (1 - X_2) Y_3}{[Y_3^2 + (1 + X_2)^2]^{3/2}} dY_3$$

$$+ \left. \int_0^2 \frac{J_4(X_4) A^2}{[A^2 + (X_4 - X_2)^2]^{3/2}} dX_4 \right\} \quad (13)$$

$$J_3(Y_3) = \frac{\epsilon_3 T_3^4(Y_3)}{T_m^3} + \frac{\rho_3}{2} \left\{ \int_0^A \frac{J_1(Y_1)}{[1 + (Y_1 - Y_3)^2]^{3/2}} dY_1 \right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{J_2(X_2) Y_3 (1 - X_2)}{[Y_2^2 + (1 - X_2)^2]^{3/2}} dX_2$$

$$+ \left. \int_0^1 \frac{J_4(X_4) (A - Y_3) (1 - X_4)}{[(A - Y_3)^2 + (1 - X_4)^2]^{3/2}} dX_4 \right\} \quad (14)$$

$$J_4(X_4) = \frac{\epsilon_4 T_4^4(X_4)}{T_m^3} + \frac{\rho_4}{2} \left\{ \int_0^A \frac{J_1(Y_1) X_4 (A - Y_1)}{[X_4^2 + (A - Y_1)^2]^{3/2}} dY_1 \right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{J_2(X_2) A^2}{[A^2 + (X_2 - X_4)^2]^{3/2}} dX_2$$

$$+ \left. \int_0^A \frac{J_3(Y_3) (A - Y_3) (1 - X_4)}{[(A - Y_3)^2 + (1 - X_4)^2]^{3/2}} dY_3 \right\} \quad (15)$$

(2) 열복사를 흡수, 방사하는 유체

복사에 참여하는 회유체에 대한 복사 전달방정식은 다음과 같다.

$$\frac{di'}{ds} = -ai'(s) + ai_b - \sigma_i i'(s)$$

$$+ \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_{\omega_i=4\pi} i'(s, \omega_i) \phi(\omega, \omega_i) d\omega_i \quad (16)$$

i' 은 복사 강도이고, s 는 매체내에서 복사의 진행 방향이며, a 와 σ_i 는 각각 흡수와 산란을 나타내는 계수이다. 실제적인 열유속을 구하기 위해서는 식 (16)에 나타난 복사강도를 입체각 4π 에 대해 적분하여야 한다. 복사전달방정식은 식 (16)의 i_b 를 통하여 에너지방정식의 온도장과 연계된다.

위 식에서 유체에 의한 복사의 산란을 무시하고 P-1 근사를 적용하면 전달방정식은 다음과 같이 표시된다⁽¹⁷⁾.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

$$= 3a[g - 4\pi i_b] \quad (17)$$

여기서 g 는 투사복사이며, 다음 식으로 표시된다.

$$g = \int_{\omega=4\pi} i' d\omega = 4\pi i_0 \quad (18)$$

복사 열유속은 다음과 같이 표시된다.

$$\nabla \cdot \bar{q}_r = -\frac{1}{3a} \nabla^2 g \quad (19)$$

복사 열유속과 투사복사 g 를 $n^2 \sigma t_w^3 dt$ 으로 무차원화하면 다음과 같은 무차원 복사전달방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) - 3\tau_0 G + 12\tau_0 \frac{T_i}{T_w^3} = 0 \quad (20)$$

2.3 경계조건

(1) 속도에 대한 경계조건

벽면에서의 모든 속도성분은 점착(no slip) 조건을 만족한다. 즉 $u=0, v=0$ 이다.

(2) 온도에 대한 경계조건

등온벽

$$X=0 \text{에서 } T_i = T_w + 0.5 \quad (21)$$

$$X=1 \text{에서 } T_e = T_w - 0.5 \quad (22)$$

복사에 의한 열전달이 결합되어 있는 경우에는 단열벽면에서 열균형을 고려해서 다음과 같이 결정한다.

투명한 유체일 때는 바닥과 천정에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y=0 \text{에서 } \frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{1}{N^*} Q_{r,2}(S_2) = 0 \quad (23)$$

$$Y=A \text{에서 } \frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{1}{N^*} Q_{r,4}(S_4) = 0 \quad (24)$$

여기서 N^* 는 전도에 대한 복사의 상대적인 크기를 나타내는 무차원 변수이고, 복사에너지를 흡수하는 매질에서의 Stark 수 N 과는 달리 수정된 형태 $k/n^2 \sigma t_w^3 L$ 로 표현된다.

유체가 복사 열전달에 관여하는 경우에는 다음과 같다.

$Y=0$ 과 $Y=A$ 에서

$$\frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{1}{3\tau_0 N} \frac{\partial G}{\partial Y} = 0 \quad (25)$$

(3) 복사 전달방정식의 경계조건

벽면에서의 복사 열유속에 대한 에너지평형으로부터 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$Y=0 \text{에서 } -\frac{3}{2} \frac{2-\epsilon_w}{\epsilon_w} \frac{1}{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial Y} + G = 4 \frac{T_w^4}{T_w^3} \quad (26)$$

$$Y=A \text{에서 } \frac{3}{2} \frac{2-\epsilon_w}{\epsilon_w} \frac{1}{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial Y} + G = 4 \frac{T_w^4}{T_w^3} \quad (27)$$

$$X=0 \text{에서 } -\frac{3}{2} \frac{2-\epsilon_w}{\epsilon_w} \frac{1}{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial X} + G = 4 \frac{T_w^4}{T_w^3} \quad (28)$$

$$X=1 \text{에서 } \frac{3}{2} \frac{2-\epsilon_w}{\epsilon_w} \frac{1}{\tau_0} \frac{\partial G}{\partial X} + G = 4 \frac{T_w^4}{T_w^3} \quad (29)$$

2.4 수치해석

유한차분식을 유도하기 위한 검사체적은 Fig. 2에 나

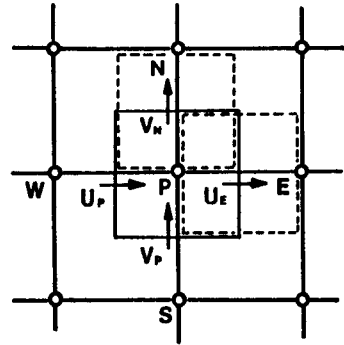


Fig. 2 Staggered grid system

타내었다. 단면내의 속도장에 대하여 엇물림격자(staggered grid)를 사용하였다. 검사체적 경계면에서의 유동변수는 대류 및 확산항의 상대적 크기를 동시에 고려한 power-law 방법을 택하였으며 압력을 결정하기 위하여 SIMPLE algorithm을 사용하였다⁽¹⁸⁾.

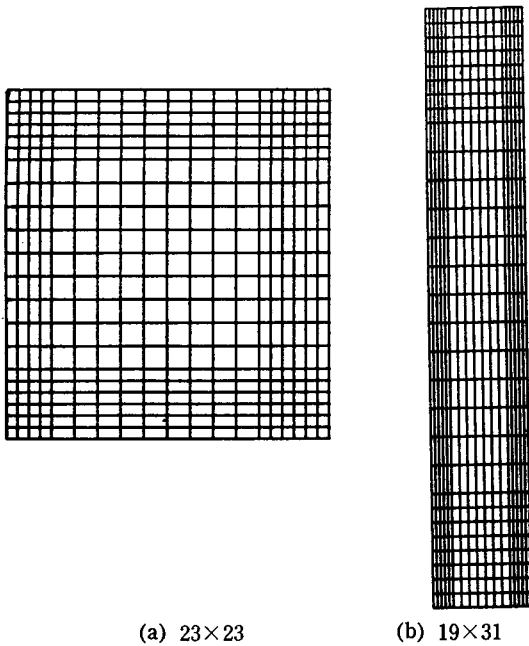
유체가 복사에 관여하지 않는 경우 kernel의 계산에 Simpson 적분법을 적용하였으며 유체가 복사에 관여하는 경우의 복사량 계산은 앞에서 서술한 것처럼 P-1 근사를 사용해서 유도한 복사전달방정식을 유한차분법을 이용하여 계산하였다.

경계조건에 대해서는 Fig. 1의 원점에 이웃한 두면(벽 1, 2)에 대해서는 전진차분법(forward differencing), 다른 두면에 대해서는 후진차분법(backward differencing)을 사용해서 유한차분식을 정리하였다.

3. 계 산

본 해석에 사용한 격자계는 Fig. 3과 같다. 종횡비가 1인 경우와 6인 경우에 대하여 계산을 수행하였으며, 종횡비 1일 때는 23×23 , 종횡비 6에서는 19×31 의 격자점을 사용하였다. 전도에 대한 복사의 영향을 나타내는 무차원수인 Stark 수 N 을 정의함에 있어서 대개의 경우에는 $ka/n^2 \sigma t_w^3$ 을 사용하지만, 매체가 복사에 무관한 경우에도 적용할 수 있도록 또한 하나의 무차원수 $N^* = k/n^2 \sigma t_w^3 L$ 를 정의하였다. 전자의 무차원수에 대해서는 유체가 복사에 참여하는 경우의 복사 영향 해석, 특히 기존의 연구결과와의 비교를 위해 사용하였으며, 유체가 복사에 무관한 경우와 복사에 관여하는 유체인 경우라 하더라도 이와 비교할 때에는 후자의 수정된 무차원수를 이용하여 해석하였다.

복사의 영향을 해석하기 위한 또한 하나의 변수인 밀폐공간내의 매질에 따른 광학두께의 영향을 고려하였다.



(a) 23×23 (b) 19×31

Fig. 3 Grid system

매질의 광학적 특성인 광학두께의 변화에 따른 영향을 해석하는 경우에 Stark 수 N 은 이 변화량을 포함하지만, 수정된 Stark 수 N^* 는 이러한 광학두께의 영향을 배제하는 특징을 가지고 있다.

다음과 같은 순서에 의해 계산을 수행하였다.

- (1) 주어진 경계조건에 맞는 유동장을 계산한다.
- (2) 계산된 유동장을 이용하여 온도장을 구한다.
- (3) 위에서 구한 온도장을 이용하여 복사 전달방정식을 계산한다.
- (4) 부력의 영향을 받는 새로운 유동장을 계산한다.
- (5) 계산된 복사량에 맞는 온도장을 해석한다.
- (6) 위의 과정을 되풀이하여 유동장과 온도장, 그리고 복사장이 모두 수렴할 때까지 계산한다.

계산 결과의 타당성을 검증하기 위하여 직 4 각형내에서 순수한 자연대류만을 고려한 경우를 해석하고, 그 결과를 de Vahl Davis⁽¹²⁾의 해와 비교하였으며, 흡수, 방사하는 매체의 경우에 2차원 복사현상에 대해서 Ratzel 과 Howell⁽¹⁵⁾의 결과와 비교하여 타당성을 검증하였다. 벽면 경계를 떠나는 복사량과 매체가 흡수하는 복사량을 다음식으로 비교하여 수렴 기준으로 삼았다.

$$\iint 4\pi a \left(i_b - \frac{G}{4\pi} \right) dx dy = \int \bar{Q}_s \cdot \pi ds \quad (30)$$

매체가 복사에 무관한 경우는 벽의 열균형을 검토하

였다. 또한 자연대류와 복사가 결합된 경우에는 전체 열균형을 고려하여 계산결과의 정당성을 부여하였다. 자연대류와 복사가 결합된 문제에 대해서는 Lauriat⁽⁹⁾의 결과와 잘 일치하였다.

4. 결과 및 토의

직 4 각형 밀폐공간내에 Prandtl 수가 0.7인 유체로 채워져 있을 때 자연대류와 복사의 상호영향에 대하여 종횡비 6, Rayleigh 수 10^6 , 무차원 평균온도 T_m 이 10 일 때의 결과를 주로 고찰하였다. 이는 등온벽면의 영향이 종횡비 1인 경우보다 크고, Rayleigh 수 10^6 일 때 밀폐공간내에서의 자연대류의 대류영역을 가장 잘 표현하므로 상호영향을 해석하는 데 있어 대표적인 경우로 선택하였다. 또한 본 해석에서는 이들 무차원 수의 영향도 알아보기 위해 종횡비 1, 그리고 대류의 상대적인 영향이 증가된 Rayleigh 수 10^6 인 경우도 해석하였다.

4.1 속도분포

자연대류만을 고려한 경우의 속도분포와 비교하여, Fig. 4 와 Fig. 5 에 나타낸 바와 같이 Stark 수가 감소하거나 광학두께가 증가함에 따라 운동량경계층의 두께와 유동속도가 증가하는 것을 알 수 있다. 이는 복사의 자연대류에 대한 상대적인 영향이 증가하는 경우인데 대류에 의한 열전달을 촉진시키는 경향을 나타낸다. 유동장의 형태가 자연대류만을 고려한 경우 좌우 대칭인 것과는 달리 복사의 영향이 커질수록 저온벽면 가까이에서의 유동속도가 더욱 커짐으로써 대칭이 깨짐을 보여준다. 이는 복사에 의한 열전달이 지배적인 영역에서 나타난다.

Fig. 5 는 Stark 수에 의한 영향을 보여준다. Stark 수가 5 이상의 값을 갖게 되면 자연대류만의 결과와 큰 차이를 나타내지 않는다. 속도분포, 유동속도, 그리고 대칭성등에서 복사의 영향이 무시될 수 있다.

Fig. 6 과 Fig. 7 에서는 난류로의 천이점근치인 Rayleigh 수 10^6 일 때 유동장에 미치는 복사의 영향을 나타내었다. 이 때도 복사의 영향이 증가할수록 경계층은 두꺼워지며, 보다 작은 Rayleigh 수를 갖는 순수한 자연대류의 유동형태를 보인다. 복사영향의 증가는 밀폐공간내 유동의 난류로의 천이를 지연시키는 효과를 갖는다.

고온과 저온벽면의 복사영향을 Fig. 8 에 나타내었다. 고온벽과 저온벽은 벽의 방사율을 변화시켜 복사

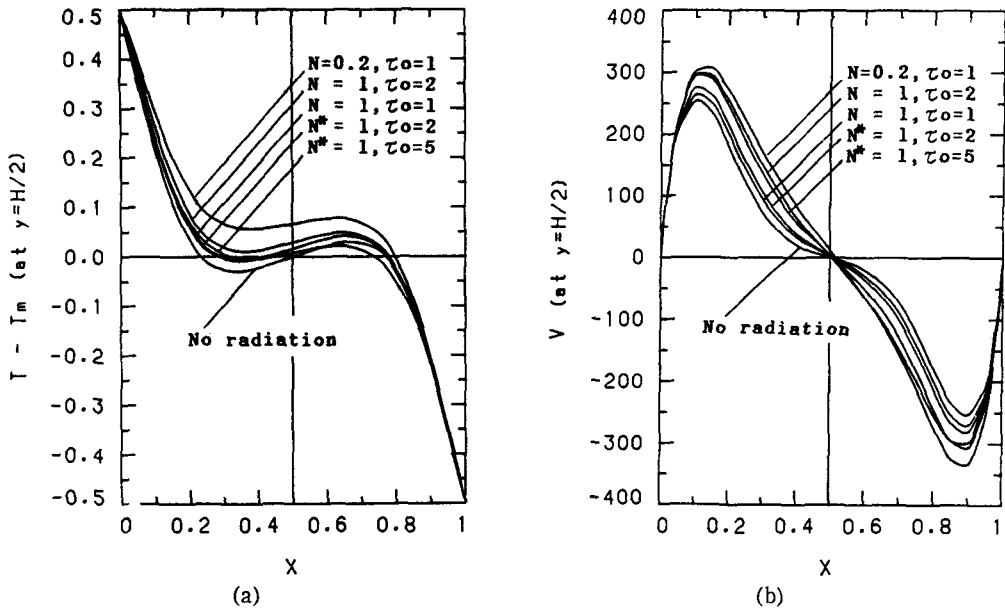


Fig. 4 Temperature and vertical velocity profile on the horizontal mid-plane, (a) temperature profile, (b) velocity profile ($Ra=10^5$, $T_m=10$)

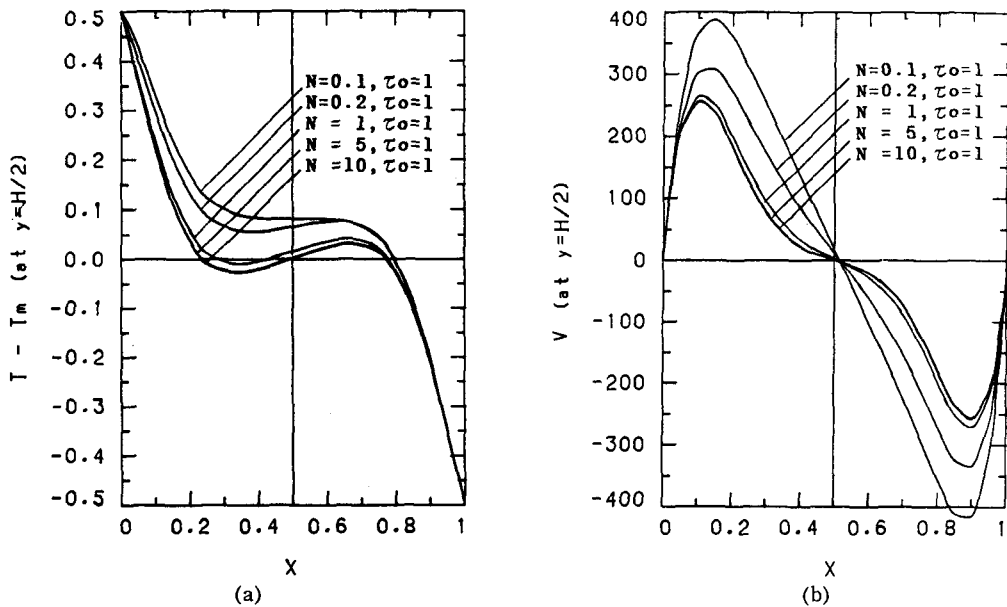


Fig. 5 Effect of the stark number on the temperature and vertical velocity on the horizontal mid-plane, (a) temperature profile, (b) velocity profile ($Ra=10^5$, $T_m=10$)

열전달의 영향을 고찰하였다. 먼저 $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$ 일 때는 고온과 저온 벽에서는 복사에너지가 전부 반사되는데, 이 때의 유동형태는 순수한 자연대류만이 있을 때와

같다. 저온벽의 복사영향을 배제하기 위해 $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_3 = 0$ 인 경우를 계산하였다. 이 때는 온도분포가 전체적으로 위로 상승하고 이 때문에 저온 벽면 가까이에서의

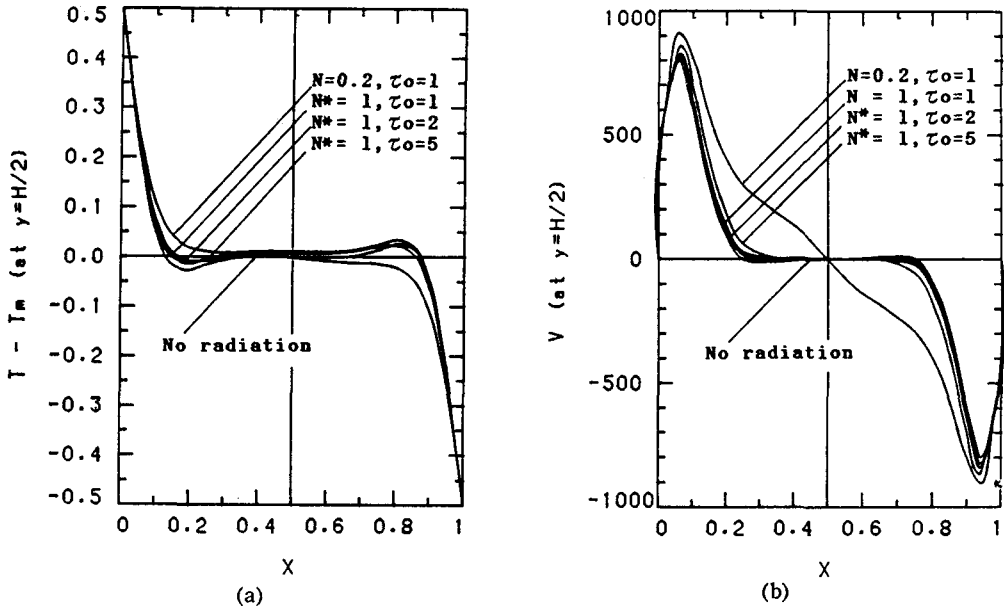


Fig. 6 Temperature and vertical velocity profile on the horizontal mid-plane, (a) temperature profile, (b) velocity profile ($Ra=10^6$, $T_* = 10$)

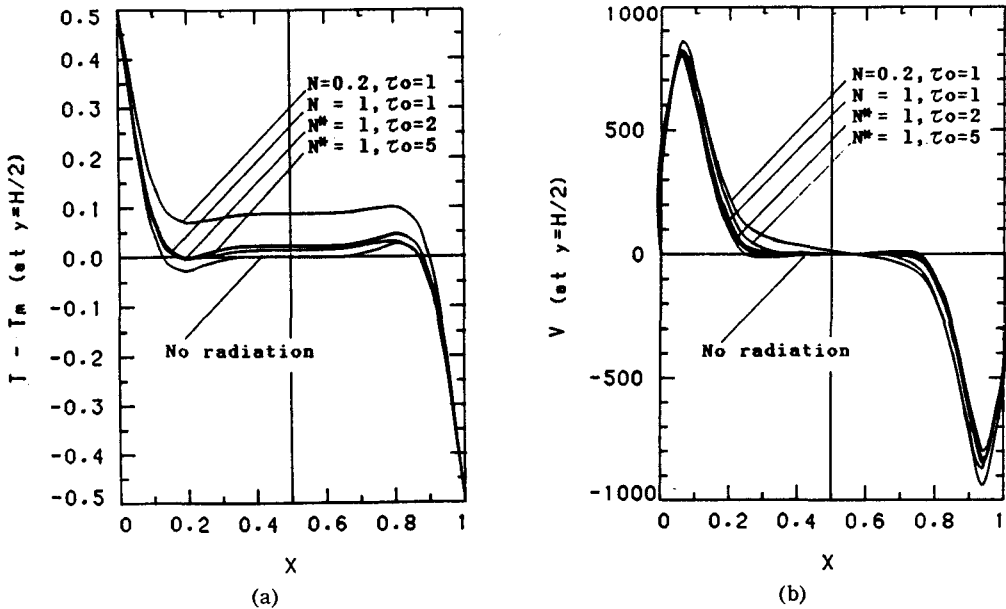


Fig. 7 Temperature and vertical velocity profile on the horizontal mid-plane, (a) temperature profile, (b) velocity profile ($Ra=10^6$, $T_* = 5$)

유동속도가 증가한다. 반대로 $\epsilon_1=0$, $\epsilon_3=1$ 일 때에는 저온벽면에 비해 고온벽면에서 유동속도가 증가한다. Table 1에 나타난 바와 같이 위의 두 경우에서 전체

적인 열전달량은 크게 차이가 나지 않는데, 이것은 복사량의 감소를 대류 열전달의 증가가 보완해 주고 있음을 의미한다.

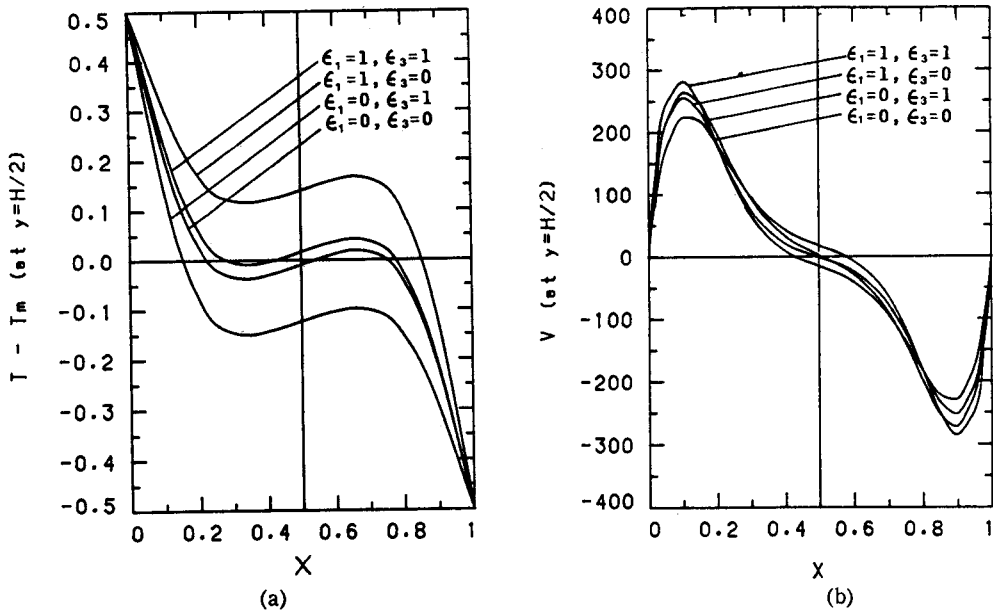


Fig. 8 Effect of the isothermal wall emissivities on the temperature and vertical velocity on the horizontal mid-plane, (a) temperature profile, (b) velocity profile ($Ra=10^5$, $T_m=10$)

Table 1 Effect of wall emissivity on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with medium and surface radiation ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_m=10$, $N=1$, $\tau_0=1$, $A=6$, $\epsilon_2, \epsilon_4=1$)

	$\epsilon_1, \epsilon_3=1$	$\epsilon_1, \epsilon_3=0$	$\epsilon_1=0, \epsilon_3=1$	$\epsilon_1=1, \epsilon_3=0$
Nu_m	5.95	3.69	4.53	4.68

4.2 온도분포

Fig. 4에는 종횡비 6, Rayleigh 수 10^5 일때 $y=H/2$ 에서 x 축에 따른 온도분포를 나타내었다. 복사의 영향이 증가함에 따라 온도 경계층의 두께는 고온벽면 가까이에서 두꺼워지고, 밀폐공간의 중앙에서의 온도 구배는 감소한다. 온도분포는 균일해지며, 전체적으로 상승한다. 이것은 자연대류만의 온도분포와는 크게 다른 온도분포이며, 특히 밀폐공간의 중앙에서 가장 큰 차이를 나타낸다. 복사의 영향이 커지면 이러한 온도 분포가 유동속도와 경계층의 두께를 증가시키고, 또한 저온벽면 가까이에서의 유동속도는 고온벽에서의 속도 보다 더욱 큰 값을 갖게 된다.

Fig. 5에는 전도에 대한 복사의 상대적인 크기를 나타내는 무차원 변수인 Stark 수가 온도분포에 미치는 영향을 나타내었다. 유동장에 대한 해석에서도 언급이

되었지만, Stark 수가 5 이상이 되면 온도분포 또한 자연대류만의 결과와 일치한다.

온도분포에 미치는 복사의 영향은 Rayleigh 수를 10^6 으로 증가하였을 때, 자연대류의 상대적인 영향이 증가하였기 때문에 작아지게 되나 경향은 일치한다. 이것을 Fig. 6에 나타내었으며, 이러한 복사의 영향은 전체적으로 온도분포를 균일하게 하므로 유동형태의 특성과 함께 난류로의 천이를 억제한다.

무차원 평균온도가 5 일 때의 온도분포를 Fig. 7에 도시하였다. 같은 Rayleigh 수에 대해 평균온도가 감소한 것은 복사의 상대적인 크기가 그만큼 약화된 것을 의미한다. 같은 광학두께와 Stark 수에 대해서는 무차원 평균온도 10 일 때에 비해 유체는 보다 큰 열전도율을 갖게 되므로 좀 더 높은 온도분포를 나타낸다.

Fig. 8은 매체와 벽면이 모두 복사에 관여할 때 고온과 저온벽의 복사영향을 해석하기 위해 두 등온벽면의 방사율을 변화시켜 얻은 결과이다. 저온벽면이 입사하는 모든 복사에너지를 반사하는 경우 즉 $\epsilon_1=1, \epsilon_3=0$ 일 때는 두 등온벽면이 모두 흡체거나 모두 반사하는 경우에 비해 고온벽면 가까이에서의 온도경계층의 두께가 보다 많이 증가하고, 저온벽면 가까이에서는 온도구배가 커지게 된다. 유동속도의 증가와 함께 온도구배의 증가에 의한 열전달의 증가는 복사 열전달

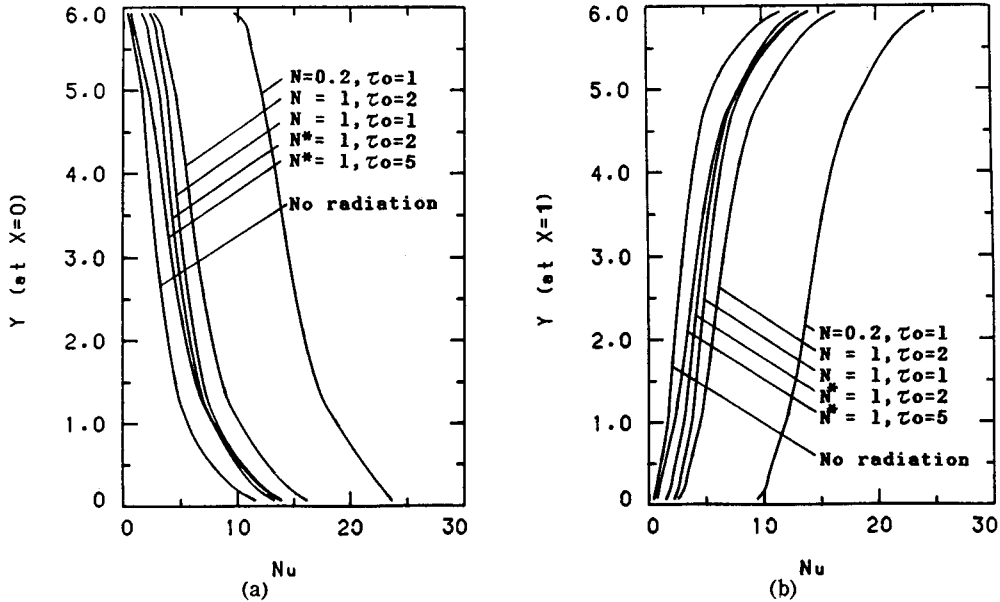


Fig. 9 Local Nusselt number distribution, (a) hot plate, (b) cold plate ($Ra=10^5$, $T_w=10$)

량의 감소를 보완한다. 한편 고온벽면이 복사 열전달에서 제외되는 경우, 즉 $\epsilon_1=0$, $\epsilon_3=1$ 일 때는 반대의 온도분포를 가지게 되며 고온벽면에서의 복사 열전달량의 감소를 대류와 전도의 증가된 양이 보충한다. 따라서 위의 두 경우는 전체 열전달량에 있어서 큰 차이를 보이지 않으며 온도분포, 유동형태 그리고 열전달 특성 등을 볼 때 고온과 저온벽면에 의한 영향은 밀폐공간내에서 대등하다는 것을 알 수 있다. 중평비 1인 경우에는 등온벽면에 대해 보다 커진 단열벽면의 영향을 나타내지만 대체로 같은 경향을 나타낸다.

4.3 열전달 특성

복사와 자연대류가 결합되어 있는 경우 전도 및 복사를 포함한 Nusselt 수를 다음과 같이 정의하였다.

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial X} - \frac{1}{3\tau_0 N} \frac{\partial G}{\partial X} \tag{31}$$

수정된 Stark 수에 대해서는 다음과 같다.

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial X} - \frac{1}{3N^*} \frac{\partial G}{\partial X} \tag{32}$$

또한 평균 Nusselt 수는 아래와 같이 구하였다.

$$Nu_m = \frac{\int_0^H Nu dy}{H} \tag{33}$$

(1) 국소 Nusselt 수

Fig. 9에는 복사의 영향이 증가할 때 고온벽면과 저온벽면에서의 국소 Nusselt 수를 나타내었다. 국소 Nusselt 수는 벽면을 따라 순수한 자연대류일 때와 같

은 모양을 나타내며, 복사의 영향이 커지면 큰 값을 나타낸다. 같은 광학두께를 갖는 밀폐공간내의 매질에 대해 Stark 수 N 과 같은 값의 수정된 Stark 수 N^* 는 복사에너지의 절대량이 감소된 경우이므로 전체 열전달량이 Stark 수 N 을 사용한 경우보다 적게 나타난다. 수정된 Stark 수에 대해서는 광학두께가 증가하면 온도분포와 유동장은 크게 변하지는 않으나, 복사강도가 밀폐공간에 대해 균일하게 분포되기 때문에 복사에 의한 열전달량이 감소하므로 전체 열전달량이 줄어들게 된다. 저온벽면에서의 국소 Nusselt 수는 고온벽면에서의 경향과 일치하고 대칭인 형태를 갖는다.

Fig. 10에는 일정한 광학두께를 갖는 밀폐공간내의 매질에 대해 Stark 수를 변화시키면서 두 등온벽면에서의 열전달 특성을 나타내었다. 벽면을 따르는 국소 Nusselt 수는 Stark 수가 감소하면 커지는데, 이때 높이를 따라 변하는 분포형태는 크게 변하지 않는다. 또한 5 이상의 Stark 수에서는 복사에 의한 영향이 크게 줄어들어 Stark 수가 10에 이르면 자연대류만의 열전달과 차이가 없게 된다.

Fig. 11에서는 무차원 평균온도를 반으로 줄였을 때의 결과를 표시하였다. 복사의 영향에 의해 나타나는 열전달 특성은 일치된 경향을 갖는다.

Fig. 12에는 Rayleigh 수 10^5 일 때 표면복사에 대한 열전달특성을 나타내었다. 유체와 벽면이 모두 복사에 관여할 때와는 달리 고온과 저온벽면에서 대칭성이 사라지고 있는데 이것은 복사의 영향이 커질수록 더욱

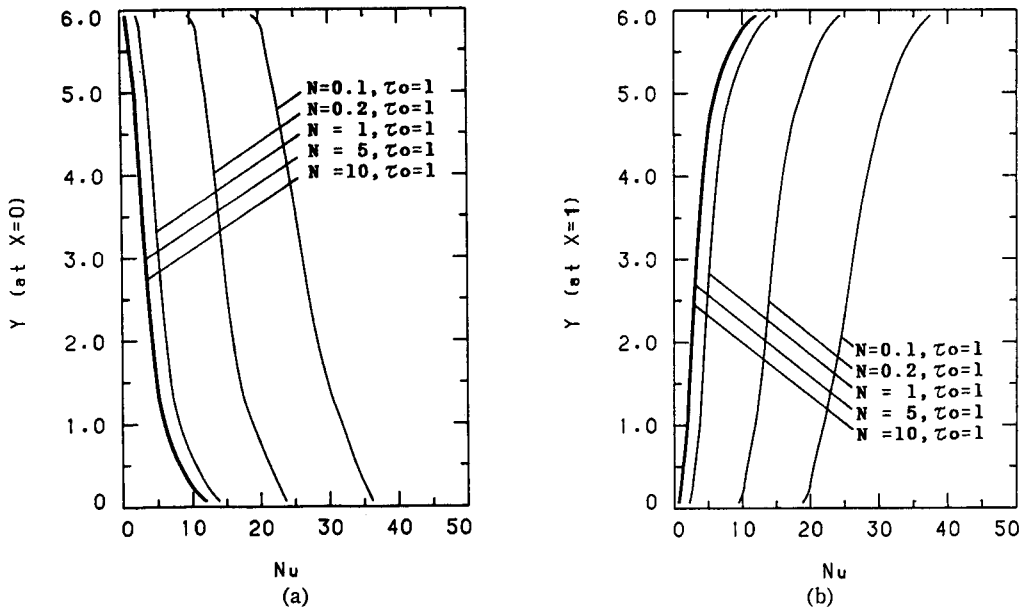


Fig. 10 Effect of the stark number on the local Nusselt number distribution, (a) hot plate, (b) cold plate ($Ra=10^5$, $T_* = 10$)

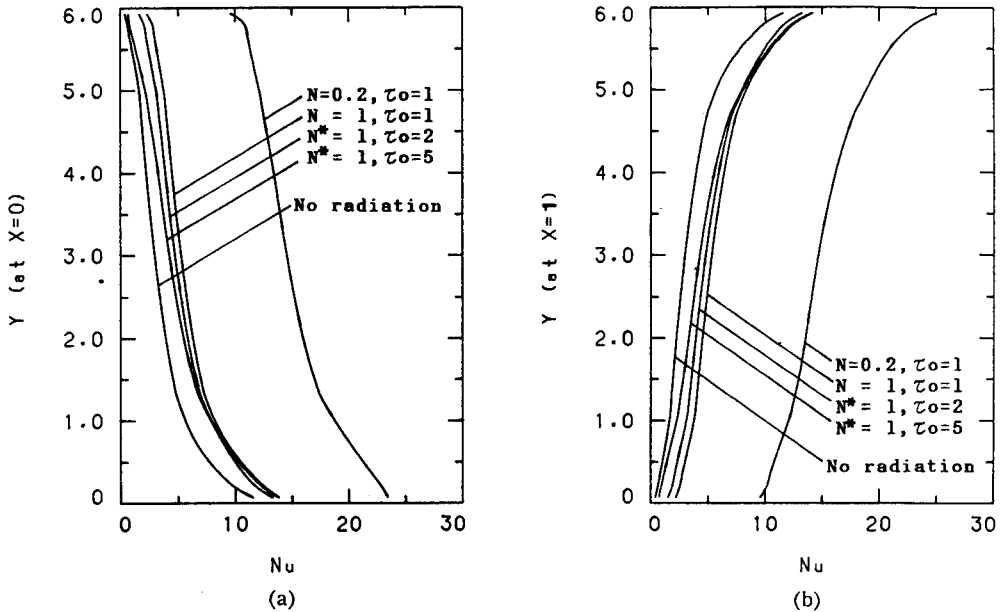


Fig. 11 Local Nusselt number distribution, (a) hot plate, (b) cold plate ($Ra=10^5$, $T_* = 5$)

뚜렷하다. 등온벽의 양 끝점, 즉 바다와 천정의 단열 벽과 인접한 곳을 제외하면 두 등온벽의 열전달 특성은 대칭형태를 유지하고 있다. 유체가 투명하고 벽면만이 복사에 관여하는 경우에는 모서리부분에서 자연대류에 비해 복사의 영향이 상당히 크게 나타나고 이

때문에 대칭성이 사라진다.

Fig. 13은 매질과 벽면이 모두 복사에 관여할 경우에 대한 것인데 $\epsilon_1=1, \epsilon_3=0$ 인 경우와 $\epsilon_1=0, \epsilon_3=1$ 인 경우의 국소 Nusselt 수 분포가 일치하고 있다. 유동장과 온도장에서 볼 수 있는 것처럼 전도, 대류 그리고

복사 열전달에 대한 두 등온벽의 영향은 동등하고 대칭이다.

(2) Stark 수의 영향

중형비 6, Rayleigh 수 10^6 인 경우에 대해 Stark 수를 0.1에서 10까지 변화시키면서 계산한 결과를 Table 2에 나타내었다. Stark 수가 작을수록, 즉 복사의 상

대적인 영향이 커질수록 벽면에서의 평균 Nusselt 수가 비선형적으로 증가함을 알 수 있다. 이러한 비선형성이 계산의 수렴을 매우 느리게 하는 요인이 된다. 또한 순수한 자연대류의 경우와 비교하여 보면 Stark 수가 10 보다 큰 영역에서는 복사의 영향을 고려하지 않아도 큰 오차를 갖지 않음을 볼 수 있다. 이는 유동장

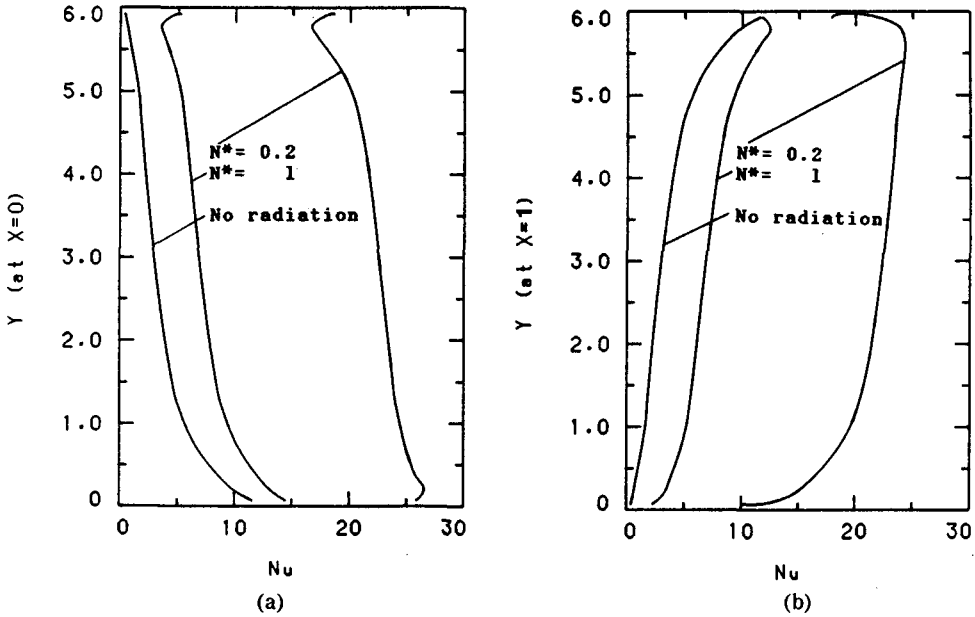


Fig. 12 Local Nusselt number distribution, (a) hot plate, (b) cold plate ($Ra=10^6$, $T_n=10$)

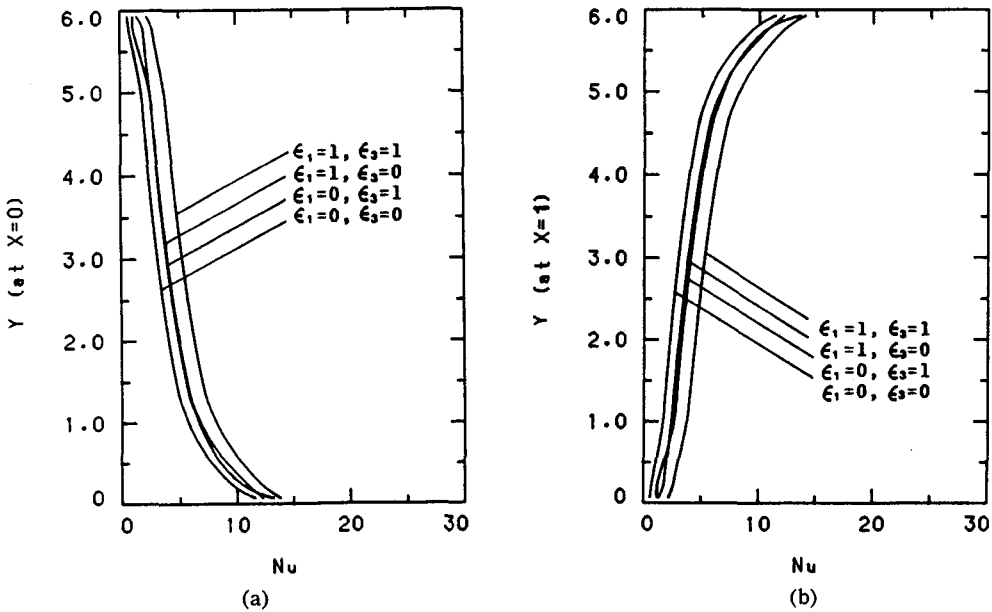


Fig. 13 Effect of the isothermal wall emissivities on the local Nusselt number distribution, (a) hot plate, (b) cold plate ($Ra=10^6$, $T_n=10$)

Table 2 Effect of N on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with medium and surface radiation ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_w=10$, $\tau_0=1$, $A=6$)

N	N.C.*	0.1	0.2	1.0	5.0	10.0
Nu_m	3.63	26.69	15.20	5.95	4.09	3.86

*N.C. : Natural convection

Table 3 Effect of N^* on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with surface radiation ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_w=10$, $A=6$)

N	N.C.	0.02	0.2	1.0
Nu_m	3.63	186.0	21.84	7.24

Table 4 Effect of N on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with medium and surface radiation ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_w=10$, $\tau_0=1$, $A=1$)

N	N.C.	0.2	1.0
Nu_m	4.68	15.75	6.84

Table 5 Effect of N^* on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with surface radiation ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_w=10$, $A=1$)

N^*	N.C.	0.02	0.2	1.0
Nu_m	4.68	140.4	17.75	7.03

과 온도장 그리고 국소 Nusselt 수의 해석을 통해서도 고려되었다.

유체가 복사에 대해 투명한 경우에도 Stark 수의 영향은 같은 경향을 나타내며, 밀폐공간내의 매질의 광학두께가 1인 경우에는 Stark 수와 수정된 Stark 수가 같게 되므로 벽면만이 복사에 참여할 때와 평균 Nusselt 수의 비교는 의미를 갖는다. 벽면만이 복사에 참여할 때의 열전달량은 같은 Stark 수에 대해 광학두께가 1인 유체보다 큰 값을 갖는다(Table 3).

중형비 1인 경우의 결과가 Table 4와 Table 5에 주어졌다. Stark 수의 영향은 중형비 6인 경우와 같으나, 투명한 유체일 때는 중형비 6일 때보다 적은 값을 나타내는데 비해서, 유체가 복사에 참여하는 경우에는 오히려 열전달량이 증가한다.

(3) 광학두께의 영향

광학두께의 영향을 알아보기 위하여 $N=1$, $N=1^*$ 일 때 0.1에서 10까지의 광학두께에 대하여 계산하였다. 먼저 $N=1$ 인 경우 Lauriat⁽⁹⁾의 결과와 비교하여 Table 6에 나타내었다. 이 경우 본 해석에서는 무차원 평균온도 10과 5인 경우에 대해 계산하였으나, Lauriat⁽⁹⁾은 무차원 평균온도에 대해 언급을 하지 않고 있어 구체적인 수치비교를 할 수는 없으나, Fig. 4의 온도장과 유동장 그리고 Table 6에서의 평균 Nusselt 수 등, 여러 경우에 대하여 경향이 일치함을 알 수 있다.

4.4 P-1 근사의 적용 한계

Ratzel과 Howell⁽¹⁵⁾은 복사 열전달만을 고려한 경우 광학두께가 1보다 작을 때 P-1 근사로는 정확한 결과를 얻을 수 없다는 결론을 내렸으며 Lauriat⁽⁹⁾은 자연대류와 결합된 경우 광학두께가 1인 유체에 대한 P-1 근사의 적용 타당성을 검증하였다. 본 연구에서는 자연대류와 결합된 경우 P-1 근사의 적용 범위를 더욱 확장하였다. 수정된 Stark 수를 사용하여 광학두께를 감소시키면서 최종적으로 투명한 유체의 경우와 비교한 결과를 Table 7에 나타내었다. Table 7에 나타난 바와 같이 광학두께가 0.1이 되면 투명한 유체인 경우보다 평균 Nusselt 수가 크게 되어 P-1 근사의 적용이 불가하나 이 때의 값 차이가 작고 0.1 이상에서는 동일한 경향을 나타내므로 광학두께가 1보다 작은 영역에서도 잘 근사됨을 알 수 있다.

Table 6 Effect of τ_0 on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with medium and surface radiation ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_w=10$, $N=1$, $A=6$)

τ_0	0.0	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Present study		3.99	5.04	5.95	7.27	7.97	8.56	8.96
G. Lauriat ⁽⁹⁾	3.59			5.94	6.97	7.55	8.15	8.69

Table 7 Effect of τ_0 on the mean Nusselt number at isothermal wall of the cavity with medium and surface radiation, using modified Stark number ($Pr=0.70$, $Ra=10^5$, $T_w=10$, $N^*=1$, $A=6$)

τ_0	S.R.*	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0	8.0	10.0
Nu_m	7.24	7.27	6.50	5.95	5.46	4.90	4.67	4.56

*S.R. : Surface radiation

5. 결 론

사각형 밀폐공간내에서 자연대류와 복사가 결합된 경우에 대하여 P-1 근사를 적용하여 유한차분법으로 수치해석하고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Stark 수가 감소하거나 광학두께가 증가함에 따라 운동량경계층의 두께와 유동속도가 증가하는데 이는 대류에 의한 열전달을 촉진시킨다.

(2) 복사의 영향이 증가할수록 보다 작은 Rayleigh 수를 갖는 순수한 자연대류의 형태를 보이며 이는 밀폐공간내의 유동이 난류로 천이되는 것을 지연시키는 효과를 갖는다.

(3) 광학두께가 1 인 경우 Stark 수가 10 이상에서는 복사의 영향을 무시할 수 있다.

(4) 광학두께가 1 보다 작은 범위에서도 P-1 근사로서 대체적인 경향을 예측할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) G. de Vahl Davis, "Natural Convection of Air in A Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 249~264, 1983.
- (2) G. de Vahl Davis, "Natural Convection in A Square Cavity: A Comparison Exercise", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 227~248, 1983.
- (3) N.C. Markatos and K.A. Pericleos, "Laminar and Turbulent Natural Convection in An Enclosed Cavity", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, No. 5, pp. 755~772, 1984.
- (4) S. Acharya and R.J. Goldstein, "Natural Convection in An Externally Heated Vertical or Inclined Square Box Containing Internal Energy Source", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 855~866, 1985.
- (5) D.M. Kim and R. Viskanta, "Effect of Wall Heat Convection on Natural Convection Heat Transfer in A Square Enclosure", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 139~146, 1985.
- (6) J.C. Bratis and J.L. Novotny, "Radiation-Convection Interaction in the Boundary Layer Regime of An Enclosure", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 23~36, 1974.
- (7) D.W. Larson and R. Viskanta, "Transient Combined Laminar Free Convection and Radiation in A Rectangular Enclosure", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 78, pp. 65~85, 1976.
- (8) A.T. Modak and M.K. Mathews, "Radiation Augmented Fires Within Enclosure", *Technical Report*, 22361-B, RC 77-BT-2, Factory Mutual Research, 1977.
- (9) G. Lauriat, "Combined Radiation-Convection in Gray Fluids Enclosed in Vertical Cavities", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 609~615, 1982.
- (10) L.C. Chang, K.T. Yang and J.R. Lloyd, "Radiation Natural Convection Interaction in Two-Dimensional Complex Enclosure", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 89~95, 1983.
- (11) S.C. Traugott, "Radiative Heat Flux Potential for A Nongray Gas", *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 541~542, 1966.
- (12) R.G. Deissler, "Diffusion Approximation for Thermal Radiation in Gases with Jump Boundary Condition", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 86C, pp. 240~246, 1964.
- (13) Y.S. Chou and C.L. Tien, "A Modified Moment Method for Radiative Transfer in Non-Planar Systems", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, Vol. 8, pp. 919~933, 1968.
- (14) J. Higenyi and Y. Bayazitoglu, "Differential Approximation of Radiative Heat Transfer in A Gray Medium: Axially Symmetric Radiation Field", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 719~723, 1980.
- (15) A.C. Ratzel and J.R. Howell, "Two-Dimensional Radiation in Absorbing-Emitting Media Using The P-N Approximation", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 333~340, 1983.
- (16) W.W. Yuen and L.W. Wong, "Radiative Heat Transfer in A Rectangular Enclosure with Gray Medium", *ASME-AICHE Heat Transfer Conference*, Orlando, July 1980, ASME Paper No. 80-HT-101.
- (17) 김기훈, "복사와 자연대류가 결합된 직사각형 밀폐공간내에서의 열전달 해석", 석사학위논문, 서울대학교 대학원, 1987.
- (18) S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.