

## 흙의 構成式 解説 (Ⅲ)

朴 炳 基\*  
 鄭 鎮 燮\*\*  
 李 汶 樹\*\*\*

### 2.4 彈·粘塑性體(Elastic/Viscoplastic body)

#### 1) 序 言

材料의 彈·粘塑性學動을 나타내는 構成關係는 오래 전부터 많은 研究가 始作되었다. 먼저 讀者들의 理解를 돕기 위하여 彈·粘塑性體와 粘·彈塑性體의 區別을 概略的으로 記述한다.<sup>1)</sup>

前者는 彈性域(即 降伏曲面內側)에서는 粘性變形率이 일어나지 않고 降伏 이후에서 粘塑性變形率이 일어나는 物質이며 이 때의 變形率速度는 다음 式으로 表現된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (2.20)$$

여기서,  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ : 變形率速度의 彈性成分

$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ : 變形率速度의 粘塑性成分

한편 後者는 彈性域에서부터 粘性變形率이 發生하고 降伏에 의하여 塑性變形率이 첨가發生하는 物質을 말하며 그 變形率速度는 아래와 같이 나타낸다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.21)$$

여기서,  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ : 變形率速度의 粘彈性成分

$\dot{\epsilon}_{ij}^p$ : 變形率速度의 塑性成分

一般的으로 材料는 彈·粘塑性이고 彈性域 및 塑性域에서 粘性特性을 보인다. 이와 같이 特性이 겹쳐 있으므로 彈·粘塑性體의 降伏條件을 規定한다는 것은 매우 困難하기 때문에 이를 구

별하지 않고 함께 취급하여 理論展開가 이루어지고 있으며 本文에서는 土質材料에의 適用을 考慮하여 超過應力 model과 流動曲率 model의 개념으로 나누어 이를 說明한다.

2) 超過應力 model(超過應力의 概念에 의한 彈·粘塑性理論)

金屬片의 單純引張狀態에서의 降伏應力은 變形率速度의 影響을 받는다는 것은 잘 알려진 事實이다. 이 分野의 研究中 Malvern<sup>2)</sup>이 提示한 構成式은 특히 重要하다. 즉, 材料가 加工硬化性이 있을 때 그 靜的應力變形率關係는  $\sigma^* = f(\dot{\epsilon})$ 로 表示되지만 動的應力은 다음과 같다.

$$\sigma = f(\dot{\epsilon}) + a \ln(1 + b\dot{\epsilon}^p) \quad (2.22)$$

$a, b$ 는 材料의 定數이다. 여기서 靜的 載荷 또는 應力(reference base stress)이란 載荷速度를 매우 느리게 가할 때의 應力狀態를 말하며 다시 이때 Strain rate를 增加시키면 動的 應力이 된다. 이 두 應力의 차이를 超過應力으로 定義한다. 따라서 振動이나 返復荷重과는 의미가 다르다. 式(2.22)를 塑性變形率速度  $\dot{\epsilon}^p$ 에 대하여 整理하면

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{b} \left\{ \exp\left(\frac{\sigma - f(\dot{\epsilon})}{a}\right) - 1 \right\} \quad (2.23)$$

式(2.23)은 塑性變形率速度가 超過應力( $\sigma - f(\dot{\epsilon})$ )의 函數, 즉 어떤 變形率量에 대한 動的應

\* 正會員, 全南大學校 工科大学 教授

\*\* 正會員, 圓光大學校 工科大学 副教授

\*\*\* 正會員, 全南大學校 農科大学 助教授

力과 靜的 降伏應力의 函數가 된다는 것을 뜻한다. 그러므로 式은 彈·粘塑性構成式의 一般의인 形式을 表現한다고 볼 수 있다. 즉,

$$E\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + \langle \phi(\dot{\sigma} - f(\epsilon)) \rangle \quad (2.24)$$

여기서,  $E$ : Young 係數

$$\langle \phi \rangle = \begin{cases} \phi(\dot{\sigma} - f(\epsilon)) & (\dot{\sigma} > f(\epsilon) \text{ 일 때}) \\ 0 & (\dot{\sigma} \leq f(\epsilon) \text{ 일 때}) \end{cases}$$

또한 非金屬分野에서는 Bingham<sup>3)</sup>의 降伏치의 概念을 使用한 粘塑性體法則의 定式化 이후 Hohenemser와 Prager<sup>4)</sup>는 위 Bingham體의 構成式에 von Mises의 降伏條件을 導入하여 一般應力狀態로 擴張하고 있다.

여기에 Perzyna<sup>5)</sup>는 應力空間에 靜的 降伏曲面과 動的 載荷曲面을 考慮하여 加工硬化性을 갖는 速度依存性塑性材料의 構成式을 一般應力狀態로 規定하였다. 즉 靜的 降伏函數는 다음 式으로 表現된다.

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}{}^{vp}) = \frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}{}^{vp})}{\kappa} - 1 \quad (2.25)$$

여기서,  $f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}{}^{vp})$ : 動的 載荷函數

$$\kappa = \kappa(W_{vp}) = \kappa \left( \int_0^{\epsilon_{kl}{}^{vp}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}{}^{vp} \right)$$

로 表現되며 硬化 parameter 임.

$W_{vp}$ : 粘塑性일.

여기서, 靜的降伏曲面  $F=0$ 은 應力空間에서 凸面性(Convexity)을 지니며 또 正則(Analytic: Continuously differentiable)이라고 假定한다면 構成式은 다음과 같이 表現된다.

단, 全變形率速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$ 는 彈性變形率速度  $\dot{\epsilon}_{ij}{}^e$ 와 粘塑性變形率速度  $\dot{\epsilon}_{ij}{}^{vp}$ 의 合으로 나타낸다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}{}^e + \dot{\epsilon}_{ij}{}^{vp} \quad (2.20) \text{ bis}$$

$$= \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{s}_{ij} \delta_{ij} + r^0 \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.26)$$

$$\text{여기서 } \langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} \phi(F) & (F > 0 \text{ 일 때}) \\ 0 & (F \leq 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

$s_{ij}$  = 軸差應力 Tensor

$G$  = 剪斷彈性係數

$\nu$  = Poisson 比

$r^0$  = 粘性係數

$\delta_{ij}$  = Kronecker's delta 이다.

函數  $\phi(F)$ 는 해당 材料의 實驗結果를 通하여

選擇·決定된다. 式 (2.26)의 右邊 第3項이 粘塑性變形率速度를 나타내고 있는데 다음과 같이 表現된다.

$$\epsilon_{ij}{}^{vp} = r \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.27)$$

여기서  $r (= r^0/k)$ 는 材料의 粘性係數이다. 이 式 (2.27)의 兩邊을 自乘하여 合하고,  $I_2{}^{vp} = \epsilon_{ij}{}^{vp} \epsilon_{ij}{}^{vp} / 2$ 로 表記하면 다음 式이 求해진다.

$$(I_2{}^{vp})^{1/2} = r \langle \phi(F) \rangle \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

式 (2.25)와 (2.28)로부터,

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}{}^{vp}) = \kappa (W_{vp})$$

$$\left\{ 1 + \phi^{-1} \left[ \frac{(I_2{}^{vp})^{1/2}}{r} \right] \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right) \right\}^{-1/2} \quad (2.29)$$

式은 動的 載荷函數를 陰函數로 表現한 것이다. 그런데 이와 같이 一般化하는데 2가지 事項을 留意할 必要가 있다. 첫째, 超過應力의 定義와 둘째, 粘塑性變形率速度,  $\dot{\epsilon}_{ij}{}^{vp}$ 의 方向이다. Perzyna의 model에서의 粘塑性變形率速度는 Fig. 2.8에서와 같이 動的 載荷曲面의 應力點 위에서 粘塑性變形率速度는 外向法線方向으로 일어난다고 假定한다(式 (2.27) 參照).

또 靜的降伏曲面  $F=0$ 은 式 (2.25)의 定數로부터 다음 式과 等價가 된다.

$$f = k \quad (2.30)$$

지금 靜的降伏曲面의 外側, 즉  $F > c$ 에서 載荷할 때 動的載荷曲面이  $f=c^*$ 로 주어지면 超過應力  $H$ 는 다음 式으로 定義된다고 가정한다.

$$H = c^* - \kappa \quad (2.31)$$

마지막으로 式 (2.25), (2.30) 및 (2.31)로부터 다음 式이 求해진다.

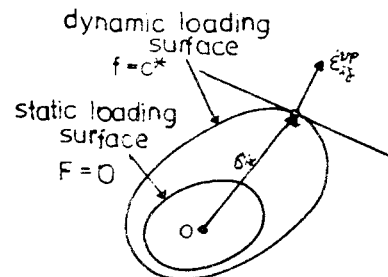


Fig. 2.8 The direction of Viscoplastic Strain in perzyna's model

$$H = \kappa \phi^{-1} \left[ \frac{(I_2^{vp})^{\frac{1}{2}}}{r} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (2.32)$$

한편 Phillips와 Wu<sup>6)</sup>는 前述의 基本的인 2 假定에 의한 Perzyna의 model과는 相異한 粘塑性 model을 提案하고 있다. 이 model은 Fig. 2.9에 나타낸 바와 같이 動的載荷曲面上的의 應力點 A에서 靜的降伏曲面에 그은 垂線과의 交點을 A'라 하면 超過應力, H는 그 垂線의 길이로서 定義한다. 즉

$$H = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_{ij} \quad (2.33)$$

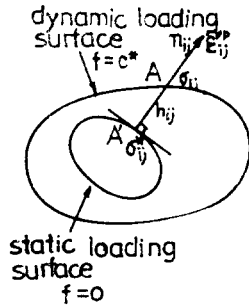


Fig. 2.9 Overstress and direction of viscoplastic strain rate in philips and Wu.

여기서  $n_{ij}$ 는 A'點에 있어서의 靜的降伏曲面的 單位法線 vector이고 다음 式으로 表現된다.

$$n_{ij} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}^*}}{\left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}^*} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}^*} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.34)$$

한편 粘塑性變形率速度的 方向을 A'點에서 靜的降伏曲面的 外向의 法線方向으로 假定하면 粘塑性變形率速度는 다음과 같다.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = r \langle \Phi(H) \rangle n_{ij} \quad (2.35)$$

Phillips와 Wu<sup>6)</sup>의 model에서는 Perzyna의 model 式(2.32)와 對應되는 다음 式으로 표현한다.

$$H = \phi^{-1} \left[ \frac{\sqrt{2}}{r} (I_2^{vp})^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.36)$$

여기서 注目할 점은 超過應力에 근거를 둔 model에서는 粘塑性變形率速度가 應力速度에 無關하며 더욱이 超過應力에 의하여 規定된 降伏條件은 存在하지만 載荷 및 除荷基準은 存在하지 않는다는 점이다. 이와 같은 事實은 超過應力에 의한 彈粘塑性理論에서는 非粘性(Inviscid)의 粘彈塑性理論을 特別한 경우로 생각하여 誘

導할 수 없다는 것을 의미하고 있다. 그러므로 超過應力 model은 오히려 creep力學에 있어서 creep potential理論에 가까운 理論構成을 이루고 있다고 할 수 있다.

3) 流動曲面 model(時間依存性을 갖는 內部變數를 使用한 彈粘塑性理論)

이 model은 彈塑性理論과 같은 理論構成 가운데서 粘性效果를 表現하는 內部變數나 時間依存性의 內部變數를 導入하여 時間과 같이 變하는 降伏曲面(載荷曲面)이라는 概念에 의하여 이루어져 있다. 이와 같은 曲面을 流動曲面(Flow surface)이라고도 한다.

그러므로 本理論에서는 內部變數를 零으로 하면 非粘性의 彈塑性理論이 된다. Naghdi와 Murch<sup>7)</sup>는 彈粘塑性體의 降伏에 關하여 降伏函數의 凸面性(Convexity)이나 塑性變形率速度的 降伏曲面에 대한 垂直性을 Drucker의 彈·粘塑性體에 關한 假說에 의하여 考察하고 粘彈·塑性體의 構成理論을 展開했다.

또 Olzak와 Perzyna는 彈·粘塑性體理論을 提案하고 있는데 이 理論에 의한 流動曲面式은 다음과 같다.

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{vp}, \eta) = 0 \quad (2.37)$$

여기서  $\varepsilon_{ij}^{vp}$ 는 粘塑性變形率,  $\eta$ 는 Parameter로서 時間,  $t$ 의 函數, 그러므로  $f=0$ 으로 하여 粘塑性狀態가 規定되고 彈性變形率과 粘塑性變形率이 일어난다.  $f < 0$ 은 彈性狀態로서 彈性變形率만이 일어난다. 더욱 粘塑性變形率速度 vector의 方向은 流動曲面的 應力點에서 外向法線方向에 一致하고 있다. 즉,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.38)$$

여기서 A는 正의 Scalar parameter로서 다음 式으로 決定된다.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{vp}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad (2.39)$$

그러므로

$$A = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^{vp}}} \quad (2.40)$$

여기서

$$A = h \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.41)$$

라고 하면 식(2.38)은 다음과 같이表現된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = h \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.42)$$

또 載荷와 除荷의 判定은 다음 式에 의하여 可能하다.

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) < 0, f=0: \text{除荷} \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) = 0, f=0: \text{中立載荷} \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) > 0, f=0: \text{載荷} \end{aligned} \right\} (2.43)$$

이와 같이 粘塑性인 土의 載荷와 除荷의 判定은 이 粘性特性 때문에 非粘性的인 경우와는 다르다는 點을 注目해야 한다. 이 理論에서의 全變形率速度는 다음 式으로 求한다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (2.20) \text{ bis}$$

따라서 다음과 같은 最終的인 構成式이 얻어진다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + h \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \dot{\sigma}_{mn} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.44)$$

여기서  $H_{ijkl}$  은 彈性 matrix 이다.

4) 彈粘塑性構成式에 대한 應力-變形率增分關係의 matrix 表示

Sekiguchi<sup>8)</sup>는 正規壓密粘土의 彈粘塑性을 考慮하여 다음과 같은 構成式을 提案했다. 앞에서 언급한 바와 같이 彈粘塑性 model의 第1假定은 變形率速度 tensor,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ 를 彈性成分,  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 와 粘塑性成分,  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ 의 合으로 表示할 수 있다. 그리고 變形率速度 tensor의 粘塑性成分에 대하여는 粘塑性 potential 函數  $f$ 를 導入하여

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.38) \text{ bis}$$

또한 函數  $f$ 의 具體的인 形態는 正規壓密粘土의 2次壓縮指數 및 dilatancy의 時間依存性을 考慮한 體積變形率·有效應力·時間關係式에 근거를 두고 다음 式으로 表現된다.<sup>9)</sup>

$$f = \alpha \ln \left\{ 1 + \frac{v_0 \cdot t}{\alpha} \cdot \exp \left( \frac{v^p}{\alpha} \right) \right\} = v^p \quad (2.45)$$

여기서  $\alpha$ : 2次壓縮指數

$t$ : 經過時間

$v_0$ : 初期體積變形率速度 (Fig. 2.10 參照)

$v^{vp}$ : 體積變形率의 粘性成分

$v^p$ : 塑性體積變形率

로서 다음 式으로 定義된다.

$$v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) + D \left( \frac{q}{p} - \frac{q_0}{p_0} \right) \quad (2.46)$$

여기서,  $e_0$ : 初期空隙比

$p_0$ : 初期平均有效應力

$q_0$ : 初期有效偏差應力

$\lambda$ : 壓縮指數 ( $e - \ln p$ 에서의 기울기)

$\kappa$ : 膨潤指數

( $e - \ln p$ 에서 除荷 및 再載荷時의 기울기)

(Fig. 2.11 參照)

$D$ : dilatancy 係數로서 다음과 같다.

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{M(1 + e_0)} \quad (Fig. 2.12 參照) \quad (2.47)$$

여기서  $M$ 은 C·S·L (Critical State Line)의 기울기

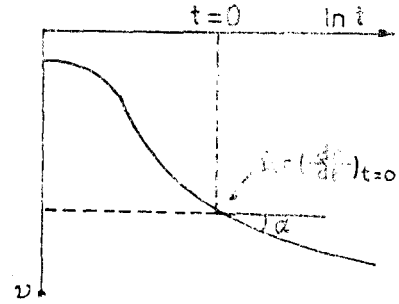


Fig. 2.10  $v - \ln t$  relation

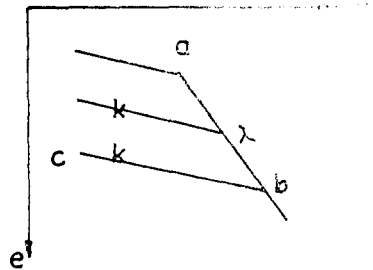


Fig. 2.11  $e - \ln p$  relation. (From Sekiguchi 1980)

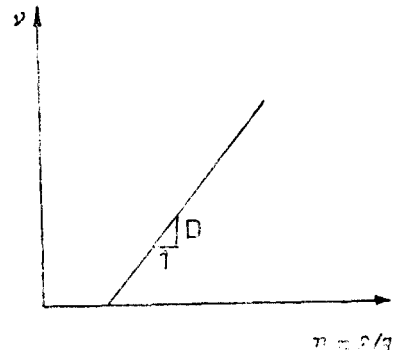


Fig. 2.12  $v - \gamma$  relation

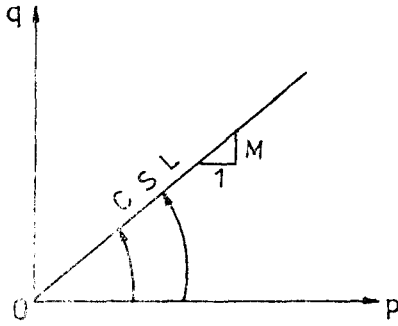


Fig. 2.13 Stress path

을기 (Fig. 2.13 參照)

式 (2.38)의 比例係數  $A$ 를 決定하기 위하여 精塑性流動의 連續條件으로서 다음 式을 導入한다.

$$\dot{f} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{v}^p \quad (2.48)$$

한편 變形率速度 tensor의 彈性成分과 有效應力 tensor 間에 等方的이고 線形關係를 假定한다면 應力速度 tensor  $\dot{\sigma}_{ij}$ 는 다음 式으로 表現된다.

$$\dot{\sigma}_{ij} = L \cdot \dot{v}^p \delta_{ij} + 2G \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (2.49 a)$$

$$= L \cdot (\dot{v} - \dot{v}^p) \delta_{ij} + 2G \cdot (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) \quad (2.49 b)$$

여기서  $L$  및  $G$ 는 Lamé 常數이며  $\delta_{ij}$ 는 單位 tensor 이다.

式(2.38)을 式(2.49 b)에 代入하여 求한 關係를 式(2.48)에 代入하여 演算을 하면 比例係數  $A$ 는 다음과 같다.

$$A = \frac{L \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \dot{v} + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial t}}{L \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (2.50)$$

따라서 應力 · 變形率 · 時間關係는 增分形式으로서 다음과 같이 求해진다. 즉, 精成式의 最終的인 表現은 式(2.38) 및 (2.50)을 式(2.49 b)에 代入하여

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= L \cdot \dot{v} \delta_{ij} + 2G \dot{\epsilon}_{ij} \\ &= \frac{\left( L \frac{\partial f}{\partial p} \dot{v} + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} \right)}{L \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^2} \\ &= \frac{\left( L \frac{\partial f}{\partial p} \dot{v} + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial t} \right)}{L \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (2.51) \end{aligned}$$

윗式을 실제로 使用할 때는 精塑性 potential

$f$ 의 有效應力成分 및 經過時間에 관한 偏微分係數의 具體的表現이 必要하기 때문에 이를 위해서 式(2.46)으로 定義되고 있는 函數,  $v^p$ 와 관련시키면 便利하다. 즉 간단한 演算後에 式(2.45)를 使用하여 經過時間,  $t$ 를 消去하면 위의 偏微分係數는 다음과 같이 된다.

$$-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{v^p}{\alpha}\right) \right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.52 a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{v}_0 \exp\left(\frac{v^p - v^{p^0}}{\alpha}\right) \quad (2.52 b)$$

또 偏微分係數  $\partial f / \partial p$ 에 대하여는 比例常數  $A$ 를 誘導하는 過程에서 이미 다음 式을 利用하였다는 것을 유의할 必要가 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} \quad (2.53)$$

여기서  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  및  $\sigma_{zz}$ 는 直交座標軸方向의 應力.

式 (2.51)~(2.53)을 軸對稱問題 및 2次元平面變形率問題에 適用할 수 있도록 具體的으로 表現한다면 다음 式이 된다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_r \\ \dot{\sigma}_z \\ \dot{\tau}_{rz} \\ \dot{\sigma}_\theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} L+2G & L & 0 & L \\ L & L+2G & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & L & 0 & L+2G \end{Bmatrix} \\ -C_5 \begin{Bmatrix} C_1^2 & C_1 \cdot C_2 & 2Gv^p & C_1 \cdot C_3 \\ C_1 \cdot C_2 & C_2^2 & 2Gv^p & C_2 \cdot C_3 \\ 2G \cdot v_{rz}^p \cdot C_1 & 2G \cdot v_{rz}^p \cdot C_2 & 4G^2 \cdot v^p & 2G \cdot v_{rz}^p \cdot C_3 \\ C_1 \cdot C_3 & C_2 \cdot C_3 & 2G \cdot v_{rz}^p \cdot C_3 & C_3^2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{rz} \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{Bmatrix} &= \frac{C_6}{C_4} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 2G \cdot v_{rz}^p \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (2.54) \end{aligned}$$

단, 윗式에서 使用한 記號는 다음과 같다.

$$v_{rz}^p = \frac{\partial v^p}{\partial \tau_{rz}} \quad (2.55)$$

$$C_1 = \frac{L \partial v^p}{\partial p} + 2G \frac{\partial v^p}{\partial \sigma_r} \quad (2.56)$$

$$C_2 = L \frac{\partial v^p}{\partial p} + 2G \frac{\partial v^p}{\partial \sigma_z} \quad (2.57)$$

$$C_3 = L \frac{\partial v^p}{\partial p} + 2G \frac{\partial v^p}{\partial \sigma_\theta} \quad (2.58)$$

$$C_4 = L \left( \frac{\partial v^p}{\partial p} \right)^2 + 2G \left\{ \left( \frac{\partial v^p}{\partial \sigma_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^p}{\partial \sigma_z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^p}{\partial \sigma_\theta} \right)^2 \right\} + 2 \left( \frac{\partial v^p}{\partial \tau_{rz}} \right)^2 \cdot C_5 + \frac{\partial v^p}{\partial p} \quad (2.59)$$

$$C_5 = 1 - \exp\left(-\frac{v^{vp}}{\alpha}\right) \quad (2.60)$$

$$C_6 = \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{v}_0 \exp\left(\frac{v^p - v^{vp}}{\alpha}\right) \quad (2.61)$$

단, 函數  $v^p$  의 有效應力成分에 관한 偏微分係數는 다음과 같다.

$$\frac{\partial v^p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{D}{3p} \left\{ \frac{\lambda - \kappa}{D(1+e_0)} - \frac{q}{p} \right\} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{D}{p} \frac{s_{ij}}{q} \quad (2.62)$$

여기서  $s_{ij}$  는  $\sigma_{ij} - p\delta_{ij}$  이다.

$$\frac{\partial v^p}{\partial p} = \frac{D}{p} \left\{ \frac{\lambda - \kappa}{D(1+e_0)} - \frac{q}{p} \right\} \quad (2.63)$$

또 Lamé 常數  $L$  과  $G$  에 대하여는 從來부터의 試驗結果를 參考로 하여 다음 式에 따라 變動하는 土質常數로 생각한다.

$$L = \frac{D(1+e_0)}{\kappa} - \frac{2}{3} G \quad (2.64)$$

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{e - e_0}{\lambda}\right) \quad (2.65)$$

여기서  $G_0$  는 初期剛性率이다. 彈·粘塑性構成式(2.54)의 特別한 경우, 즉 粘土의 creep 特性을 無視할 때는 2次壓縮指數,  $\alpha=0$  및  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  으로 解析하여  $C_5=1$  및  $C_6=0$  으로 하면 式(2.54)는 彈塑性構成式으로 된다. 이 경우 式(2.46)으로 定義했던 函數  $v^p$  는 original Cam-clay model 에서는 塑性 Potential 函數와 等價가 된다. 또  $v^p = v^{vp}$  라는 關係式이 성립되면 等方硬化降伏條件을 나타내게 된다. 다시 彈性狀態의 構成式을 求하기 위해서는  $v^{vp}=0$  및  $\partial f/\partial t=0$  이므로  $C_5=0$  및  $C_6=0$  이 되어 표현된다.

參考: 本 講座를 譯어 나가는데 처음 構想은 第 II 部에서 破壞規準을 포함하고자 하였으나 그 量이 너무 방대하고 오히려 塑性論의 基礎로서 많은 文獻에 詳述되어 있으므로 紙面關係上 本 講座에서는 除外하였으며 最近 그 重要性 및 實用性이 漸增되고 있는 彈·粘塑性理論을 追加하였음을 添言한다. 또한 各 model 을 敘述하는데 있어서 처음 提案者들이 나뉠대로의 記號를 使用하였기 때문에 全體적으로 統一을 기하기 어려워 原文의 記號를 대체적으로 使用하였으며 必要할 때마다 說明을 가한다.

### 3. 代表的인 土質構成式의 解說

#### 3.1 序 言

지금까지 많은 構成式이 提案되어 왔으나, 이들을 크게 變形理論(Deformation theory), 增分理論(Incremental theory), 完全塑性增分(Perfect and incremental plasticity) 및 엔도크로닉理論(Endochronic theory)으로 分類하고 있다.<sup>10)</sup> 이들을 간단하게 記述한 다음 代表的인 各 model 을 설명하고 이들의 長短點 및 이들 構成 model 을 適用하는데 必要한 사항을 설명한다.

##### 1) 變形理論

變形理論은 應力 tensor 와 變形率 tensor 間에 一定한 關係式이 存在한다고 假定하는 理論이며 이 關係式은 一般的으로 다음 式으로 나타낸다.

$$s_{ij} = 2G(\sigma, \epsilon) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{kk} = 3K(\sigma, \epsilon) \epsilon_{kk} \quad (3.2)$$

여기서  $s_{ij}$  와  $e_{ij}$  는 各各  $\sigma_{ij}$  와  $\epsilon_{ij}$  의 偏差成分이며  $G$  와  $K$  는 割線剪斷係數 및 全體積彈性係數이다. 윗式은 等方性材料에 대하여 適用되며 係數는 非線型舉動을 表現하기 위하여 應力과 變形率에 따라 決定할 수 있도록 되어 있다. 또 等方性 때문에 應力과 變形率 tensor 의 不變量으로 表現할 수 있다. 超彈性(Hyperelasticity)<sup>11)</sup> 이 여기에 屬한다.

##### 2) 增分理論

增分理論은 應力과 變形率增분이 常數이거나 또는 應力-變形率狀態에 따라 變하는 係數로 구성된다. 특히 亞彈性(Hypoelasticity)<sup>12)</sup>은 다음과 같은 式으로 表現되는 增分理論이다.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\sigma, \epsilon) d\epsilon_{kl} \quad (3.3)$$

또는

$$d\epsilon_{ij} = D_{ijkl}(\sigma, \epsilon) d\sigma_{kl} \quad (3.4)$$

여기서  $C_{ijkl}$  및  $D_{ijkl}$  은 各各 接線剛性 및 適應 tensor 이다. 그러나  $C$  및  $D$  가 應力과 變形率狀態에만 依存하고 이들 履歷에는 無關하며, 이 理論은 除荷舉動을 나타낼 수 없기 때문에 土質에의 適用性이 弱하다.

##### 3) 完全塑性增分理論

塑性增分으로부터 式(3.3) 및 (3.4)에 類似한 關係式이 求해진다. 이 경우 函數,  $C_{ijkl}$  혹은

$D_{ijkl}$ 이 변형률履歴에 의존하는 potential 函數로부터 誘導되기 때문에 매우 複雜하다. 學者들 간에는 이 增分을 亞彈性(Hypoelectricity)의 特別한 경우로 分類하기도 하지만 이들 간의 同質性은 엄격히 따져 인정하기 어렵다. 土質에 適用되는 塑性增分은 다음과 같은 基本的 原理가 包含되어 있다.

(1) 變形率增分,  $d\varepsilon_{ij}$ 는 彈性成分,  $d\varepsilon_{ij}^e$ 와 塑性成分,  $d\varepsilon_{ij}^p$ 의 和로 나타낸다.

(2) 彈性變形率成分은 다음과 같은 式으로 計算된다.

$$d\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl} d\sigma_{ij} \quad (3.5)$$

여기서  $C_{ijkl}$ 은 彈性構成 tensor

(3) 어떤 應力狀態에서 彈性的으로 회복할 수 있는 狀態境界를 나타내는 降伏面  $f(\sigma_{ij}, H) = 0$ 가 存在한다.

(4) 應力狀態가 降伏面に 이르게 될 때 塑性變形率增分은 다음 式과 같다(塑性 Potential 函數는  $g(\sigma_{ij}, H^*)$ 로 定義된다).

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.6)$$

여기서  $\lambda$ 는 scalar 乘數이며 이 값을 求하는 데는 위의 (1)~(4)와 適合方程式(Consistency relation)을 利用한다. 塑性增分論을 記述하는데 降伏函數,  $f$ 와 塑性 potential  $g$ 는 硬化 parameter 인  $H$ 와  $H^*$ 에 依存하며 이들 Parameter 는 塑性應力履歴에 관계된다. 만일  $f$  및  $g$ 가  $H$  및  $H^*$ 에 無關하게 되면 理想的인 塑性이 된다.

(5) 適應條件, 즉  $df=0$ 은 應力狀態가 降伏面의 擴張을 따르게 되고 降伏面을 이탈하지 않는다는 조건이다.

(6) 變形率硬化 또는 加工硬化材料는 어떤 硬化則을 따라야 한다. 즉 塑性變形率增分을 考慮한 式(3-6)은 流動則(本講座 II 部 2.3 節 參照)을 따를 것이며 이는 關聯流動則과 非關聯流動則으로 細分된다. 언급한 바와 같이 Drucker 等の 創意的인 業績에 힘입어 여러 가지 硬化塑性理論이 土質의 壓密과 降伏舉動을 表現하기 위하여 研究되어 왔는데 이들 構成式의 基本的인 差異點은 降伏面의 記述 차이와 硬化 Parameter  $H$ 가 降伏函數에 어떻게 結合되는가의 方法 차이이다. 예로서 等方便化塑性 model은 Cam-

clay model, Weidlinger의 Cap-model 및 Lade model에서 보이는 바와 같이 主應力空間에 靜水壓軸을 중심으로 等方的으로 擴張 혹은 收縮되는 降伏面을 정의하고 있고, 한편 Prevost와 Mroz 등이 例示한 非等方便化 model은 降伏이 定義되는 應力空間에서 降伏面의 移動은 물론 擴張되는 一連의 塑性硬化係數場(Nesting yield surface)理論을 전개하고 있다.

#### 4) Endochronic 理論

最近에 또 다른 試圖가 固有時間概念에 근거를 두고 재료의 非粘性舉動을 표현하도록 제안되고 있다. 固有時間概念이란 非減小의 Scalar 變數를 의미하며 時間과 無關한 非粘性材料에 대한 軸差變形率空間에서 取한 徑路距離와 같은 것이라고 정의하고 있다.<sup>5)6)</sup>

이와 같은 endochronic 理論은 降伏面을 包含하지 않으며 材料의 非彈性舉動은 體積膨脹뿐만 아니라 變形率硬化, 軟化舉動을 나타내는 實驗的인 表現이 필요하다. 이와 같은 實驗的인 表現은 利用 가능한 資料의 數量에 따라 꽤 높은 精度의 計算이 가능하다고 한다.

다음에는 몇 개의 대표적 model을 選定하여 論述하고 長短點을 살핀 다음 이들 model을 檢證하는데 實驗室에서 求한 土質試驗資料를 分析하는 方法을 檢討하기로 한다.

### 3.2 Cam-clay Model과 修正 Cam-clay Model

#### 1) 概 要

1950年 後半부터 1960年初에 이르는 동안 粘性土의 構成式에 關하여 基本이 되는 先驅的인 研究中の 하나가 Cambridge大學의 Roscoe, Schofield 등<sup>13)</sup>에 의하여 巨視的인 方法에 立脚, 限界狀態概念을 導入하여 Cam-clay model을 提案하게 되었다.<sup>9)</sup>

#### 2) 限界狀態概念

荷重을 받고 있는 흙이 剪斷破壞에 이르면 主應力비가 一定한 값이 되며 그때 有效應力과 體積의 變化없이 無限한 剪斷變形만 일어난다고 본다. 이와 같은 狀態를 限界狀態라고 하며 限界狀態에서는 이 條件을 다음과 같은 式으로 表現한다.

$$dq = dp = dv = 0 \quad (3.7)$$

$$d\varepsilon \gg 0 \quad (3.8)$$

여기서  $dv$ 는 體積變形率增分 Roscoe 등<sup>13)</sup>은 限界狀態에 있어서 飽和粘土의 應力狀態를  $p, q, e$ 를 直交軸으로 하는 狀態空間(state space)에 나타냈다. 飽和粘土이므로 空隙比  $e$  대신 含水量  $w$ 를 使用하고, 含水量가 흙要素에 作用하는 應力の 唯一한 函數로 表現할 수 있다면  $w = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 로 되며 또 흙을 等方體로 假定하면 다음과 같은 式을 求할 수 있다고 본 것이다.

$$w = F(I_1, I_2, I_3) \quad (3.9)$$

윗式은 函數  $F$ 가  $(w, I_1, I_2, I_3)$ 의 4次元空間에서 唯一한 面을 갖는다는 表現式이다. 여기서  $I_1, I_2, I_3$ 는 各各 第一, 第二, 第三應力不變量이다. Roscoe, Scheffield와 Wroth 등은  $I_3$ 를 除外하고 軸差應力 tensor의 二次不變量  $I_1, I_2$  대신  $p = I_1/3$ 와  $q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{3}I_2$ 로 바꾸어 式(3.9)를 다음과 같이 表現하였다.

$$w = f(p, q) \quad (3.10)$$

또  $w$  대신 空隙比  $e$ 를 使用하면

$$e = f(p, q) \quad (3.11)$$

여기서  $f$ 는 흙의 性質에 따르는 唯一한 函數이며  $(p, q, e)$ 의 3次元空間에서 하나의 曲面을 表示한다. Fig. 3.1에 나타낸 바와 같이  $p \cdot q \cdot e$  空間上의 어떤 點은 언제나 變數,  $p, q, e$ 에 의해서 그 應力狀態를 定義할 수 있기 때문에 이와 같은 點을 狀態點(state point)이라고 부른다.

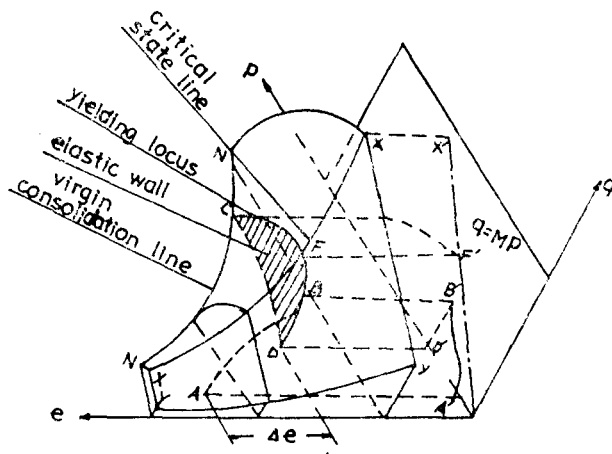


Fig. 3.1. Isometric view of the state boundary surface for clay (From Roscoe et al 1963)

이 空間에서  $AB$ 와 같은 어떤 曲線을 狀態徑路(state path)라 하여 이것을  $p, q$  面に 投影한  $A'B'$ 은 應力徑路(stress path)라 한다. 흙이 限界狀態에 到達하면 모든 應力徑路는 限界狀態線(critical state line (C.S.L))에 收斂하게 된다.

또 境界面  $NXXX$ (Roscoe 面)와  $XXYY$ (Hvorslev 面) 및  $q=0$  面으로 둘러싸인 空間을 狀態領域(state region)이라고 하며 正規壓密粘土의 狀態點은 Roscoe 面 위에서만 存在하며 이 때는 흙이 彈塑性舉動을 한다.

또 Fig. 3.1 에서는 膨潤曲線(swelling line),  $CD$  위에 세운 鉛直面이 狀態境界面을 限界로 하여 이루어진 平面을 彈性壁(elastic wall)이라 하고, 특히 Roscoe 面과의 交線을 降伏軌跡(Yield locus)이라고 하며 흙의 彈性舉動은 이 範圍에서만 일어난다고 假定한 것이다.

또  $e$ 가 一定한 平面이 Roscoe 面과 만나는 狀態徑路를  $p, q$  面に 投影하면 非排水應力徑路(undrained stress path)를 求할 수 있다. 그러므로 흙의 應力狀態는 이 狀態領域內에 存在하고 이 領域內에서 흙의 모든 舉動을 說明할 수가 있다고 본 것이다. 이제 이와 같은 觀點에서 처음에 Cam-clay model 을 다음에 修正 Cam-clay model 을 살펴본다.

### 3) Cam-clay model

壓密實驗結果를 Fig. 3.2 에서와 같이  $(e - \ln p)$  平面에서 正規等方壓密曲線과 除荷-再壓密曲線을 直線으로 模式化하고 모든 再壓密曲線은 서

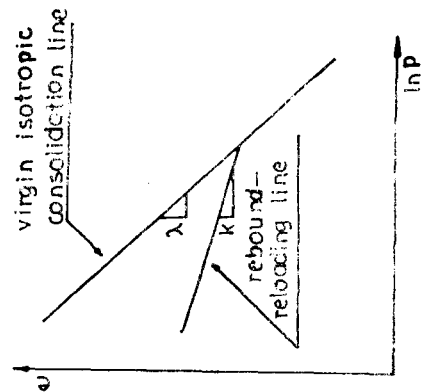


Fig. 3.2. Response of idealized soil to hydrostatic stress



로 平行하다고 假定한다. 그러면 正規等方壓密 曲線式은 다음과 같이 表現된다.

$$e_1 = N - \lambda \ln p \quad (3.12)$$

여기서  $N$ 과  $\lambda$ 는 土質常數이다. 一般的인 除荷-再壓密曲線은 다음과 같다.

$$e_2 = e_k - k \ln p \quad (3.13)$$

여기서  $k$ 는 土質常數이며, 이들 式(3.12)와 (3.13)을 利用하여 彈性舉動과 塑性舉動의 分離를 생각한다. 除荷曲線은 事實上 材料의 膨脹을 의미하므로 이를 膨潤曲線이라고 부르며, Schofield 等은 膨潤曲線上에서는 彈性變形만 일어난다고 假定하여  $p \cdot q \cdot e$  空間에서 膨潤曲線 위에 세운 鉛直面과 Roscoe 面과의 交線을 降伏軌跡 (yield locus)이라고 한다. 다시 말하면 降伏曲線과 膨潤曲線에 둘러싸인 壁中에서는 彈性變形만 생긴다.

이상과 같은 基本事項 아래 다음과 같은 條件을 갖춘 것이 Cam-clay model이다.

- i) 體積變形率增分  $dv$ 는 一部 回復可能하고 剪斷變形率增分  $d\varepsilon$ 은 回復不可能하다.
- ii) 剪斷中에 所要되는 energy는 모두 摩擦로서 消費된다.
- iii) 降伏曲面은 塑性 potential 面으로 한다. 이는 變形率增分 vector가 降伏面に 直交한다는 것이다.

이것을 다시 數式化하면 다음과 같이 表現된다.

$$\delta v = \delta v^e + \delta v^p : \delta \varepsilon = \delta \varepsilon^p \quad (3.14)$$

$$p \cdot \delta v^p + p \cdot \delta \varepsilon^p = Mp \delta \varepsilon^p \quad (3.15)$$

$$\delta \varepsilon^e / \delta v^e = -1 / \frac{dq}{dp} \quad (3.16)$$

그런데 限界狀態에서는  $\delta v^p = 0$ 이므로 式(3.15)에서  $q = Mp$ 이고  $M$ 은 限界狀態線의 기울기이다. 限界狀態에서는 흙이 摩擦流體와 같다고 본다. 따라서  $M$ 은 摩擦係數와 같은 概念으로 理解할 수 있다. 式(3.16)에서  $\delta v^p = 0$ 이면  $dq/dp = 0$ 이므로 CSL과 降伏曲面이 交叉하는 곳에서는 接線의 기울기가 0이다.

式(3.15) 및 (3.16)에서

$$dq/dp = -\delta v^p / \delta \varepsilon^p = -\left(M - \frac{q}{p}\right) \quad (3.17)$$

다시 Fig. 3.1에서 點,  $F$ 에서의  $P$ 軸값을  $P_F$

라 하면 式을 積分하여 다음 式을 얻는다.

$$q/Mp + \ln(p/P_F) = I \quad (3.18)$$

式(3.18)이 降伏曲面의 數學的 表現이다. 또 式(3.13)으로부터 다음과 같이 膨潤曲線의 一般的 表現式을 얻을 수 있다.

$$e = e_k - k \ln p \quad (3.19)$$

이제 임의의 膨潤曲線 위에 세운 鉛直曲面, 卽 彈性壁과 CSL과의 交點  $F$ 에 있어서의 空隙比를  $e_x$ 라 하면 다음 式으로 구한다.

$$e_x = e_k - k \ln p_x \quad (3.20)$$

여기서  $e_k$ 는 膨潤曲線上的  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ 일 때의  $e$ 값이다.

한편 CSL에서  $q = Mp$ 로 表示되고  $p_x$  및  $e_x$ 는 이 위에 있으므로 다음과 같다.

$$e_x = r + \lambda \ln p_x \quad (3.21)$$

여기서  $r$ 는 正規壓密曲線上에서  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ 일 때의  $e$ 값이다.

式(3.18), (3.19) 및 (3.21)에서  $e_x, e_k$ 를 消去하여 降伏曲線式에 代入하면 降伏曲線을 連結하는 Roscoe 面의 表現式은 다음과 같다.

$$q = \frac{Mp}{\lambda - k} (r + \lambda - k - e - \lambda \ln p) \quad (3.22)$$

以上에서 Cam-clay model의 狀態面에서의 數學的 表現을 살펴 보았다.

有效應力徑路를 使用하여 壓密狀況에 따라 變化되는 剪斷應力の 變化 및 空隙比의 變化를 觀察할 수 있는 空間應力座標의 表現方式은 매우 合理的이고 이 降伏軌跡을 境界로 하여 彈性舉動의 領域과 塑性舉動의 領域이 區分되고 이를 數式的 表現이 可能하여짐에 따라 截荷에 의한 粘土層의 力學的 舉動을 必要한 精度로 豫測이 可能하다. 이 외에도 이 model에 使用되는 各種定數 및 變數는 從前의 壓密이나 三軸試驗資料가 그대로 使用된다는 것이 큰 利點이라고 볼 수 있다.

#### 4) 修正 Cam-clay model

앞에서 說明한 Cam-clay model 成立의 過程에 있어서는 粘土의 變形過程에 消費되는 energy  $dw$ 의 推定은 塑性體積變形率增分  $dv^p$ 와 剪斷變形率增分  $d\varepsilon^p$ 의 2個項의 總으로 表現된다.

$$dw = p dv^p + q d\varepsilon^p \quad (3.23)$$

그런데 限界狀態에서는  $q/p = M$ 이므로,

$$dw = p dv^p + M p d\epsilon^p \quad (3.24)$$

또한 限界狀態에서는 剪斷變形만 있으므로  $p dv^p = 0$ , 그러므로 式(3.24)는 다음과 같다.

$$dw = M p d\epsilon^p \quad (3.25)$$

그런데 이 式에서 粘土가 剪斷變形하는 동안에 消費되는 energy는 體積變形率에 依存하지 않는다는 것이다. 이 假定은 Rowe,<sup>14)</sup> Barden, Lee, Burland<sup>15)</sup> Palmer 등이 指適한 바와 같이 直感的으로 理解되지 않는다. 그리하여 修正 Cam-clay model의 理論은 처음으로 Burland<sup>15)</sup>에 의해서 다른 方程式으로 推定된 消費 energy의 假定으로부터 出發하여 Cambridge 研究陣에 의하여 提案되었다.

$$dw = p \cdot \sqrt{(dv^p)^2 + (M d\epsilon^p)^2} \quad (3.26)$$

式(3.26)에 의하면 消費 energy는 塑性體積變形率과 塑性剪斷變形率에 함께 影響을 주고 있다. 따라서 Cam-clay model 보다 修正 Cam-clay model이 더 合理的이라고 할 수 있다. 지금 式(3.23)과 (3.26)를 聯立하여 풀면 다음 式이 求해진다.

$$\frac{dv^p}{d\epsilon^p} = \frac{M^2 - (q/p)^2}{2(q/p)} \quad (3.27)$$

式(3.26) 및 (3.27)은 Cam-clay model에서 式(3.25) 및  $\frac{dv^p}{d\epsilon^p} = M - q/p$ 에 對應하는 式이며 式(3.27)에 流動則을 適用하고 積分하여 다음과 같은 降伏軌跡方程式을 求한다.

$$p \left\{ \frac{(q/p)^2 + M^2}{M^2} \right\} - p_y = 0 \quad (3.28)$$

여기서  $p_y$ 는  $p \cdot q$ 面에서 等方壓密曲線과 降伏軌跡의 交叉點의  $p$ 값이다.

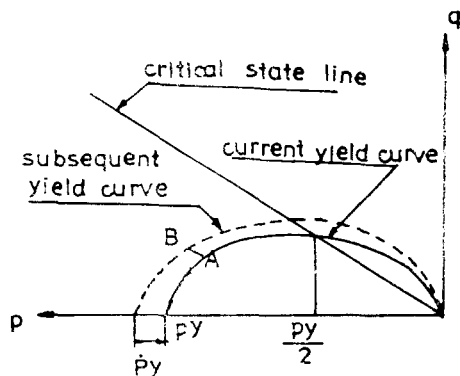


Fig. 3.3. Modified cam-clay yield curves (From Roscoe & Burland 1963)

그런데 式(3.28)은  $p \cdot q$ 面에서  $\frac{p_y}{2}$ 를 中心으로 하는 橢圓式이다. Fig. 3.3을 參照하면서 式(3.28)과 等方壓密曲線 및 膨潤曲線의 式을 結合하여 降伏狀態面의 表現式을 다음과 같이 求한다.

$$p_c = p \left\{ \frac{(q/p)^2 + M^2}{M^2} \right\} (1 - k/\lambda) \quad (3.29)$$

式(3.27)과 (3.29)는 粘土가 降伏하는 동안의 應力變形率舉動을 完全하게 定義하는 表現式이다. 또 降伏軌跡  $F(p, q, M) = 0$ 은 다음과 같이 나타낸다.

$$F = q^2 - M^2 p_0 p + M^2 p^2 = 0 \quad (3.30)$$

여기서  $q = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{3 J_{2D}}$

$$p = \frac{J_1}{3} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$$

$$J_{2D} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \text{ 단 } s_{ij} \text{는 軸差應力 tensor}$$

降伏函數  $F$ 는  $p, q, v^p$ 의 函數이므로 全微分을 取하면 다음과 같다.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial v^p} dv^p = 0 \quad (3.31)$$

이것은  $dp$ 와  $dq$ 의 應力增분에 의하여  $dv^p$ 라는 塑性體積變形率이 發生할 때 加工硬化(work hardening)되어 應力狀態가 後續의 降伏曲面에 到達하는 것을 의미하고 있다. 또 彈性 matrix  $D^e$ 에 의한 應力增분과 彈性變形率의 關係式은 다음과 같다.

$$d\sigma_{ij} = D^e d\epsilon_{ij}^e \quad (3.32)$$

또 關聯流動則과 垂直條件에 따른 塑性變形率 vector 方向을 考慮한 式은 다음과 같다.

$$d\epsilon_{ij}^p = A A_{ij} \quad (3.33)$$

여기서  $A$ 는 比例係數이며 求하는 過程은 다음과 같다. 단,  $A_{ij} = \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \theta}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}$ 이며,  $\theta$ 는 塑性 potential이다.

또한 降伏函數下의 全微分은  $p, q$ 를 應力項  $\sigma_{ij}$ 로 바꾸어 다음 式으로도 表現된다.

$$dF = B_{ij} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial v^p} dv^p = 0, \quad B_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.34)$$

또  $d\epsilon_{ij}^e = d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^p$ 이므로 應力增분은 다음 式으로 表現된다.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (3.35)$$

여기서  $C_{ijkl}$ 은 components of elasticity for

solid phase 이다.

式(3.35)를 式(3.34)에 代入하면

$$dF = B_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) + \frac{\partial F}{\partial v^p} dv^p$$

$$= B_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - \lambda A_{kl}) + \frac{\partial F}{\partial v^p} \lambda \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad (3.36)$$

그런데  $\left( B_{ij} C_{ijkl} A_{kl} - \frac{\partial F}{\partial v^p} \frac{\partial F}{\partial p} \right) \lambda = B_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$ 로부터 다음 式을 얻는다.

$$\lambda = \frac{B_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{B_{ij} C_{ijkl} A_{kl} - \frac{\partial F}{\partial v^p} \frac{\partial F}{\partial p}} \quad (3.37)$$

式(3.35)에 式(3.33)과 (3.36)을 使用하여 다음 式을 求한다.

$$d\sigma_{ij} = d \left\{ C_{ijrs} - \frac{C_{ijkl} A_{kl} B_{mn} C_{mnrj}}{B_{mn} C_{mnrj} A_{rs} - \frac{\partial F}{\partial v^p} \frac{\partial F}{\partial p}} \right\} d\varepsilon_{rs} \quad (3.38)$$

關聯流動則이 適用되고 있는 塑性에서는  $\theta = F$ ,  $A_{ij} = B_{ij}$  이므로 Cam-clay model에 使用하는 다음 式으로부터  $\lambda$ 를 決定할 수 있다.

$$dv^p = \frac{k}{1+e_0} \frac{dp_0}{p_0} \quad (3.39)$$

$$dv = \frac{\lambda}{1+e_0} \frac{dp_0}{p_0} \quad (3.40)$$

$$dv^p = dv - dv^e = \frac{\lambda - k}{1+e_0} \frac{dp_0}{p_0} \quad (3.41)$$

또 式(3.41)을 變形하면 다음 式이 된다.

$$\frac{\partial p_0}{\partial v^p} = \frac{p_0(1+e_0)}{\lambda - k} \quad (3.42)$$

따라서 式(3.37)에 關聯流動則을 適用하면  $\lambda$ 를 다음 式으로 求한다.

$$\lambda = \frac{A_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{A_{ij} C_{ijkl} A_{kl} - r A_{ij}} \quad (3.43)$$

여기서  $r = \frac{\partial F}{\partial p_0} p_0 \frac{1+e_0}{1-k}$ 이며  $A_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial p}$ 이다.

### 5) 材料常數의 決定

Cam-clay model 및 修正 Cam-clay model에 必要한 4種의 材料定數는 在來의 三軸試驗에서 쉽게 그 값을 求할 수가 있다. 常數  $\lambda$ 와  $k$ 는 等方壓密試驗結果를  $e - \ln p$  면에 plot하여 求한 壓縮指數와 膨潤指數이다. 또 Young 係數  $E$ 와 剪斷係數  $G$ 는 다음 式으로 決定되며 體積變形係數  $K$ 도 求할 수 있다.

$$E = \frac{3p(1+e_0)(1-2\nu)}{K} \quad (3.44)$$

$$G = \frac{3(1-2\nu)p}{2(1+\nu)k} \quad (3.45)$$

$$K = \frac{p(1+e_0)}{k} \quad (3.46)$$

여기서  $\nu$ : Poisson 比이다.

또 摩擦係數의 性質을 지닌 係數  $M$ 은 極限荷重까지 三軸引張 또는 三軸壓縮試驗을 遂行하므로써 값을 求할 수 있다. 卽 限界間隙比(critical void ratio)에 到達할 때의 極限荷重에서의 比,  $q/p$ 가  $M$ 와 같다.

### 6) 兩 model의 長·短點

앞에서 記述한 形態의 修正 Cam-clay model은 軸對稱三軸壓縮荷重을 받을 때의 흙의 舉動을 表現하기 위하여 처음에 開發되었다. 그 후 三軸引張과 平面變形率荷重을 model化하기 위하여 Roscoe와 Burland가 擴張하였으며 精度가 높은 것으로 判斷되었다. 이 理論을 嚴密三軸荷重을 받는 경우까지 擴張하기 위해서는 剪斷應力  $q$ 를  $\sqrt{J_2^D}$ 로 置換해야 한다.  $J_2^D$ 는 軸差應力 tensor의 第二不變量이다.

또한 修正 Cam-clay model은 本來 正規壓密 혹은 약간 過壓密된 그리고 剪斷時에 體積이 減小하여 變形率硬化를 일으키는 濕潤粘土(wet clay)의 變形舉動을 위하여 開發된 것이므로 變形率軟化現象을 일으키는 큰 過壓密粘土에는 適用性이 좋지 않다. 즉, 過壓密粘土가 剪斷되는 동안 發生하는 재료의 異質性 때문에 理論과 實驗資料에 相關性이 희박한 結果가 나타난다. 그러나 이 model은 初期에 等方壓密을 經驗한 바 있는 粘土에는 精度가 높다. 한편  $K_0$  壓密履歴을 갖는 경우는  $P$ 軸보다는  $K_0$ 線 위에 中心을 갖는 降伏軌跡을 보이는 경우가 있다. 이러한 舉動은 非等方便化 model에 比하지 않으면 안 된다.

### 參 考 文 獻

1. 日本土質工學會, 土의 構成式入門, 土と基礎, Vol. 31, No. 11, pp. 71~73, 1983.
2. Malvern, L.E., The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of metal exhibiting a Strain-rate effect, J. Appl. Vol. 18, pp. 203~208.

3. Bingham, E.C., Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York, 1922.
4. Hohenemser, K. and Prager, W., Über die Ansätze der Mechanik isotropor Kontinua, ZAMM, Vol. 12, pp.216~226, 1932.
5. Perzyna, P., Fundamental Problems in Viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, pp.243~377, 1966.
6. Phillips, A. and H.-C. Wu, A theory of Viscoplasticity, Int. J. Solids Structures, Vol. 9, pp.15~30, 1973.
7. Naghdi, P.M. and S.A. Murch, on the mechanical behavior of Viscoelastic Plastic Solids, J. Appl. Mech, Vol. 30, pp.321~328, 1963.
8. 關口秀雄・柴田 徹, 盛土基礎の側方流動解析上の問題點. 土と基礎 Vol. 30, No. 5, pp.47~54, 1980.
9. 李汝樹, 有限要素法에 의한 多次元壓密의 變形解析, 高麗大學院, 博士學位論文, pp.46~53, 1984.
10. Ko, H.Y. and Sture, S. Laboratory Shear Strength of Soil, American Society for testing and materials, STP 740, pp.329~385, 1980.
11. Masson, R.M. and Ko. H.Y., in Proceeding, Second interational Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg, Va., June pp.294~305, 1976.
12. Desai, C.S. and Siriwardane, H.J., Constitutive laws for engineering materials, Prentice-Hall, pp.136~168, 1984.
13. Roscoe, K.H. and Schofield, A.N., Mechanical behavior of an idealized 'wet' Clay, Proc. 2nd European Conf. Soil Mech. Wiebaden, Vol. 1, pp.47~54, 1963.
14. Rowe, P.W., Measurement of Coefficient of the Consolidation of lacustrine clay, Geotechnique, pp.107~117, 1959.
15. Burland, J.B., The yielding dilation of clay, Geotechnique, Vol. 15, pp.211~214, 1965.