

## 난류상태로 운전되는 저어널베어링에서의 $k-\epsilon$ 모델을 이용한 3 - 차원 THD 해석

이득우, 김경웅

한국과학기술원 생산공학과

(1987. 3. 24 접수)

### Three-Dimensional Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings Operating in Turbulent Region Using $k-\epsilon$ Model

Deug-Woo Lee, Kyung-Woong Kim

*Dept. of Prod. Eng., Korea Advanced Institute of Science and Technology*

*(Received March 24, 1987)*

#### ABSTRACT

Frictional loss in turbulent regime is abnormally increased compared with in laminar regime. Thus the consideration of temperature rise across fluid film is significant in analysis and conventional isothermal theory loses its usefulness for performance prediction.

This paper proposes to the three-dimensional thermohydrodynamic analysis of finite journal bearings operating under turbulent condition using two-equation model( $k-\epsilon$  model) proposed by Hassid & Poreh. The equations are solved numerically by finite difference method. We make the analysis applicable even at large eccentricity when back flow of the lubricants occurs and axial flow is no longer ignored compared to circumferential flow.

#### 기 호 설 명

<p>C : 축과 베어링사이의 평균간극</p> <p><math>C_p</math> : 비열</p> <p>h : 유막두께</p> <p><math>\bar{h}</math> : <math>y/h</math> 무차원 유막두께</p> <p>k : 난류에너지</p> <p><math>K_t</math> : 열전도 계수</p> <p>L : 저어널 폭</p> <p>P : 평균압력</p> <p><math>\bar{P}</math> : <math>C^2P/2u_jR</math> 무차원압력</p> <p>R : 베어링 반경</p>	<p>Re : <math>UC/\nu</math> Reynolds 수</p> <p><math>R_k</math> : <math>k^2/\epsilon\nu</math> 난류 Reynolds 수</p> <p>T : 온도의 평균성분</p> <p><math>\bar{T}</math> : <math>\rho C_p (T - T_i) RC^2 / u_j R^2</math> 무차원온도</p> <p>t : 온도의 변동성분</p> <p>U : 원주방향의 평균유속</p> <p><math>U_j</math> : 축의 원주속도</p> <p>u : 원주방향유속의 변동성분</p> <p>v : 유막방향유속의 변동성분</p> <p>W : 축방향의 평균유속</p> <p>w : 축방향유속의 변동성분</p> <p>x : 축회전방향 좌표</p>
---	--

$y$  : 유막방향 좌표  
 $z$  : 축방향 좌표  
 $\epsilon$  :  $\nu(\partial u_i/\partial x_i)^2$  난류에너지 소멸율  
 $\mu$  : 점성계수  
 $\nu$  : 동 점성계수  
 $\nu_t$  : 와 점성계수

$\alpha_t$  : 와 확산계수  
 $\rho$  : 밀도  
 $\tau$  : 전단응력  
 $\delta_t$  : Turbulent Prandtl 수  
 $\theta$  :  $x/R$   
 $i, j$  : Tensor 표시

## 1. 서 론

베어링에서의 흐름이 층류를 지나 난류에까지 이르게 되는 것은 1949년 Wilcock<sup>(1)</sup>에 의해 실험적으로 확인 되었으며, 산업사회의 발달과 함께 기계의 대형화, 고속화 및 낮은 동점도의 유효화의 사용이 많아짐에 따라 윤활 문제에서도 난류영역에 관한 연구의 필요성을 느끼게 되었다. 베어링내의 흐름이 난류상태가 되면 마찰손실의 증가등 증류상태에 비해 여러가지의 윤활 특성이 달라지는데, 특히 마찰열에 의한 윤활제의 온도증가는 베어링성능변화에 크나큰 영향을 줄 것으로 예측된다. 일반적으로 유막내에서의 온도변화가 그다지 없는 경우는 재래의 등점도 이론으로 어느정도 성능예측이 가능하지만, 온도변화가 큰 경우에는 점도변화를 고려한 THD (Thermohydrodynamic) 해석이 성능예측에 보다 유용할 것으로 생각되며, 실제 이에 대한 많은 연구가 수행되고 있다.<sup>(2)</sup>

그러나 현재까지 난류영역에서의 THD해석은 난류현상에 대한 적절한 모델이 어려우며, 온도와 압력 그리고 난류사이의 비선형관계에 기인된 해석의 복잡함으로 그다지 많은 연구가 행하여지지 않고 있다. Bowen & Medwell<sup>(3)</sup>은 Mixing Length 모델을 이용하여 유막두께방향의 온도분포를 무시한 평면 온도장으로 해석하였는데, Mixing Length 모델은 온도발생이 지배적인 점성영역과 속도구배가 0에서의 해석이 미흡하여 THD해석을 위한 모델로는 부적당하다. 이런 결점을 보완하기 위해 Suganami & Szeri<sup>(4)</sup>는 와점성계수로 Reichardt's Formula를 사용한 와점성모델을 이용하였는데, 이모델 또한 베어링의 형상과 흐름의 형태에 따라 모델상수를

수정해야 하는 경험적인 면이 많이 요구되고 편심율이 큰 경우에서와 같이 축 방향의 유동이 크거나 역류가 발생하는 경우에는 적용이 곤란하다.

최근에 많이 사용되는 Two-Equation모델(k- $\epsilon$ 모델)은 각각의 위치마다 지배 방정식을 풀어 와점성계수를 구하므로 경험적인 요소등, 다른 모델들의 결점이 많이 보완되어 있고 베어링에서의 THD해석에는 보다 유용한 모델로 생각된다. Pasquantonio & Sala<sup>(5)</sup>는 k- $\epsilon$ 모델을 이용하여 무한장 패드 베어링에 대해 해석하였다. 그런데 이들은 이 모델의 장점인 역류가 일어나는 영역에 대한 해석이 행해지지 않고 있으며 2차원해석으로 아직 부족한 면이 많다.

본 연구에서는 이런 점을 개선하기위해 k- $\epsilon$ 모델을 이용한 유한폭 저어널베어링에서의 3차원 THD해석을 행하여 좀더 일반적으로 적용할 수 있는 해석방법을 제시하고자 한다.

## 2. 이론전개

### 2-1. 지배방정식

이론해석은 연속방정식, 운동량방정식, 에너지 방정식, k- $\epsilon$  방정식을 연립하여 계산한다. 이론전개를 위해 다음과 같이 가정한다.

- 1) 충분히 얇은 유막두께로 생각하여 유막두께 방향을 제외한 다른방향의 Reynolds Stress 및 속도성분의 구배는 무시한다.
- 2) 정상상태이고 열 대류항을 제외한 다른 대류항 및 관성항은 무시한다.
- 3) 축방향 및 원주방향으로의 열전도를 무시한다.
- 4) Reynolds Stress는 Eddy Viscosity 모델

을 적용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad -\overline{vw} = \nu_t \frac{\partial W}{\partial y} \quad -\overline{vt} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1)$$

비압축성 유체에 대한 Reynolds Stress를 포함한 평균유동장에서의 운동량방정식 및 에너지 방정식을 Tensor 형으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho C_p}$$

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho C_p \overline{u_i t} \right) \right) + \tau_{ii} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

여기서  $\tau_{ii} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$  이다. (단,  $\mu_t = \rho \nu_t$ )

(2)식에 앞의 가정을 적용하고 경계조건으로  $y=0$ 에서  $U=0, W=0$ 와  $y=h$ 에서  $U=U_j, W=0$ 을 사용하여 연속방정식과 연립하면 다음의 Reynolds 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = U_j \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4)$$

$$\text{여기서 } G = \frac{\int_0^h \int_0^y \frac{dy dy}{\nu + \nu_t} \cdot \int_0^h \frac{y \cdot dy}{\rho(\nu + \nu_t)}}{\int_0^h \frac{dy}{\nu + \nu_t}}$$

$$- \int_0^h \int_0^y \frac{y dy dy}{\rho(\nu + \nu_t)} \quad F = \frac{\int_0^h \int_0^y \frac{dy dy}{\nu + \nu_t}}{\int_0^h \frac{dy}{\nu + \nu_t}} \quad \text{이다.}$$

(3)식에 앞의 가정을 적용하여 다음의 에너지 방정식을 얻는다.

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{K_i}{\rho C_p} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left( \frac{\mu + \mu_t}{\rho C_p} \right) \left( \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (5)$$

난류 Prandtl수는 보통 Prandtl수 (Molecular Prandtl)와 Reynolds수에 관계되어 변하지만, 여기서는  $\sigma_t$ 를 0.9로 한다.

Jones, W. P. & Launder, B. E.<sup>6</sup>가 제안한 모델에 대해 Hassid, S. & Poreh, M.<sup>7</sup>가 간

단히 수정하여 제시한 k-ε 모델을 사용하여 (4), (5)식에 나타난 난류응력(Reynolds Stress)을 구한다. 앞의 가정을 적용하면 유한폭 저어널 베어링에 응용할 수 있는 다음의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_t \left( \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) - \epsilon - \frac{2 \nu k}{b^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + C_1 \cdot \nu_t \left( \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\epsilon}{k} - C_2 (1 - 0.3 \text{EXP}(-R_k^2)) \frac{\epsilon^2}{k} - 2 \cdot \nu \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (7)$$

$$\nu_t = C_m \frac{k^2}{\epsilon} (1 - C_d \text{EXP}(-A_m R_k)) \quad (8)$$

$$b = \min(y, h-y)$$

여기서  $\sigma_k, \sigma_\epsilon, C_1, C_2, C_m, C_d, A_m$ 는 모델상수로 각각 1., 1.3, 1.45, 2.0, 0.09, 1.0, 0.0015이다.

## 2-2. 경계조건

난류에너지 및 그의 소멸율에 대해서는 Jones & Launder<sup>6</sup>가 제안한 것과 같이 양 벽면인  $y=0, h$ 에서  $\epsilon=0, k=0$ 이다.

압력은 Half Sommerfeld 조건을 사용하여

$$x=0, \pi \cdot R \quad \text{에서 } P=0$$

$$z=0 \quad \text{에서 } P=0$$

$$z=(1/2)L \quad \text{에서 } \frac{\partial P}{\partial z}=0 \quad \text{이다.}$$

온도는 급유구에서 재급유(Recirculation)을 고려하는 경우와 고려하지 않는 경우로 나누어서 계산하고, 벽면에서는 단열조건을 사용한다. 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x=0 \quad \text{에서 } T = \frac{Q_R}{Q_0} T_R + \left(1 - \frac{Q_R}{Q_0}\right) T_i$$

(재급유 고려)

$$T = T_i \quad \text{(재급유 무시)}$$

$$y=0, h \text{ 에서 } \frac{\partial T}{\partial y}=0$$

$$z=(1/2)L \text{ 에서 } \frac{\partial T}{\partial z}=0$$

여기서  $Q_R$ 는 재급유유량,  $Q_0$ 는 급유유량,  $T_i$ 는 급유온도,  $T_R$ 는 재급유온도이다.

### 2 - 3. 수치해석

지배방정식을 무차원하고 중앙차분법으로 수식을 전개한다. 계산기법으로는 S.O.R.을 사용한다.

수렴성의 판정조건은 압력에 관해 다음 식과 같다.

Table. 1. The condition of calculation

Cal. Condition	# 1	# 2	# 3
Reynolds Nu., Re	4 0 0 0	2 0 0 0	7 5 0
Eccen. Ratio, $\epsilon$	0.6	0.6	0.7
L / D	1	1	1/2
C / R	0.002	0.002	0.0034
C	300( $\mu$ m)	300( $\mu$ m)	128( $\mu$ m)
Viscosity (ASTM Chart)	C1=9.81 C2=3.95	C1=9.81 C2=3.95	C1=10.36 C2=4.15
Inlet Temperature	30 °C	30 °C	20 °C

$\rho = 0.89$   
 $C_p = 1930 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$   
 $K_t = 0.145 \text{ J/ms}^\circ\text{C}$   
 ASTM Chart :  $\text{Log Log}(\nu + 0.6) = C1 - C2 \text{ Log}(T)$

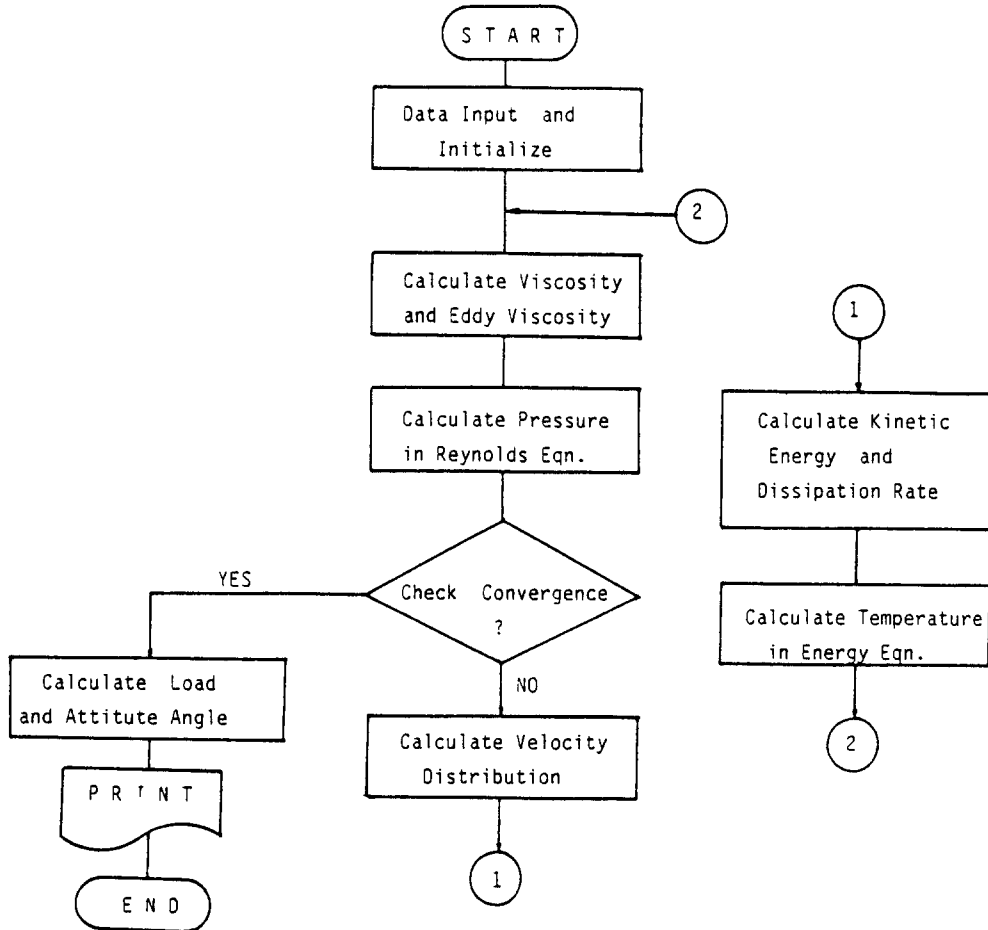


Fig. 1. Flow chart

$$\frac{\sum |P_i^{(M)} - P_i^{(M-1)}|}{\sum |P_i^{(M)}|} < 10^{-4}$$

계산에서 등분수는 원주방향으로  $0 < x < \pi \cdot R$ 에서 27등분, 유막두께 방향으로  $0 < y < h$ 에서 49등분, 축 방향으로  $0 < Z < (1/2)L$ 에서 9등분 한다.

해석에서의 조건은 표 1과 같다.  
계산순서는 Fig. 1에 나와있다.

### 3. 결과 및 고찰

Figs. 2, 3에서는 급유온도를 기준으로 한 등온이론과 THD이론의 계산결과를 비교하고 있는데, 표 1의 조건 1로 계산한 결과이다.

Fig. 2는 베어링중상부에서의 원주방향 압력 분포를 나타내고 있고, Fig. 3은 유막에서의 속도 분포를 나타내고 있다. 압력분포에서는 THD이론에 의한 계산결과가 등온이론에 의한 계산결과보다 전체적으로 감소된 값을 나타내며, 최대압력값이 37%정도 작아졌고, 최대압력의 위치가 이동하였다. 또한 두 경우의 압력곡선의 기울기에 차이를 볼 수 있는데, 이 차이만큼 고속회전 기계의 안정성에 관계되는 동특성을 예측하는데 영향을 미칠 것으로 생각된다. 속도분포를 보면 THD해석결과가 양 벽면에서 속도구

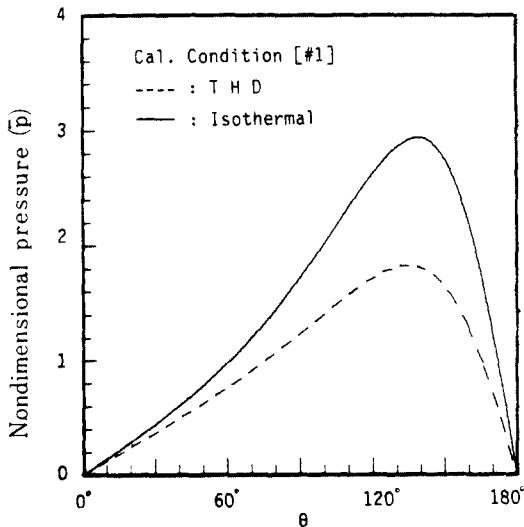


Fig. 2. Pressure distribution

배가 더 급격하게 되며 유막중상부에서는 완만한 기울기를 나타내고 있다. 벽면에서의 속도구배 변화가 큰 것은 그 곳에서의 점도가 크게 변화하기 때문이며, 점도변화가 고려됨에 따라 속도형상이 완전히 달리 해석됨을 알 수 있다.

Fig. 4는 Fig. 3과 동일위치에서의 온도분포

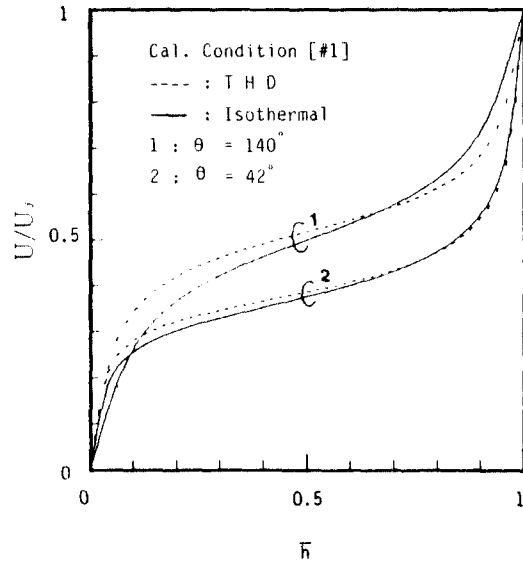


Fig. 3. Velocity profile, vs. film thickness.

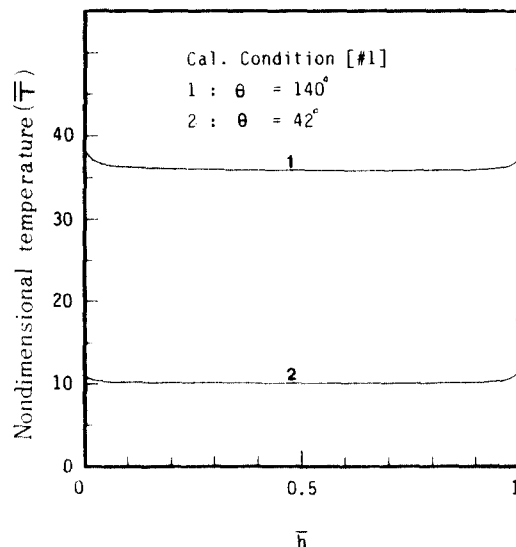


Fig. 4. Temperature distribution, vs. film thickness.

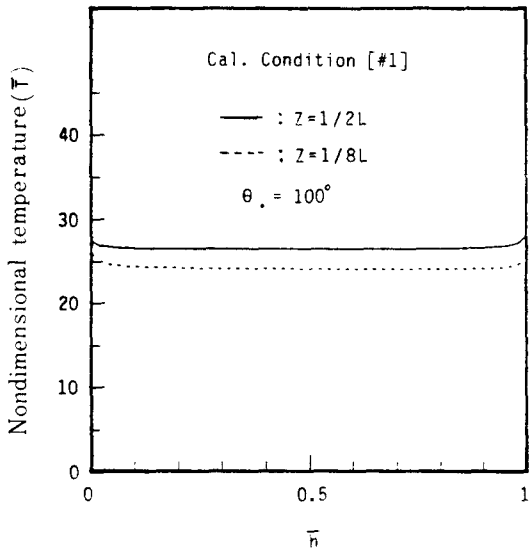


Fig. 5. Temperature distribution .vs. film thickness.

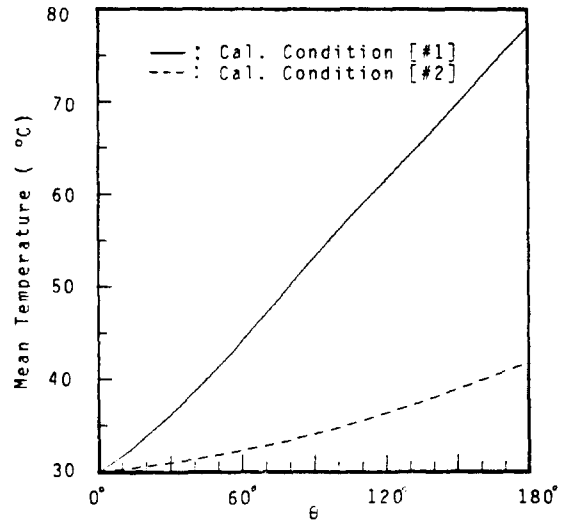


Fig. 7. Mean temperature in the circumferential direction of a bearing.

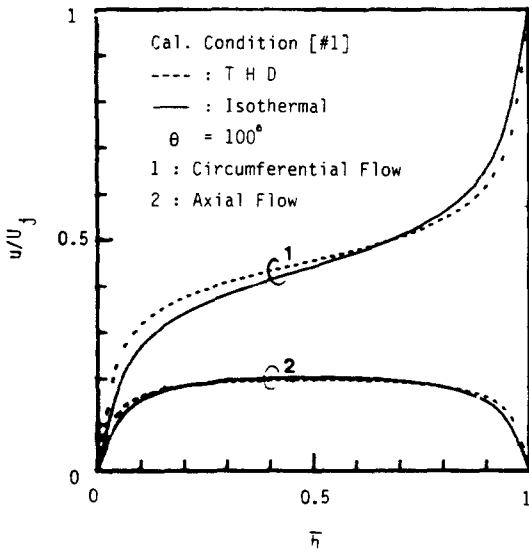


Fig. 6. Velocity distribution .vs. film thickness.

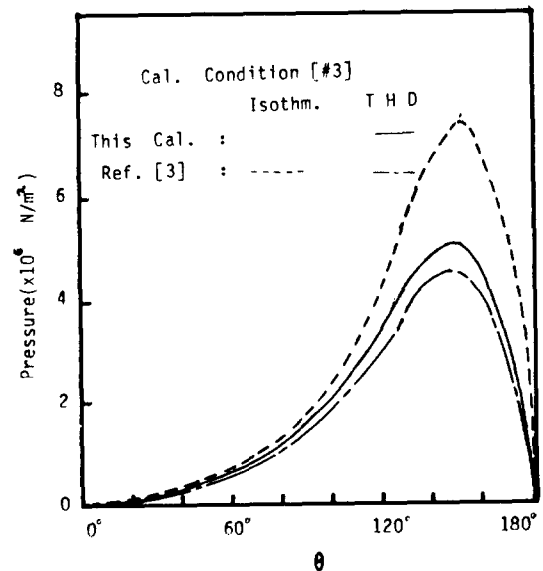


Fig. 8. Pressure distribution.

를 보여 주고 있는데, 벽면에 가까울수록 온도 상승이 크며 최대 유막두께의 위치에서 최소 유막두께의 위치로 갈수록 온도가 상승한다.

Fig. 5 는 축방향으로 중심부 ( $Z=1/2L$ )와  $Z=1/8L$  위치에서의 온도분포를 보여주고 있고,

Fig. 6 은 동일위치에서의 속도분포를 원주방향성분과 축방향성분으로 나누어 나타내었다. 유한폭 저어널베어링의 해석에서는 축방향의 유동에 의해 축방향으로의 온도 차이가 있으며, 이에따라 속도분포도 전체적인 변화가 있다. 속

도분포에서는 속도구배가 0인 곳이 있어 이 부분에서의 와점성계수에 대한 평가가 에너지방정식의 해석에서 Kolmogorov-Prandtl식 ( $\alpha_1 = \nu_t / \sigma_1$ )을 사용할 때 외확산계수에 대한 평가에 직접적인 영향을 미치므로 THD해석에는 이부분에서의 정확한 평가가 성능예측에 중요하다. 재래의 Mixing length모델을 사용하는 경우에는 속도구배가 0인 부분에서 와점성계수가 완전히 무시되어 해석되므로 이에따라 외확산계수의 값도 같이 무시되어 계산되고, 점성저층에서의 Reynolds Stress에 대한 평가가 행해져 있지 않으므로 THD해석에는 많은 오차가 포함될 것으로 생각된다. 그러므로  $k-\epsilon$ 모델을 이용한 3차원 THD해석이 Mixing length 모델을 이용한 해석이나 2차원해석에 비해 난류상태인 베어링의 성능해석에 보다 유용하다고 볼 수 있다. 또한 역류가 일어나는 곳에서도 같은 결과를 나타낼 것이다.

Fig. 7은 베어링 중앙부에서 유막 두께로의 평균온도를 원주방향으로 나타내었는데 Reynolds수의 증가에 따라 온도상승량이 증가함을 보여준다.

Figs. 8, 9는 표 1의 조건 3에서의 계산결과로 본 연구와 E.R. Bowen & J. O. Medwell<sup>(3)</sup>

의 해석을 비교하고 있는데, 압력분포에서는 본 연구가 더 큰 값으로 계산되었으며, 온도분포에서도 두 계산결과가 약간의 차이를 보이고 있다. E. R. Bown & J. O. Medwell<sup>(3)</sup>은 Mixing length 모델을 이용하여 유막두께방향의 온도분포를 무시한 평면온도장에서의 해석이므로, 값의 차이는 해석방법이 다름에 의한 결과이다. 실제로 유막두께방향의 온도 변화가 존재하고 이것은 베어링특성에 상당한 영향이 있기 때문에 유막두께방향의 온도분포를 고려하지 않은 경우의 계산은 정확한 베어링성능예측을 하기에 부족한 면이 있다.

Figs. 10, 11은 급유구에서의 경계조건으로 재급유(Recirculation Flow)을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 대한 해석결과를 나타내고 있다. Fig. 10에서 보면 재급유를 고려한 경우의 압력값이 더 낮게 계산되었으며 Fig. 11의 온도분포에서는 급유구에서 8°C 정도의 재급유에 의한 윤활제의 온도상승이 있음을 볼 수 있다. 또한 부하용량은 20% 정도의 감소되는 결과를 얻었다. 재급유를 고려한 경우가 재래의 해석과 같이 급유구에서의 경계 조건으로 단지 급유 온도로만 한 경우에 비해서는 좀더 실제 상황에 적합한 해석인 것으로 생각된다.

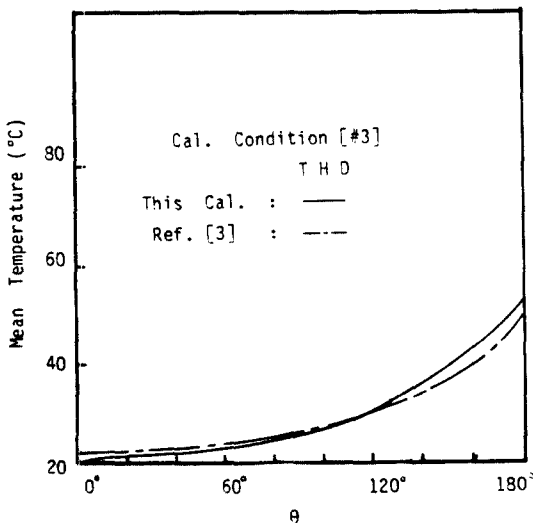


Fig. 9. Mean temperature in the circumferential direction of a bearing.

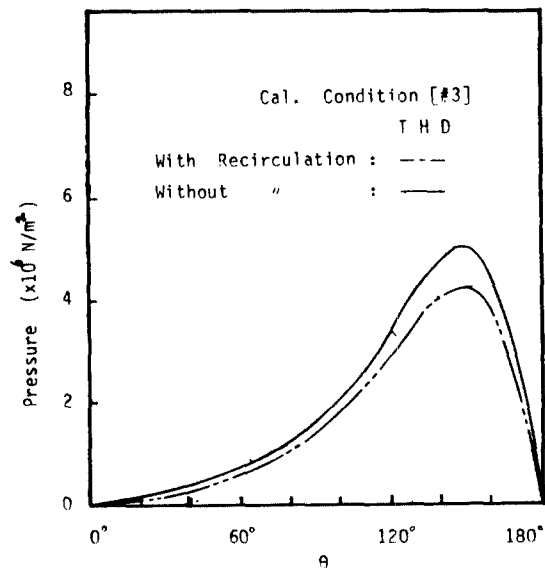


Fig. 10. Pressure distribution

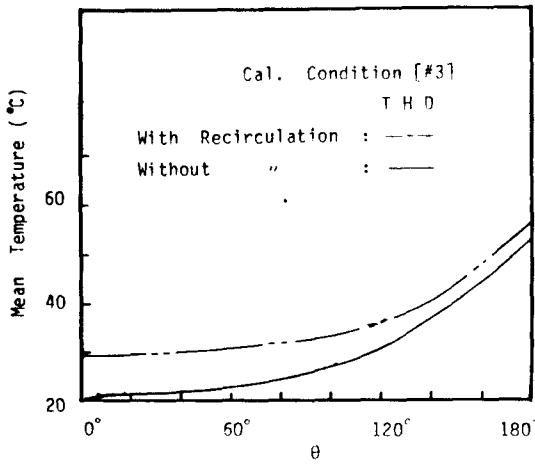


Fig. 11. Mean temperature in the circumferential direction of a bearing.

#### 4. 결 론

난류상태로 운전되는 저어널베어링에서의 THD 해석으로 축 방향의 흐름을 고려한  $k-\epsilon$  모델에 의한 방법을 제시하였다.

THD 해석에서 압력분포 및 부하능력은 같은 편심윤에 대하여 급유온도를 기준한 등점도이론에 의한 해석에서 보다 낮아졌고, 속도 및 압력형상의 차이를 볼 수 있었다.

저어널베어링내에서의 온도분포특성은 원주방향의 급유에 관한 경계조건에 따라 크게 변화하였다.

#### 참 고 문 헌

1. Wilcock, D. F., "Turbulence in High Speed Journal Bearings," Transactions of ASME, Vol. 72, pp. 825 - 834, 1950
2. Pinkus, O., "Anisothermal Fluid Films in Tribology," Israel J. of Technology, Vol. 22, pp. 120 - 141, 1984/5
3. Bowen, E. R. and Medwell, J. O., "A Thermo-hydrodynamic Analysis of Journal Bearings Operating Under Turbulent Conditions," Wear, Vol. 51, pp. 345 - 353, 1978
4. Suganami, T. and Szeri, A. Z., "A Thermo-hydrodynamic Analysis of Journal Bearings," ASME J. of Lubrication Technology, Vol. 101, pp. 21 - 27, 1979.
5. Di Pasquantonio, F. and Sala, R., "Influence of the Thermal Field on the Resistance Law in the Turbulent Bearing Lubrication Theory," ASME J. of Tribology, Vol. 106, pp. 368 - 374, 1984
6. Jones, W. P. and Launder, B. E., "The Calculation of Low-Reynolds Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence," Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 1119 - 1130, 1973
7. Hassid, S. and Poreh, M., "A Turbulent Energy Dissipation Model for Flows with Drag Reduction," ASME J. of Fluids Engineering, Vol. 100, pp. 107 - 112, 1978.