韓國經營科學會誌
第12券 第2號
1987年 12月

단순 시설입지 선정문제에 대한 쌍대기반 휴리스틱

A Dual-Based Heuristic Algorithm for the Simple Facility Location Problem

盧 亨 鳳*

ABSTRACT

This paper presents a heuristic algorithm for solving the simple facility location problem. Its main procedure is essentially of 'add' type, which progressively selects facilities to open according to a certain criterion derived from the analysis of the linear programming dual. Computational experience with test problems from the literature is presented.

1. 서 론

시설입지선정을 위한 모형으로 잘 알려진 단순 시설입지 선정문제(simple facility location problem : SFLP)를 수리모형으로 정립하면 다음과 같은 혼합 0－1 정수계획모형이 된다 :

$$(P)\ \text{최소화}\ Z_P=\sum_{i\in I} f_i y_i+\sum_{i\in I,\ j\in J} c_{ij}\ x_{ij}, \quad (1)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}=1,\ i\in I_j \quad (2)$$

$$x_{ij}\leq y_i, \qquad i\in I,\ j\in J_j \quad (3)$$

$$x_{ij}\geq 0, \qquad i\in I,\ j\in J_j \quad (4)$$

$$y_i=0\ \text{또는}\ 1, \quad i\in I. \quad (5)$$

여기에서 y_i는 시설 i가 설치되면 1이고 아니면 0인 정수변수이다. 반면에 x_{ij}는 고객 j의 수요 중에서 시설 i가 충족시키는 양의 비율을 가리키는 실수변수인데, 실제로 최적해에서는 0 또는 1의 정수값만을 갖는다. f_i는 시설 i의 설치고정비이고, c_{ij}는 고객 j의 수요를 시설 i에서 모두 공급하는 경우의 생산 및 수송비이다.

*홍익대학교 경영학과

SFLP에 대한 해법으로는 매우 많은 방법들이 연구되었는데, 그 중 가장 우수한 것으로 인정받고 있는 것은 Erlenkotter [2]의 쌍대기반 해법(dual-based solution method)이다. 이 해법은 하나의 분단탐색법(branch and bound method)으로, 그 우수성은 기본 절차인 dual ascent proceduse(DAP)가 필수 요소인 목적함수 값의 상·하한을 매우 효율적으로 구한다는 데 있다. 이와같이 효율적인 쌍대기반 해법은 SFLP 외에 보다 복잡한 설비입지 선정문제에 대해서도 적용되어 성공적인 결과를 보여주어 왔다.

그런데 이와같이 놀랄만한 DAP의 효율성에도 불구하고, 현실적으로 볼 때 DAP와 비교해서 계산노력은 조금 더 소요되더라도－물론 절대적인 양에 있어서는 작아야 하지만－보다 좋은 해(상한)를 제공할 수 있는 휴리스틱(heuristic algorithm)이 필요한 경우를 우리는 종종 보게 된다. 이러한 경우의 하나로서 복잡한 시설입지 선정문제를 푸는 과정에서 하나의 subproblem으로 SFLP를 반복적으로 풀어야 되는 경우, 보다 좋은 해를 얻음으로서 전체 계산효율을 증진시킬 수 있음을 들 수 있겠다 [3, 6, 11]. 또한 대형 SFLP를 풀기 위한 분단탐색

법에서 처음에 매우 좋은 해 (상한)를 얻음으로써, 전체 계산시간을 좌우하는 분지(branch)의 수를 대폭 줄일 수 있음도 이러한 경우의 좋은 예라고 볼 수 있다.

본 연구에서는 이러한 점에 착안하여 기존의 DAP에 비해서 추가계산노력을 최소로 하면서 보다 좋은 해, 그리고 보다 자주 최적해를 찾을 수 있는 휴리스틱을 제시하고자 한다. 이 휴리스틱은 문제 P의 정수조건(5)를 완화시킨 선형계획문제의 쌍대문제에 기반을 두고 개발하고자 한다. 따라서 기존의 쌍대기반해법들이 적용되었던 모든 문제에 대해서도 본 휴리스틱은 매우 쉽게 적용될 수 있으며, 또한 좋은 결과를 보일 수 있으리라 본다. 그러나 본 연구에서는 이에 대한 모든 언급은 생략하기로 하고 단지 가장 간단한 문제인 SFLP에 대한 것만을 소개하기로 한다.

2. 쌍대기반 휴리스틱

본 연구에서 제시하고자 하는 휴리스틱은 두 단계의 절차로 구성되어 있다. 첫째 단계에서는 설치가능 시설들로부터 실제로 설치하고자 하는 시설들을 하나씩 순차적으로 선정하는데, 더 이상 해를 개선시킬 수 없을 때 까지 반복한다. 다음 단계에서는 이미 선정된 시설들 중에서 보다 효과적인 시설들 만을 간추려 냄으로서 더욱 해를 개선시키고자 한다.

2.1 선형계획모형의 쌍대문제

일단계 과정을 설명하기에 앞서 서술상 편의를 위해, 문제 P의 정수조건을 완화시킨 선형계획모형의 쌍대문제를 우선 살펴보기로 한다.

문제 P의 정수조건 (5)를 다음과 같이 단순한 비음조건

$$y_i \geq 0, \quad i \in I, \tag{6}$$

으로 완화시킨 선형계획모형 $\bar{P}$, (1)-(4)와 (6), 의 쌍대문제를 구하면 다음과 같다.

$$(\bar{D}) \text{ 최대화 } \bar{Z}_D = \textstyle\sum_{j \in J} v_j, \tag{7}$$

$$\textstyle\sum_{j \in J} max\{0, v_j - c_{ij}\} \leq f_i, \ i \in I. \tag{8}$$

여기서 v_j, v_{ij}는 P의 제약식 (2)와 (3)에 대응하는 쌍대변수이고, $w_{ij} = max\{0, v_j - c_{ij}\}$로 놓은 결과이다[2].

쌍대문제 $\bar{D}$의 제약식 (8)로 부터 다음과 같은 기호를 정의하면

$$A_i = \textstyle\sum_{j \in J} max\{0, v_j - c_{ij}\} - f_i. \tag{9}$$

원문제 $\bar{P}$와 쌍대문제 $\bar{D}$ 사이의 쌍대관계로 부터, 쌍대변수 v_j는 공급자인 기업이 고객 j의 수요를 충족시킴으로써 보상받고자 하는 최소한의 수익이라고 볼 수 있다[4]. 또한 A_i는 이 기업이 시설 i를 설치하여 제품을 공급함으로서 고객들로 부터 얻어낼 수 있는 순 보상액(net saving)이라고 해석될 수 있다. 왜냐하면 각 고객들로부터의 수익 v_j에서 이 시설의 생산 및 수송 비용 c_{ij}를 감하고 남은 것들의 합에서 시설고정비 f_i를 빼고 남은 잉여분이기 때문이다. 따라서 타당한 v_j 값들로부터 평가된 A_i의 값이 비음(nonnegative)이라면 시설 i는 설치하는 것이 바람직하다고 볼 수 있다.

2.2 단계

단계 I에서 수행되는 절차는 전형적인 추가식 절차(add procedure)로서 일단 모든 시설들이 설치시설로서 선택되지 않은 상태에서 시작한다. 다음으로는 미선택 시설들 중에서 주어진 선택기준을 만족하는 시설을 하나 선정하여 설치시설로 채택한다. 더 이상 주어진 선택기준을 만족하는 시설이 없을 때까지 이와같은 절차를 반복한다.

〈m번째 반복절차〉

임의의 한 시점에서 이미 채택된 시설들의 수는 (m-1)개이고, 현재는 m**번째** 설치시설을 선택할 차례라고 가정하자. 현 상태에서의 쌍대변수 값을 v_j^+라 하고 다음과 같은 기호들을 정의하기로 한다. 다.

$$I = \text{모든 시설들의 집합 ;} \tag{10}$$

$$I^* = \text{현 상태에서 이미 선택된 설치시설들의 집합: } |I^*| = m-1 ; \tag{11}$$

$$\bar{I}^* = \text{현 상태에서 미선택된 시설들의 집합 : } \bar{I}^* = I - I^* ; \tag{12}$$

$$J_i = \{j \mid c_{ij} < \min_{k \in I^*} \{c_{kj}\}\}, \ i \in \bar{I}^*; \tag{13}$$

$$S_i = \textstyle\sum_{j \in J} max\{0, v_j^+ - c_{ij}\} - f_i, \ i \in \bar{I}^*; \tag{14}$$

$$J^* = \cup_{i \in I^*} J_i. \quad (15)$$

본 연구에서는 설치시설 선택기준으로 (14)에 주어진 S_i 값의 비음 여부를 사용하고자 한다. 즉 S_i 값이 비음이면 시설 i를 설치시설로 채택하려는 것이다. 이 S_i는 (9)에 주어진 A_i와 매우 유사한데, 단 한가지 다른 점은 첫째 항에서 모든 고객 $j \in J$에 대해서가 아니라 특정고객 $j \in J_i$에 대해서만 합을 구했다는 점이다. 여기서 J_i는 (13)식에서 보는 바와 같이 시설 i가 설치되는 경우 기존의 시설들(I^*)과 비교해서 보다 저렴하게 공급받을 수 있는 고객들의 집합이다. 따라서 앞에서 언급한 바와 같이, 타 시설들의 설치 여부와 관계없이 시설 i의 설치를 독립적으로 고려한 A_i와는 달리, S_i는 기존의 설치시설들에 시설 i를 추가 설치함으로써 기업이 얻을 수 있는 순 보상액의 의미를 가진다고 볼 수 있다. 본 절에서 고려하고자 하는 절차가 순수한 추가식 절차라는 것을 감안할 때 S_i가 보다 적절한 선택기준의 척도라는 것을 쉽게 알 수 있다.

이제는 이러한 의미의 S_i를 사용하여 m 번째 설치시설을 선정하는 과정을 살펴보기로 한다. 현재 상태에서 미선택된 시설들의 설치보상액 S_i 값을 살펴보면 모두 음수이다. 왜냐하면 음수가 아닌 시설들은 이미 이전 반복절차 수행 중에 설치시설로서 채택되었기 때문이다. 이러한 미선택시설들 중에서 설치시설로서 바람직한 시설을 선정하기 위해서는 대응하는 설치 보상액 S_i를 비음으로 만들어 주어야 한다. 이는 현재 상태에서 고객들로부터 얻고자 하는 수익 v^+_j중 적절한 것들을 증가시켜 줌으로서 가능하다. S_i의 정의 (14)로 부터 수익을 증가시키는 것이 적절한 고객들의 집합은 (15)에 주어진 J^*이다. 즉 미선택시설들에 대응하는 J_i 집합내의 고객들의 합집합이다. 왜냐하면 이미 설치된 시설들(I^*)로 부터 가장 저렴하게 공급받을 수 있는 고객들의 수익은 새로이 선택되는 시설의 순보상액에 기여해서는 안되기 때문이다. 다음으로 고려해야 할 것은 v_j값의 증가방법인데, 이의 최적방법 고안은 매우 어렵기 때문에 임의의 휴리스틱을 사용하고자 한다. 그런데 이런 경우 Erlenkotter[2]의 DAP에서 사용한 방법이 매우 효과적이라는 것이 잘 알려져 있기 때문에 본 연구에서도 이를 사용하고자 한다. 자세한 내용은 다음의 추가식 절차에서 보이기로 한다.

이제는 지금까지 논술한 추가식 절차를 공식적으로 기술하고자 한다. 서술상 편의를 위해 c_{ij}를 고객 j를 기준으로 증가순서대로 나열한 것을 c^k_j, $k=1, 2, \cdots, |I|$, 라고 하고 $c_j^{|I|+1}=\infty$로 놓는다.

〈추가식 절차〉

1. a. $I^*=\phi$, $\bar{I}^*=I$, $J^*=J$로 놓는다.
   b. $v_j^+=c_j$, $k(j)=2$, $j \in J^*$,로 놓는다 ;
   $S_i=\sum_{j \in J_i} max\{0, v_j-c_{ij}\}-f_i$, $i \in \bar{I}^*$로 놓는다.
2. a. $d=0$, $j=1$로 놓는다.
   b. 만일 $j \notin J^*$이면 단계 2.f로 간다.
   c. $\triangle = - S_{i^*} = min_{i \in I^*}\{-S_i | v_j^+ \geq c_{ij}\}$로 놓는다; 만일 $\triangle > c_j^{k(j)} - v_j^+$이면 $\triangle = c_j^{k(j)} - v_j^+$로 놓고 $k(j)$를 1만큼 증가시킨다; 그렇지 않으면 d=1로 놓는다.
   d. $c_{ij} \leq v_j^+$인 $i \in \bar{I}^*$에 대해서 S_i값은 $\triangle$만큼 증가시킨다; 그리고 v_j^+ 값도 $\triangle$만큼 증가시킨다.
   e. $d=1$이면 단계 3.a로 간다.
   f. 만일 $j<|J|$ 이면 j를 1만큼 증가시키고 단계 2.b로 돌아간다.
   g. 만일 $J^*=\phi$이면 단계 2.a로 돌아간다; 그렇지 않으면 절차를 끝낸다.
3. a. I^*에 i^*를 추가시키고 $\bar{I}^*$에서 탈락시킨다; J^*를 갱신한다.
   b. S_i, $i \in \bar{I}^*$,를 다시 계산한다.
   c. $d=0$로 놓고 단계 2.f로 돌아간다.

2.3 단계 II

단계 I에서 결정한 설치시설들의 집합 I^*는 대부분의 경우 최적 시설들을 포함하고 있을 정도로 크다고 볼 수 있다. 그렇다면 현재의 해로부터 가장 용이하게 해를 개선시킬 수 있는 방법은 I^*에서 바람직한 시설들만을 추출해내는 것이라 볼 수 있다. 그러나 이 문제 역시 하나의 combinatorial problem으로 간단한 절차에 의해 쉽게 풀 수 없기 때문에 휴리스틱을 사용하고자 하는데, 이 경우 역시 Erlenkotter[2]가 사용한 방법을 그대로 사용하기로 한다. 자세한 내용의 서술은 생략하기로 한다.

단계 II의 과정이 끝난 후에도 다른 유형의 휴

리스틱, 특히 interchange 휴리스틱[1]을 사용하여 현재의 해를 더욱 개선시킬 수 있겠으나, 다음 절의 계산 결과에서 보는 바와 같이 현재의 해 정도로도 충분하므로 본 연구에서는 더 이상 고려하지 않기로 한다.

3. 계산 결과

본 연구에서는 쌍대기반 휴리스틱(dual-based heuristic: DBH)의 계산 효율을 검사하기 위해서 FORTRAN IV 언어로 작성된 프로그램으로 CYBER 170-845 컴퓨터를 사용하여 계산 실험을 하여 보았다. 실험의 공정성을 기하기 위하여 실험 예제들을 다양한 기존 연구문헌에서 발췌하여 사용하였다.

〈표1〉에서 보는 바와 같이 실험 예제들은 편리상 9개의 그룹으로 분류하였는데 처음 세 그룹의 예제들은 Roodman과 Schwarz[9, 10]가 만든 것들 중에서 발췌한 것이고, 그룹 IV와 V의 예제들은 Kuehn과 Hamburger [8]가 제시한 것들이다. 나머지 네 그룹의 예제들은 Karg와 Thompson[5], Krolak, Felts, Marble[7] 등이 원래 Traveling Salesman Problem의 예제로서 만든 자료인데 여기에서 사용해 보았다. 예제들에 대한 추가 정보, 즉 예제의 크기, 고정비에 대해서도〈표1〉에 소개하였다.

DBH의 계산 효율은 일반적으로 널리 쓰이는 두 가지 척도-계산시간과 계산 해의 질-로서 보였다. 또한 본 해법의 상대적 계산효율을 평가하기 위해 기존의 쌍대기반 해법의 실험 결과와 비교하여 보았다. 여기서는 두 가지 계산해와 비교하였는데, 첫째 해는 DAP만을 적용해서 구한 것이고, 둘째 해는 첫째 해에 primal-dual adjustment procedure (PDAP)를 적용시켜서 개선시킨 것이다. PDAP는 원래 DAP가 구한 해를 더욱 개선시키기 위해서 Van Roy와 Erlenkotter[12]가 개발한 해법이다. 이들의 실험 결과 역시 본 연구에서 별도로 작성한 컴퓨터 프로그램에 의해서 구했는데 그 결과를〈표1〉에 수록하였다.

우선 DBH와 DAP를 비교해 보면, 계산해의 질 면에서는 대부분의 경우 DBH가 같거나 보다 좋은 해를 구하였으며 최적해 또한 많이 발견하였음을 알 수 있다. 단지 계산시간에 있어서는 약간 많이 소요된 편이나, 그 절대적 시간 차이는 매우 미미하다고 볼 수 있다.

반면에 PDAP와 비교해 보면 전반적으로 DAP의 경우와는 반대임을 알 수 있다. 즉 계산해의 질에 있어서는 다소 뒤떨어지나 계산시간 면에 있어서는 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 더구나 문제 크기가 커짐에 따라 그 차이 또한 크게 벌어져서 대형 문제의 경우에는 더욱 많은 차이가 나리라 예상된다.

이와같은 계산실험의 결과로 부터 본 연구에서 개발한 휴리스틱 DBH는, 기존의 쌍대기반 해법 DAP와 비교해서 최소의 추가계산노력으로 보다 좋은 질의 계산해가 필요한 경우에 적절히 쓰일 수 있으리라 생각된다.

〈표 1〉 계산결과

문제 그룹	문제 크기[1]	고정비	최적해 값	계산해 값 DBH	계산해 값 DAP	계산해 값 PDAP	계산시간 DBH[2]	계산시간 DAP[2]	계산시간 PDAP[3]
I[4]	8×30		19048	*	*	/	·006	·007	/
	8×40		21932	*	*	/	·008	·008	/
	8×50		31298	*	*	*	·011	·010	·023
II[4]	12×30		8030	8088	8441	8170	·015	·013	·182
	12×40		22133	*	22294	22260	·016	·014	·068
	12×50		32764	*	33115	*	·019	·015	·051
III[4]	15×30		6380	*	*	*	·012	·012	·037
	15×40		8518	*	*	/	·017	·015	/
	15×50		10512	*	*	/	·019	·017	/
IV	25×50	7500	684878	*	*	/	·028	·027	/
		12500	737724	740388	745196	*	·030	·028	·069
		17500	766520	769647	774455	*	·035	·031	·106
		25000	796520	799992	811955	*	·036	·032	·140
V	25×50	7500	960466	*	*	/	·027	·027	/
		12500	1011469	1013943	1013943	*	·029	·030	·060
		17500	1049838	*	*	/	·034	·032	/
		25000	1098295	*	1098594	*	·038	·035	·065
VI	33×33	1000	14832	15043	*	/	·041	·040	/
		2000	20363	20503	21402	20937	·058	·056	·281
		3000	23474	23627	25810	*	·072	·069	·133
		4000	25474	*	*	/	·079	·077	/
		5000	27474	*	*	/	·085	·083	/
VII	42×42	50	974	1041	1045	1009	·063	·063	·290
		250	1915	*	*	/	·138	·140	/
		500	2445	*	*	/	·207	·201	/
		750	2931	3004	3009	*	·278	·262	1.037
		1000	3181	*	*	/	·297	·303	/
VIII	57×57	1000	20307	20377	20651	*	·144	·146	·562
		2000	27222	27231	28593	*	·213	·216	·541
		3000	32136	32654	33604	*	·290	·280	1.386
		4000	35547	36550	36452	*	·346	·330	1.021
		5000	38547	38617	38962	38617	·377	·367	1.733
IX	100×100	1000	35965	36041	37126	*	·364	·379	1.312
		2000	50103	50574	50468	*	·568	·548	2.814
		3000	59407	60004	62887	60444	·718	·672	2.871
		4000	66407	66493	68679	67782	·813	·791	5.462
		5000	73073	73553	76715	73407	·959	·941	4.464

1) (시설의 수)×(고객의 수).
2) 입·출력시간 제외된 것임.
3) 입력시간만 제외된 것임.
4) 각 시설의 고정비는 일정하지 않음.
* : 최적해 발견 경우임
: DAP에 의해 최적해임이 입증되어 계산이 불필요한 경우임.

참 고 문 헌

1. Cornuejols, G., M. L. Fisher and G. L. Nemhauser, "Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms," *Management Sci.* 23, 789-810, 1977.
2. Erlenkotter, D., "A dual-based procedure for uncapacitated facility location," *Operations Res.* 26, 992-1009, 1978.
3. Guignard, M. and K. Spielberg, "A direct dual method for the mixed plant location problem with some side constraints," *Mathematical Prog.* 17, 198-228, 1979.
4. Jacobsen, S. K., "A unified approach to heuristics and algorithms for a class of uncapacitated plant location problems," working paper No. 2252, IMSOR, Technical University of Denmark, 1977.
5. Karg, R. L. and G. L. Thompson, "A heuristic approach to solving traveling salesman problems," *Management Sci.* 10, 225-248, 1964.
6. Karkazis, J. and T. B. Boffey, "The multi-commodity facilities location problems," *Operational Res, Quart.* 28, 547-554, 1977.
7. Krolak, P., W. Felts and G. Marble, "A man-machine approach toward solving the traveling salesman problem," *Comm. ACM 14* 327-334, 1971.
8. Kuehn, A. A. and M. J. Hamburger, "A heuristic program for locating warehouses," *Management Sci.* 9, 643-666, 1963.
9. Roodman, G. M. and L. B. Schwarz, "Optimal and heuristic facility phase-out strategies," *AIIE Trans.* 7, 177-184, 1975.
10. Roodman, G. M. and L. B. Schwarz, "Extensions of the multiperiod facility phase-out model: new procedures and applications to a phase-in/phase-out probems," *AIIE Trans.* 9, 103-107, 1977.
11. Van Roy, T. J., "A cross decomposition algorithm for capacitated facility location," *Operations Res.* 34, 145-163, 1986.
12. Van Roy, T. J. and D. Erlenkotter, "A dual-based procedure for dynamic facility location," *Management Sci.* 28, 1091-1105, 1982.