

< 論 文 >

# 다공질 금속의 비탄성거동을 위한 특수 구성방정식의 형성 (I)

—탄성·완전소성재료—

金 琪 泰\*

(1987년 8월 11일 접수)

## Formulation of Special Constitutive Equations for Inelastic Responses of Porous Metals (I)

—Elastic, Perfectly Plastic Material—

K.T. Kim

**Key Words:** Porous Metal(다공질 금속), Triaxial Compression(삼축압축), Yield Function (항복함수), Porosity(기공성)

### Abstract

Employing a special yield function for porous metals, a set of special constitutive equations is formulated to predict elastic-plastic responses of porous metals under triaxial compression. The proposed constitutive equations are compared with experimental data for porous tungsten under hydrostatic compression and uniaxial strain compression.

### 1. 서 론

탄성-소성변형 하에서의 다공질 고체의 거동을 해석하기 위한 역학적인 구성이론을 개발하기 위하여 공학의 여러 분야에서 많은 노력을 기울여 왔다. 이러한 경향은 분말야금학, 지질공학, 충격 파동 물리학, 및 요업공학 등의 연구 분야에서 더욱 뚜렷히 나타나고 있다.

다공질 고체의 체적변형에 관한 해석을 위하여, 단순한 현상학적인 측면으로부터 微小力學的인 측면으로까지의 여러가지 방법을 사용하였다. 정수압 압축에

의한 氣孔의 붕괴에는 Torre<sup>(1)</sup>, Mackenzie<sup>(2)</sup>, Carroll과 Holt<sup>(3,4)</sup>, Carroll과 Kim<sup>(5)</sup> 및 Kim과 Carroll<sup>(6)</sup> 등이 사용한 미소역학적인 中空球形 모델이 현재까지는 가장 유력하고 쉬운 방법으로 널리 쓰이고 있다.

일반적인 3차원 하중조건 하에서의 다공질 고체의 거동은 매우 복잡하며, 이는 체적성분과 편작성분들이 서로 강하게 결합된 영향 때문이기도 하다. Johnson과 Green<sup>(7)</sup>은 다공질 고체에서의 전단응력에 의한 압축향상(shear enhanced compaction) 현상을, 실험을 통하여 발견하였다. 이것은 순수응력 하의 체적의 압축에 비교해서, 전단응력이 같이 존재함으로써 인하여 체적압축을 더욱 향상 시킨다는 것을 의미한다. Curran과 Carroll<sup>(8)</sup>은 이같은 전단응력의 영향을 조사하기 위해 유한 요소법을 중공구형 모델에 적용하였다. 그 결

\* 정희원, 포항공과대학 기계공학과

파는 다공질 금속과 다공질 암석 등의 실험치와 잘 일치하였다.

다공질 고체에 관한 구성이론의 개발을 위한 또 다른 하나의 접근 방법으로는 현상학적이며, 거시안적으로 다공질 고체를 균질하나 氣孔性을 갖는 연속체로 취급하여 이에 적합하게 수정한 탄성-소성 이론을 적용하는 것이다. 기공성의 영향은 탄성영역에서는 상당 탄성계수에서 나타내어 지며, 소성영역에서는 복수 소성함복의 조건식으로부터 나타내어 진다. 이러한 다공질 고체를 위한 여러 형태의 소성함복의 조건식이 미소역학적 또는 현상학적인 방법으로 제안되었다. Green<sup>(9)</sup>, Gurson<sup>(10)</sup> 그리고 de Boer 와 Kowalski<sup>(11)</sup> 등은 강성-완전소성재료로 구성된 증공구의 근사해로부터 다공질 고체의 소성함복의 조건식을 구하였다. Kuhn 과 Downey<sup>(12)</sup> 및 Shima 와 Oyane<sup>(13)</sup>는 경험적인 함복 조건식을 제안하였다. 비록 여러 형태의 다공질 고체를 위한 소성함복의 조건식이 제안되었지만, 3축 하중의 조건 하의 실제 다공질 고체의 거동을 체계적으로 조사한 연구보고서는 아직 없었다.

본 논문에서는 3축 하중 하의 다공질 금속의 탄성 및 소성변형을 위한 복수구성방정식을 형성하였다. 탄성변형을 위해서는 다공질 금속의 기공성의 영향을 고려한 상당탄성계수를 일반화된 Hooke 법칙에 적용하였다. 탄성-소성변형을 위해서는 간단한 형태이며, 또한 실제의 재료에 잘 맞는 다공질 금속을 위한 복수소성함복의 조건식을 제안하여 사용함과 더불어, 소성유동은 Naghdi 와 그의 공동연구자들<sup>(14-20)</sup>에 의해 개발된 변형을 공간에서의 소성유동의 구성이론을 적용하였다.

이 논문에서 제안한 소성함복의 조건식은 Green<sup>(9)</sup>이나 Gurson<sup>(10)</sup> 이 제안한 식들 보다 더 간단한 형태를 가지며 실제 다공질 금속에도 더 잘 일치하였다.

본 논문에서 제안된 복수 구성방정식으로부터 얻은 이론치는 Shipman 등<sup>(21)</sup>에 의해 얻어진 정수압 압축 및 1축 변형을 압축상태 하의 다공질 텅스텐의 실험치와 비교하여 아주 잘 일치하였다.

## 2. 기본 방정식

본 논문에서 사용되는, 즉 Casey 와 Naghdi<sup>(18,19)</sup> 및 Carroll<sup>(22)</sup> 등에 의해 개발된 소성유동을 위한 구성이론의 기본 방정식을 정리하면, 응력텐서  $S_{KL}$  은 변형률텐서  $e_{KL}$  와 소성변형률을 나타내는 대칭인 2차텐서  $e^p_{KL}$  의 함수로 가정할 수 있다. 그러므로,

$$S_{KL} = \hat{S}_{KL}(e_{MN}, e^p_{MN}). \tag{1}$$

$e^p_{KL}$ 이 고정되면, 식 (1)은

$$e_{KL} = \hat{e}_{KL}(S_{MN}, e^p_{MN}) \tag{2}$$

로 변환될 수 있다. 더 나아가서 陽의 값을 갖지 않는 함복함수 (loading function 또는 yield function)  $g$  의 존재를 가정하면, 각  $e^p_{KL}$ 의 값에 대해

$$g(e_{KL}, e^p_{KL}) = 0 \tag{3}$$

는 6차원 변형률 공간의 개방영역 (탄성영역)  $E$  와 그 경계면 (함복곡면)  $\partial E$  를 정의한다. 여기서,  $g < 0$  인 경우는 탄성상태를,  $g = 0$  인 경우는 탄성-소성상태를 나타낸다. 함수  $g$  는 다음과 같이 정의되어,

$$g = \frac{\partial g}{\partial e_{KL}} \dot{e}_{KL} \tag{4}$$

소성상태로부터의 제하 (unloading,  $\dot{g} < 0$ ), 중립부하 (neutral loading,  $\dot{g} = 0$ ) 그리고 부하 (loading,  $\dot{g} > 0$ ) 등에 관한 조건을 변형률 공간에서 정의해 준다. 또, 식 (2)와 (3)을 사용하면, 응력공간에서도  $g$  에 상응하는 함복함수  $f$  를 얻게 된다. 즉,

$$f(S_{KL}, e^p_{KL}) = g(e_{KL}, e^p_{KL}). \tag{5}$$

식 (5)는 응력공간에서의 탄성영역  $S : f < 0$  와 함복곡면  $\partial S : f = 0$  를 정의할 수 있게 한다. 또, 함수는 다음과 같이 정의되어

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial S_{KL}} \dot{S}_{KL} \tag{6}$$

식 (6)으로부터 재료의 탄성-소성변형 중의 경화, 연화 및 완전소성 거동<sup>(18)</sup>을 정의할 수 있다. 이미 언급한 바와 같이 부하 (loading)는 변형률 공간의 이론에서는  $g = 0$  와  $\dot{g} > 0$  의 조건으로 정의되므로, 재료의 변형경화예의 거동은 스칼라 함수  $\phi = f/\dot{f}$  로 특성화할 수 있다. 그러므로 스칼라 함수  $\phi$  가 陽의 값을 가질 때는 경화성을, 零인 경우에는 완전 소성을, 陰의 값을 가질 때는 연화성을 나타낸다. 스칼라 함수  $\phi$  는 다음과 같이 쓸 수도 있다.<sup>(20)</sup>

$$\phi = \frac{\Gamma}{\Gamma + \Lambda}, \tag{7}$$

여기서

$$\Lambda = -\frac{\partial f}{\partial S_{KL}} \frac{\partial g}{\partial e_{KL}}, \quad \Gamma = -\frac{\partial f}{\partial S_{KL}} \frac{\partial f}{\partial e^p_{KL}}, \tag{8}$$

$\Gamma + \Lambda > 0.$

본 논문에서는 (1) 식의 특별한 경우로 다음의 식을 사용한다.

$$S_{KL} = C_{KLMN}(e_{MN} - e^p_{MN}) \tag{9}$$

여기서  $C_{KLMN}$ 은 상수 값의 4차 탄성계수 텐서이다.

그리하여, 소성 스트레인속도에 대한 구성방정식은 변형의 閉回路에서 일의 量이 陰이 아니라는 것과 중립부하로부터 부하 (loading)에의 연속성에 관한 가정

등으로부터 다음과 같이 구해진다<sup>(10)</sup>.

$$\dot{e}^p_{KL} = \frac{k}{\Gamma + A} \frac{\partial f}{\partial s_{KL}} \quad (10)$$

### 3. 특수 구성방정식

2차 텐서는 다음과 같이 구(spherical) 성분과 편차(deviatoric) 성분으로 분해하여 사용하면 편리하다. 그러므로,

$$\begin{aligned} \tau_{KL} &= s_{KL} - \bar{s} \delta_{KL}, \quad \gamma_{KL} = e_{KL} - \bar{e} \delta_{KL}, \quad \gamma^p_{KL} = e^p_{KL} - \bar{e}^p \delta_{KL}, \\ \bar{s} &= \frac{1}{3} s_{KK}, \quad \bar{e} = \frac{1}{3} e_{KK}, \quad \bar{e}^p = \frac{1}{3} e^p_{KK}. \end{aligned} \quad (11)$$

모재가 비압축성을 갖는다고 가정하며, 소성항복의 함수는 응력과 기공성만의 함수라고 가정한다. 이제 응력반응함수 식(9)을 일반화된 Hooke의 법칙으로 다음과 같이 특징한다.

$$\tau_{KL} = 2\mu(\gamma_{KL} - \gamma^p_{KL}), \quad \bar{s} = 3k(\bar{e} - \bar{e}^p). \quad (12)$$

여기서  $\mu$ 와  $k$ 는 다공질 금속의 상당탄성전단계수와 상당탄성체적계수이다. 한편, 기공성  $\phi(=V_p/V)$ 는 모재의 비압축성으로부터 다음과 같이 구해진다<sup>(23)</sup>.

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0) \exp(v) \quad (13)$$

여기서  $V$ 와  $V_p$ 는 각각 다공질 금속의 전체체적 및 기공의 체적을 표시하며,  $v(=-e_{KK})$ 는 압축체적 변형을,  $\phi_0$ 는 초기 기공성이다.

이제 다음과 같은 다공질 고체의 소성항복의 조건식을 고려한다.

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \tau_{KL} \tau_{KL} + \alpha \phi \bar{s}^2 - \frac{1}{3} (1 - \phi)^n Y_s^2, \\ g &= 2\mu^2 (\gamma_{KL} - \gamma^p_{KL}) (\gamma_{KL} - \gamma^p_{KL}) + \alpha \phi \{3k(\bar{e} - \bar{e}^p)\}^2 \\ &\quad - \frac{1}{3} (1 - \phi)^n Y_s^2, \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\phi$ 는 식 (14)<sub>1</sub>에서는  $s_{KL}$ 과  $e^p_{KL}$ 의 함수이며 식 (14)<sub>2</sub>에서는  $e_{KL}$ 의 함수이며,  $Y_s$ 는 모재의 초기 항복응력,  $\alpha$ 와  $n$ 은 상수이다. 식 (14)<sub>2</sub>는 식 (12)를 이용하여 식 (14)<sub>1</sub>로부터 구해진다. 식 (14)에서는 기공성이 차차 줄어들음에 따라 순수압력(mean normal stress)의 기여도는 점차 적어지고, 항복응력을 포함한 항의 기여도는 점차 커진다. 다른 연구자들이 제안한 소성항복의 조건식도 이와 비슷한 구조를 갖고, 만약 모재가 미소변형 하에서 심한 경화성을 나타내지 않는다면, 식 (14)<sub>1</sub>에서 같이 기공의 붕괴로 인한 다공질고체의 경화계수로서의 기공성( $\phi$ )을 고려하는 가정은 합당할 것이다.

그리하여, 식 (8)과 (14)로부터 다음 식들을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_{KL}} &= \tau_{KL} + \left\{ \frac{2}{3} \alpha \phi \bar{s} + \frac{\alpha(1-\phi)\bar{s}^2}{3k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{9k} (1-\phi)^n Y_s^2 \right\} \delta_{KL}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial e_{KL}} &= 2\mu \tau_{KL} + \left\{ 2k\alpha \phi \bar{s} + \alpha(1-\phi)\bar{s}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{3} (1-\phi)^n Y_s^2 \right\} \delta_{KL}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= - \left\{ 2\alpha \phi \bar{s} + \frac{\alpha(1-\phi)}{k} \bar{s}^2 + \frac{n}{3k} (1-\phi)^n Y_s^2 \right\} \\ &\quad \left\{ \alpha \bar{s}^2 (1-\phi) + \frac{n}{3} (1-\phi)^n Y_s^2 \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

그리고

$$\begin{aligned} A &= 2\mu \tau_{KL} \tau_{KL} + \left\{ 2\alpha \phi \bar{s} + \frac{\alpha(1-\phi)}{k} \bar{s}^2 + \frac{n}{3k} (1-\phi)^n Y_s^2 \right\} \\ &\quad \left\{ 2\alpha k \phi \bar{s} + \alpha(1-\phi)\bar{s}^2 + \frac{n}{3} (1-\phi)^n Y_s^2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

### 4. 하중조건에 따른 구성방정식

#### 4.1 정수압 압축(Hydrostatic Compression)

정수압에 의한 압축 하의 다공질 금속의 미소변형하의 반응을 고려한다. 이 문제를 다루기에 좀 더 편리한 기호로  $p = -\bar{s}$ ,  $v = -3\bar{e}$  및  $v^p = -3\bar{e}^p$ 를 채택하며 또 구대칭 조건으로부터  $\tau_{KL} = \gamma_{KL} = \gamma^p_{KL} = 0$ 을 갖는다. 여기서  $p, v, v^p$ 는 압력, 압축체적변형을, 압축소성체적 변형율을 각각 나타낸다. 이 경우의 항복함수(또는 부하함수)로서 식 (14)<sub>1</sub>는 다음과 같이 간단한 형태로 유도된다.

$$f = \alpha \phi p^2 - \frac{1}{3} (1 - \phi)^n Y_s^2 \quad (19)$$

그리고 구성방정식 (14)와 (10)은

$$\dot{p} = k(v - v^p) \quad (20)$$

그리고

$$\dot{v}^p = \frac{[2\alpha k \phi p - \alpha(1-\phi)p^2 - \frac{n}{3}(1-\phi)^n Y_s^2]}{2\alpha k \phi} \dot{v}. \quad (21)$$

으로 유도된다.

#### 4.2 1축변형율 압축(Uniaxial Strain Compression)

다공질금속의 1축 변형율 압축(변형율이 제어된 실험으로,  $e_{11} \neq 0$ ,  $e_{22} = e_{33} = 0$ 을 갖음)을 고려해보자. 응력 및 변형율이 축 대칭이므로,  $s_{22} = s_{33}$ ,  $e^p_{22} = e^p_{33}$ 라고 가정하면,

$$\tau_{KL} = \frac{1}{3} (s_{11} - s_{22}) \delta_{KL}, \quad \gamma_{KL} = \frac{1}{3} e_{11} \delta_{KL}, \quad \gamma^p_{KL} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} & (e_{11}^* - e_{22}^*) b_{KL} \\ \bar{s} &= \frac{1}{3} (s_{11} + 2s_{22}), \quad \bar{e} = \frac{1}{3} e_{11}, \quad \bar{e}^* = \frac{1}{3} (e_{11}^* + 2e_{22}^*) \end{aligned} \quad (22)$$

그리고

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0) \exp(-e_{11}), \quad (23)$$

여기서

$$b_{KL} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

식 (23)을 이용하면 항복함수 식 (14)<sub>1</sub>은

$$f = \frac{1}{3} \tau^2 + \alpha \phi \bar{p}^2 - \frac{1}{3} (1 - \phi)^n Y_s^2 \quad (25)$$

그리고 구성방정식 식 (12)와 식 (10)은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{4}{3} \mu (e_{11} - e_{11}^* + e_{22}^*) + k (e_{11} - e_{11}^* - 2e_{22}^*), \\ s_{22} &= -\frac{2}{3} \mu (e_{11} - e_{11}^* + e_{22}^*) + k (e_{11} - e_{11}^* - 2e_{22}^*), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11}^* &= \frac{\left[ 4\mu\bar{\tau} + 6\alpha k\phi\bar{p} + 3\alpha(1-\phi)\bar{p}^2 + n(1-\phi)^n Y_s^2 \right] \left( 2\bar{\tau} + 2\alpha\phi\bar{p} + \frac{\alpha}{k}(1-\phi)\bar{p}^2 + \frac{n}{3k}(1-\phi)^n Y_s^2 \right) \dot{e}_{11}}{12\mu\bar{\tau}^2 + 18\alpha\phi\bar{p} \left[ 2\alpha\phi k\bar{p} + \alpha(1-\phi)\bar{p}^2 + \frac{n}{3}(1-\phi)^n Y_s^2 \right]} \\ \dot{e}_{22}^* &= \frac{\left[ 4\mu\tau + 6\alpha k\phi\bar{p} + 3\alpha(1-\phi)\bar{p}^2 + n(1-\phi)^n Y_s^2 \right] \left( -\tau + 2\alpha\phi\bar{p} + \frac{\alpha}{k}(1-\phi)\bar{p}^2 + \frac{n}{3k}(1-\phi)^n Y_s^2 \right) \dot{e}_{11}}{12\mu\tau^2 + 18\alpha\phi\bar{p} \left[ 2\alpha\phi k\bar{p} + \alpha(1-\phi)\bar{p}^2 + \frac{n}{3}(1-\phi)^n Y_s^2 \right]} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서

$$\bar{p} = -p = (s_{11} + 2s_{22})/3; \quad \bar{\tau} = -\tau = s_{11} - s_{22}. \quad (28)$$

### 5. 실험치와의 비교검토

앞절에서 제안한 다공질 금속의 탄성-소성변형을 위한 구성이론과 Shipman 등<sup>(21)</sup>에 의해 얻어진 다공질 텅스텐의 실험치들 이제 비교 검토한다. 실험치의 초기항복곡면으로부터 초기 항복함수 (14)<sub>1</sub>에서의 상수  $\alpha$ 와  $n$ 를 결정한다.  $\alpha$ 와  $n$ 의 가장 적절한 값을 구하기 위해서는 非線型回歸法, 예로서 BMDP 통계 소프트웨어가 사용될 수 있다<sup>(24)</sup>. 고체 텅스텐의 초기 항복강도는  $Y_s = 0.965\text{GPa}$ 가 사용되었다<sup>(25)</sup>. 식 (14)<sub>1</sub>에서 초기항복시의 기공성  $\phi = \phi_0$ 는 중공구형 모델의 해석<sup>(23)</sup>으로부터 얻어졌다\*. 즉

$$\phi_1 = \frac{\phi_0}{1 + (Y_s/2\mu_s)(1 - \phi_0)} \quad (29)$$

여기서  $Y_s$ 와  $\mu_s$ 는 비다공질 텅스텐의 초기 항복강도와 탄성전단계수이다.

\*  $Y_s/2\mu_s = 0.005$ 와  $\phi_0 = 0.211$ 이 사용되었다.

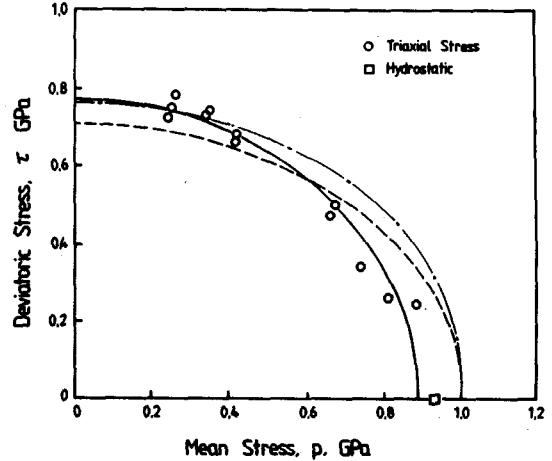


Fig. 1 Comparison of the experimental data of initial yield from various triaxial loading tests for porous tungsten<sup>(21)</sup> with the initial yield surface from (14)<sub>1</sub> (solid), with  $\alpha = 1.2$ ,  $n = 1.9$ , and  $Y_s = 0.965\text{GPa}$ . The initial yield surfaces of Green (dash) and Gurson (dash-dot) are also shown

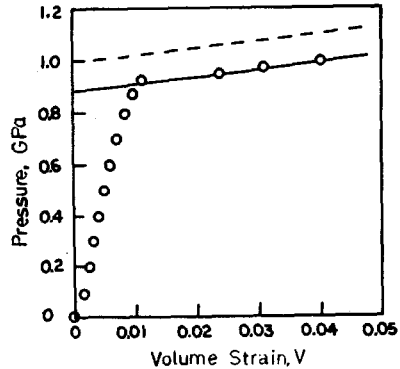


Fig. 2 Comparison of an experimental pressure versus volume strain curve (O) during hydrostatic compression<sup>(21)</sup> with the theoretical hydrostatic curves calculated from (33) (solid) and from (34) (dashed)

Fig. 1에서는 Shipman 등<sup>(21)</sup>이 구한 다공질 텅스텐의 여러 3축 하중조건에 따른 초기항복의 실험치와  $\alpha = 1.2$  및  $n = 1.9$  일때 식 (14)<sub>1</sub>에 의해 구한 이론치

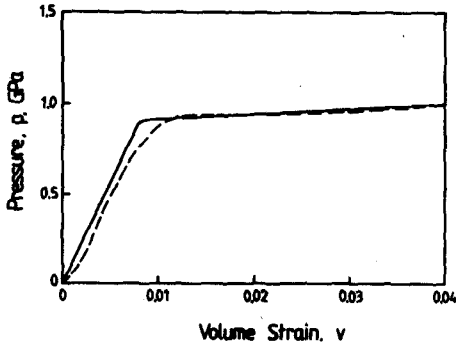


Fig. 3 Comparison of an experimental pressure versus volume strain curve (dash) during hydrostatic compression<sup>(21)</sup> with the theoretical hydrostatic curve calculated from (20) and (21)

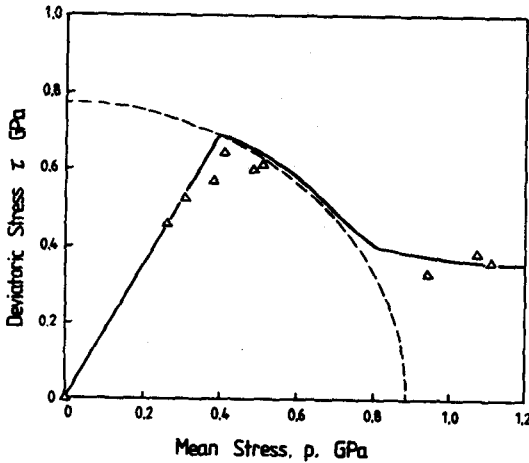


Fig. 4 Comparison of a theoretical uniaxial strain compression behavior (solid) with the experimental data ( $\Delta$ )<sup>(21)</sup> on the deviatoric stress versus mean normal stress relation for porous tungsten. The initial yield surface is also shown (dash)

(실선) 및 Green의 초기 항복곡선(점선)과 Gurson의 초기 항복곡선(쇄선)을 비교하였다. 이 논문에서 사용하는 기호로 Green<sup>(9)</sup>과 Gurson<sup>(10)</sup>의 항복함수를 다시 쓰면

$$f = \frac{1}{2} \tau_{KL} \tau_{KL} + 3a^2(\phi) \bar{s}^2 - \frac{1}{3} b^2(\phi) Y_s^2, \quad (30)$$

그리고

$$f = \frac{1}{2} \tau_{KL} \tau_{KL} + \frac{2}{3} \phi Y_s^2 \cosh\left(\frac{3\bar{s}}{2Y_s}\right) - \frac{1}{3} \times (1 + \phi^2) Y_s^2, \quad (31)$$

여기서

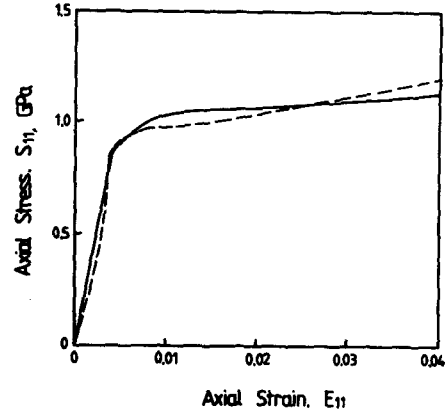


Fig. 5 Comparison of a theoretical uniaxial strain compression behavior (solid) with experimental data (dash)<sup>(21)</sup> on the axial stress versus axial strain relation for porous tungsten

$$a(\phi) = \frac{b(\phi)}{2 \ln(\phi)}, \quad b(\phi) = \frac{3(1 - \phi^{1/3})}{(3 - 2\phi^{1/4})}. \quad (32)$$

Green과 Gurson의 초기 항복곡선에 비교하여 식 (14)에 의해 구한 초기 항복곡선이 실험치에 더 잘 일치함을 알 수 있다. 이 이유 중 하나는 Green과 Gurson은 다공질고체의 순수압력에 의한 탄성-소성변형을 중공구형모델에서 구하였는데, 탄성 및 작은 소성변형 영역에서는 비구형기공(aspherical)과 미세균열(micro crack)등이 아직 많으므로, 중공구형모델은 이 영역에서는 순수압력을 과다 예측하기 때문이다<sup>(26)</sup>. 또, 식 (14)가 갖는 장점으로는 재료에 따른 다른 재료상수를 반영할 수 있다는 점과 더 간단한 형태를 갖으므로 이론적으로 구성방정식들을 유도하는데 더 간편하다는 점도 고려할 수 있다. 식 (14)과 (30)을 정수압 압축하의 소성변형을 위한 압력과 기공성의 함수로 쓰면 각각 다음과 같다.

$$p = \left[ \frac{1}{3a\phi} (1 - \phi)^n \right]^{1/2} Y_s \quad (33)$$

그리고

$$p = - \frac{b(\phi)}{3a(\phi)} Y_s. \quad (34)$$

이 식들과 식 (13)을 이용하면 정수 압축하의 압력과 압축 체적변형율의 관계를 실험치와 비교할 수 있다. Fig. 2에서는 다공질 텅스텐의 정수압 압축하의 압력과 압축 체적변형율의 관계를 실험치(○)와 식 (33)(실선) 및 식 (34)(점선)를 비교하였다.

Fig. 3에서는 다공질 텅스텐의 정수압 하의 압축상태에서의 실험치와 이론치를 비교하였다. 이론치는 Fig. 1에서 구한 상수값  $\alpha$ 와  $n$ 을 식 (20)과 (21)에

대입하여 계산했다. 탄성영역에서의  $p-v$ (압력 대 압축 체적변형율)의 관계에서 실험치 및 이론치를 비교하여 상당 탄성체적계수  $k=110\text{GPa}$ 가 얻어져 사용되었다. 정수압 압축에서 실험치와 이론치가 탄성 및 소성영역에서 모두 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 4에서는 1축 변형을 압축에서의 응력의 경로를 나타내는 실험치( $\Delta$ )와 이론치(실선)를 비교하였다. 여기서 점선은 초기 항복곡선을 나타낸다. 이론적인 응력경로는 식 (26)과 (27)로 부터 계산되었다. 응력경로의 탄성영역에서의 이론치 및 실험치를 비교하여 상당 탄성전단계수  $\mu=95\text{GPa}$ 를 구하여 사용하였다.

Fig. 5에서는 1축 변형을 압축 중의 축 응력-축 변형율 관계를 실험치(점선)와 이론치(실선)로 비교하였다. 이론으로부터 얻은 곡선은 식 (26)과 (27)을 이용해 계산된 것이다. 축 변형율이 0.03까지는 잘 일치하나, 높은 축 변형율에서는 이론적으로 예측한 축 응력이 실험치보다 낮았다. 이것은 다공질 텅스텐의 높은 축 변형율에서의 변형경화가 항복함수(14)<sub>1</sub> 식에 의해서 예측한 값보다 더 큰 것을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 다공질 금속을 위한 소성항복의 조건식을 제안하고, 이에 따른 3축하중 압축 하의 다공질 금속의 탄성-소성변형을 위한 특수 구성방정식을 형성하였다. 이론의 실험치와의 비교에는 다공질 텅스텐의 정수압 압축상태 및 1축변형을 압축상태에서의 탄성-소성반응을 비교 검토 하였다. 요약하면 탄성 변형은 상당탄성체적계수  $k$ 와 상당탄성전단계수  $\mu$ 의 2개의 탄성계수를 포함한다.  $k$ 와  $\mu$ 는 선형 탄성저동에서의 정수압-체적변형율의 관계와 전단응력-전단변형율 관계에서 실험적으로 구해진다. 탄성-소성변형은 재료상수  $\alpha, n$  및  $Y$ 를 포함한다.

본 논문에서 제안된 소성항복의 조건식에는 기공성( $\phi$ )만이 변형경화계수라고 가정하여, 미소변형에서의 실제 다공질 텅스텐의 실험치와 잘 일치하였다. 그러나, 일반적으로는 다공질 고체에서의 변형경화에는 기공성의 변화에 의한 변형경화 뿐 아니라, 모체의 변형경화 현상도 함께 고려되어야 할 것이다.

## 후 기

본 연구의 수행은 산업과학기술연구소(RIST)의 연구과제에서 지원된 것으로 이에 감사드리는 바입니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Torre, C., 1948, "Theorie und Verhalten der Zusammengesetzten Pulver", Berg -u. Huttenmann. Monatsh., Vol. 93, p. 62.
- (2) Mackenzie, J.K., 1950, "The Elastic Constants of a Solid Containing Spherical Holes", Proc. Phys. Soc., Vol. B63, p. 2.
- (3) Carroll, M.M. and Holt, A.C., 1972, "Static and Dynamic Pore-Collapse Relations for Ductile Porous Solids", J. Appl. Phys., Vol. 44, p. 1626.
- (4) Carroll, M.M. and Holt, A.C., 1973, "Steady Waves in Ductile Porous Solids", J. Appl. Phys., Vol. 44, p. 4388.
- (5) Carroll, M.M. and Kim, K.T., 1984, "Pressure-Density Equations for Porous Metals and Metal Powders", Powder Metall., Vol. 27, p. 153.
- (6) Kim, K.T. and Carroll, M.M., 1987, "Compaction Equations for Strain Hardening Porous Materials", Int. J. Plasticity, Vol. 3, p. 63.
- (7) Johnson, J.N. and Green, S.J., 1976, "Mechanical Response of Porous Media Subject to Static Loads", The Effects of Voids on Material Deformation AM-DVol. 16, Cowin, S.C. and Carroll, M.M., Eds. ASME, N.Y.
- (8) Curran, J.H. and Carroll, M.M., 1979, "Shear Stress Enhancement of Void Compaction", J. Geophys. Res., Vol. 84, p. 1105.
- (9) Green, R.J., 1972, "A Plasticity Theory for Porous Solids", Int. J. Mech. Sci., Vol. 4, p. 215.
- (10) Gurson, A.L., 1977, "Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth-Part 1. Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media", J. Eng. Mat. Tech., Vol. 99, p. 2.
- (11) DeBoer, R. and Kowalski, S.J., 1983, "A Plasticity Theory for Fluid-Saturated Porous Solids", Int. J. Eng. Sci., Vol. 21, p. 1343.
- (12) Kuhn, H.A. and Downey, C.L., 1971, "Deformation Characteristics and Plastic Theory of Sintered Powder Materials", Int. J. Powder Metall., Vol. 7, p. 15.
- (13) Shima, S. and Oyane, M., 1976, "Plasticity Theory for Porous Metals", Int. J. Mech. Sci., Vol. 18.

- p. 285.
- (14) Green, A.E. and Naghdi, P.M., 1965, "A General Theory of an Elastic-Plastic Continuum", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 18, p. 251.
- (15) Green, A.E. and Naghdi, P.M., 1966, "A Thermodynamic Development of Elastic-Plastic Continua", *Proc. IUTAM Symp. on Irreversible Aspects of Continuum Mech. and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids*, Parkus, H. and Sedov, L.I., Eds., p. 25, Springer-Verlag, Berlin.
- (16) Naghdi, P.M. and Trapp, J.A., 1975, "The Significance of Formulation Plasticity Theory with Reference to Loading Surfaces in Strain Space", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 13, p. 785.
- (17) Naghdi, P.M. and Trapp, J.A., 1975, "Restriction Constitutive Equation of Finitely Deformed Elastic-Plastic Materials", *Q.J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 28, p. 25.
- (18) Casey, J. and Naghdi, P.M., 1981, "On the Characterization of Strain Hardening in Plasticity", *J. Appl. Mech.*, Vol. 48, p. 285.
- (19) Casey, J. and Naghdi, P.M., 1984, "Further Constitutive Results in Finite Plasticity", *Q.J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 37, p. 231.
- (20) Casey J. and Naghdi, P.M., 1983, "Strain Hardening Response of Elastic Plastic Materials", *Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Tuscon, AZ, Jan. 10~14.
- (21) Shipman, F.H., Abou-Sayed, A.S. and Jones, A.H., 1975, "Physical and Mechanical Characterization of a Porous Tungsten", Report No. 75-59, Terra-Tek Inc. Salt Lake City, Utah.
- (22) Carroll, M.M., 1987, "A Rate Independent Constitutive Theory for Elastic-Plastic Deformation", *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, p. 15.
- (23) Carroll, M. M., 1980, "Mechanical Response of Fluid-Saturated Porous Materials", *Proc. 15th Int. Cong. Theo. Appl. Mech.*, Rimrott, F.P.J. and Tabarrok, B., Eds., North-Holland, N.Y.
- (24) Jennrich, R., 1983, "P3R-Nonlinear Regression", *BMDP Statistical Software*, Dixon, W.J., Ed., p. 289, University of California Press.
- (25) *Metals Handbook*, 1984, American Society for Metals, 9th ed., Vol. 7, p. 476, Ohio.
- (26) Schatz, J.F., 1976, "Models of Inelastic Volume Deformation for Porous Geologic Materials", in *The Effects of Voids on Material Deformation*, Cowin, S.C. and Carroll, M.M., Eds., AMD-16, ASME. New York.