

이 논문은 1986년도 문교부 학술연구  
조성비에 의하여 연구되었음.

## 船舶의 波浪中 耐航性能評價에 관한 研究

金 順 甲\*

### The Evaluation of Seakeeping Performance of a Ship in Waves

Soon-Kap Kim

< 目 次 >

Abstract	4. 耐航性信賴度와 評價值
1. 緒 論	4.1 耐航性信賴度
2. 耐航性要素와 그 相關關係	4.2 耐航性能의 評價值
2.1 耐航性要素와 그 分散值	5. 數值計算의 條件
2.2 耐航性要素의 相關關係	6. 結 論
3. 耐航性要素의 시스템적인 結合과 그 危險度	參考文獻
3.1 耐航性要素의 시스템적인 結合	附 錄 I : 多次元 Rayleigh 分布函數의 近似式
3.2 耐航性要素의 評價值, 危險度와 相對危險度	附 錄 II

### Abstract

In this paper, a synthetic method for evaluating the seakeeping performance of a ship in waves is studied.

For the prediction and evaluation of irregular phenomena to be correlated each other, the multi-dimensional Rayleigh's joint probability density function and the cumulative distribution function are approximated.

According to this approximated function, it is able to calculate easily the occurrence probability of the factors on seakeeping performance.

We proposed an evaluation method and an index to be defined by the seakeeping performance reliability, that is considered as the dangerousness and the relative dangerousness of the factors on seakeeping performance in waves.

The use of this method and index will be effective to install the sensors which are necessary to evaluate the states of ships at sea.

Some examples of the calculations by this method for 175 m length single screw container ship equipped with diesel engine are also presented.

\* 正會員, 韓國海洋大學

## 1. 緒 論

未來를 指向하는 造船技術의 重要한 課題로서 高信賴度 知能化船의 研究開發이 強調되고 있다. 이것은 높은 安全性和 信賴性을 가지고, 보다 經濟的인 海上輸送을 遂行할 수 있는 自動化船을 開發하는 課題이다.

最近, 電子工學, 宇宙·通信技術, 시스템·制御技術등, 關聯產業의 急速한 發展에 의하여 技術的으로는 그것이 可能해지게 되었다고 생각된다.

이와 같은 課題를 達成함에 있어서 하나의 큰 問題는, 船舶의 「安全度」를 어떻게 評價할 것인가라고 하는 點이다. 現在는, 船長이 船舶의 安全에 關하여 評價하여, 危險하다고 判斷되면 適當한 減速과 變針을 指示하고 있다. 이러한 判斷과 指示를 船舶 自身이 決定하여, 船舶의 安全을 圖謀하는 것이 前述한 課題의 實施를 위해서 必要하다.

大洋을 航行中인 船舶의 安全對策은, 特히 荒天時에 考慮하지 않으면 안되며, 이 경우에 船舶의 耐航性能을 總合的으로 把握함과 아울러 安全에 關하여 判斷을 내려야 한다.

이와 같이 耐航性能을 船舶運航上의 立場에서 생각하여 볼 때, 어느 程度로 「安全度」를 確保하고 있는가를 量的으로 把握할 수 있는 評價指標을 必要하게 된다. 그런데, 船舶이 波浪中에 있을 때의 「安全度」를 나타내는 數値로서는, 船首加速度등 個個의 現象에 對한 限界値와 그 發生確率이 주어져 있어서 그것이 하나의 評價指標로 되고 있다<sup>1)</sup>. 그러나, 그것은 荒天時에 船舶의 安全上 注意할 必要가 있는 現象만 評價指數가 있는 것이 되고, 現實的으로는 運航하고 있는 船長의 判斷등에 合致되지 않는 面이 있다<sup>2)</sup>.

本來, 海上에 떠 있는 한 船舶에서 運動등이 原因이 되어 惹起되는 個個의 現象間에는 相互의 關係가 있기 마련이며, 한개의 現象을 알게 됨으로써 다른 現象의 狀況에 關해서도 推定할 수 있다. 이와 같은 內容을 理論的으로 明確하게 함으로써, 어떠한 現象에 關하여 計測하여 船舶全體의 「安全度」에 關한 判斷을 내릴 評價指標를 量的으로 表現하는 것이 可能해지게 된다.

耐航性能에 關한 研究成果는 船型, 船體強度의 分野나 運航의 分野에 應用되어 있지만, 前者의 例로서는, Bales<sup>3)</sup>의 6개의 船型과라미터와 船體運動 등의 關係를 파악하는 方法이나 福田 등<sup>4)</sup>의 船體強度에 應用한 例가 있다. 한편, 運航分野에는 最適航路問題나 荒天避航의 問題 등에 應用되어 있고<sup>5)·6)</sup>, 細田 등<sup>7)</sup>의 「Mission Effectiveness」(任務遂行度)의 概念을 導入하여 船舶의 耐航性에 關하여 評價하는 方法 등도 그 하나이다.

本研究는, 後者의 範疇에 屬하는 것이지만, 各 現象間의 相互關係를 考察하여 荒天運航時의 耐航性能評價를 量的으로 把握한 方法을 提示한 것이다.

本研究에 있어서 數値시뮬레이션의 對象船으로서는 SR 108의 길이 175 m Container 船을 利用하였다.

## 2. 耐航性要素와 그 相關關係

### 2.1 耐航性要素와 그 分散值

波浪中에 있는 船舶의 耐航性能을 評價하기 위해서 다음과 같은 現象을 評價要素로 한다.

- (1) Deck wetness :  $X_1$
- (2) Propeller racing :  $X_2$
- (3) Rolling :  $X_3$
- (4) F. P. 의 上下加速度 :  $X_4$
- (5) S. S. 8½의 左右加速度 :  $X_5$
- (6) 船體中央部の 波浪縱 Bending moment :  $X_6$
- (7) Slamming :  $X_7$

여기에서  $X_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 는 다음에 할 說明의 便宜上 表記한 것이다.

海象波 Spectrum 은 다음의 式을 使用한다<sup>9)</sup>.

$$S_{\zeta}(\omega, \theta) = \begin{cases} (2/\pi) S_{\zeta}(\omega) \cos^2 \theta & ; -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & ; \text{그 외의 경우} \end{cases} \quad (1)$$

$$S_{\zeta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} 0.11 H_{1/3}^2 T_0 \left( \frac{T_0}{2\pi} \omega \right)^{-5} \times \exp \left\{ -0.44 \left( \frac{T_0}{2\pi} \omega \right)^4 \right\} \quad (2)$$

但,  $H_{1/3}$  : 有義波高

$T_0$  : 平均波周期

船舶이 短波頂不規則波中을 一定速度로써 波에 對하여 一定의 針路( $\chi$ )를 維持하면서 航海하고 있는 경우, 어떤 한 耐航性要素의 確率過程  $X_i(t)$ 의 周波數應答函數를  $H_{X_i}(\omega, \chi - \theta)$ 라고 하면,  $X_i(t)$ 의 Spectrum  $S_{X_i^P}(\omega, \chi)$ 는,

$$S_{X_i^P}(\omega, \chi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |H_{X_i}(\omega, \chi - \theta)|^2 S_{\zeta}(\omega, \theta) d\theta \quad (3)$$

이고, 그 分散值  $\sigma_i^2(\chi)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\sigma_i^2(\chi) = \int_0^{\infty} S_{X_i^P}(\omega, \chi) d\omega \quad (4)$$

Spectrum 이 (3)式과 같이 表示될 경우, 各 要素의 確率過程  $X_i(t)$ 는 다음의 式과 같이 表現 되어진다<sup>10)</sup>.

$$X_i(t) = \int_0^{\infty} \sqrt{2 S_{X_i^P}(\omega, \chi)} d\omega \cos(\omega t + \psi_i) \quad (5)$$

但,  $\psi_i = \epsilon_i(\omega) + \phi_i$  이고,

$\phi_i$  는  $0 \sim 2\pi$  에서 Random 하게 一樣分布하는 位相角이다.

### 2.2 耐航要素의 相關關係

前記한 耐航性要素는 確率의으로 獨立이든지, 아니면 從屬關係를 가지게 된다. 그 相關關係는 各各의 要素間의 相關係數로써 表現할 수 있다. 耐航性要素中에서 任意의 2개의 要素의 確率過程을  $X_i(t)$ ,  $X_j(t)$  라고 하고, 平均值 Zero 의 定常 Ergodic 確率過程 이라고 하면, 그 相關係數  ${}_i\rho_j$  의 定義는 다음과 같이 주어질 수 있다.

$${}_i\rho_j = \frac{E[\bar{X}_i(t) \cdot X_j(t)]}{\sqrt{\sigma_i^2 \cdot \sigma_j^2}} \quad (6)$$

(6)式的 分子는  $X_i(t)$ ,  $X_j(t)$  의 共分散  $C_{ij}$  이고,  $C_{ij}$  는 2개의 確率過程의 積의 時間平均  $R_{ij}(0)$  와 같다. 即,

$$E[\bar{X}_i(t) \cdot X_j(t)] = C_{ij} = R_{ij}(0) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_{ij}(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{X}_i(t) \cdot X_j(t) dt \\ &= \int_0^\infty \sqrt{S_{X_i}^p(\omega, \chi) S_{X_j}^p(\omega, \chi)} \cos(\epsilon_i - \epsilon_j) d\omega \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서,  $\bar{X}_i(t)$  는  $X_i(t)$  의 共軛複素數이다.

그러므로, 任意 2要素의 確率過程  $X_i(t)$ ,  $X_j(t)$  의 相關係數는 다음의 式과 같이 表現할 수 있다.

$${}_i\rho_j(\chi) = \frac{\int_0^\infty \sqrt{S_{X_i}^p(\omega, \chi) S_{X_j}^p(\omega, \chi)} \cos(\epsilon_i - \epsilon_j) d\omega}{\sigma_i(\chi) \sigma_j(\chi)} \quad (9)$$

여기에서,  $\sigma_i(\chi)$ ,  $\sigma_j(\chi)$  는  $X_i(t)$ ,  $X_j(t)$  의 標準偏差이다.  ${}_i\rho_j \leq 1$  로써,  $X_i(t)$  와  $X_j(t)$  가 獨立의 경우에는  ${}_i\rho_j = 0$  이다.

Fig. 1 은 길이 175m 의 Container 船이 船速 16.1 knt ( $F_n = 0.2$ ) 로써, 海象狀態가 Beaufort No. 8 의 短波頂 不規則波中을 航行할 경우, 各耐航性要素의 相關係數를 出會角  $\chi$  ( $\chi = 180^\circ$ : 船首正向波) 에 對하여 表示한 그림이다. 이 狀態에 있어서 F.P. 의 Deck wetness ( $X_1$ ) 와 S.S. 8½의 相對變位 ( $X_{71}$ ) 는 船首正向波에서 船尾追波에 이르기까지 全般的인 出會角에 걸쳐서 相關關係가 높고, 耐航性要素中에서 제일 相關이 強하다는 것을 알 수 있다.

Propeller racing ( $X_2$ ) 과 S.S. 8½의 相對變位 ( $X_{71}$ ) 는 船首正向波에서 橫波에 이르기까지는 相關이 낮고, 橫波로부터 船尾追波인 狀態로 될수록 相關이 높아진다.

F.P. 의 Deck wetness 와 Propeller racing 이나 F.P. 의 Deck wetness 와 S.S. 8½의 相關係數는 出會角이 변하여도 거의 變化하지 않고, 全般的으로 相關이 낮은 것을 알 수 있다.

Rolling 에 의한 船體中央部の 相對水位變動 ( $X_3$ ) 와 S.S. 8½의 左右加速度 ( $X_5$ ) 는 船首正向波나 船尾追波인 狀態보다도 出會角이  $60^\circ \sim 120^\circ$  의 範圍에서 相關이 높게 되지만, F.P. 의 上下

加速度( $X_i$ )와의 相關係數( $\rho_i$ )는 橫波狀態에서 Zero에 가까와져서 無相關으로 된다.

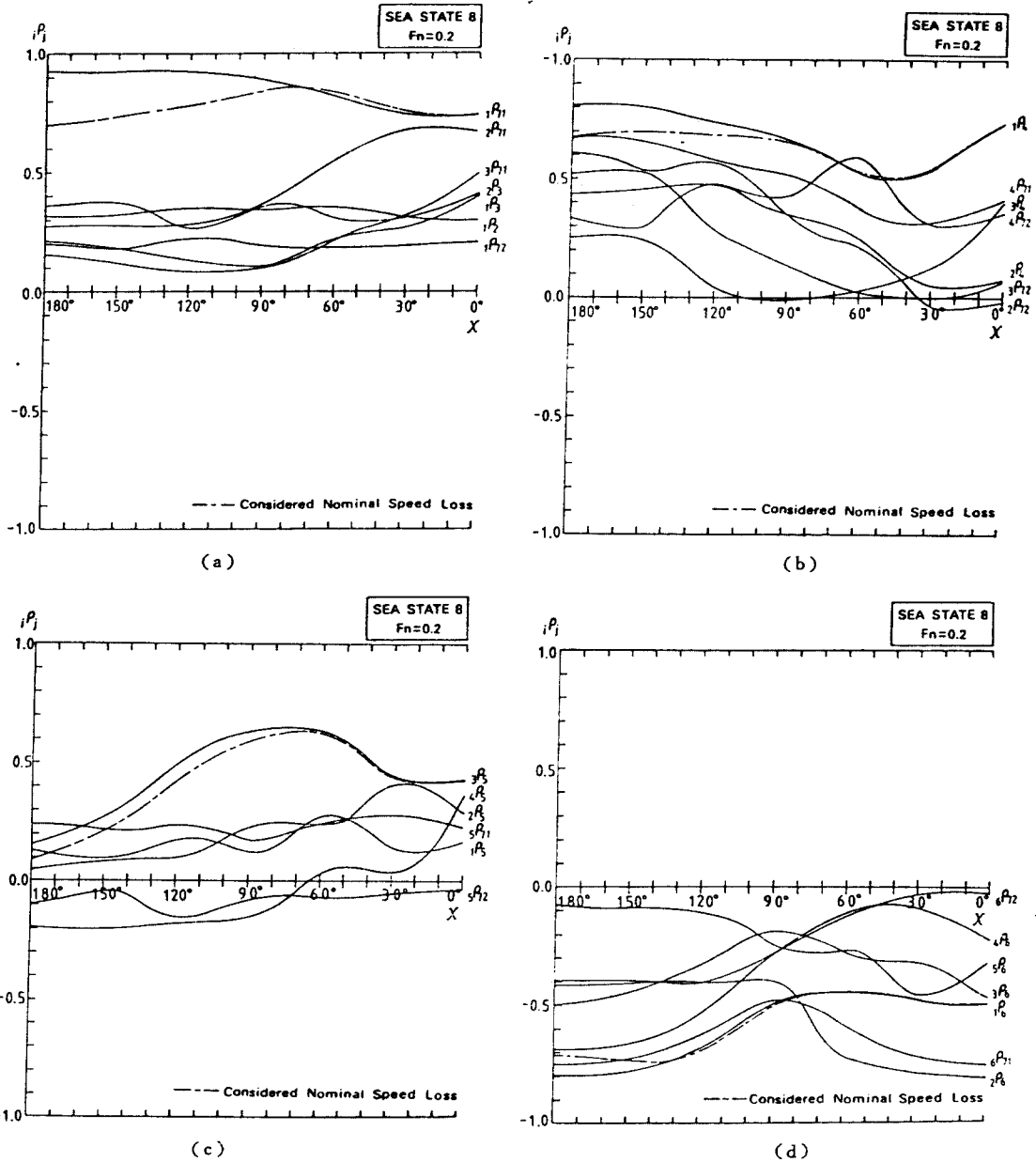


Fig. 1 Correlation coefficients between the factors on seakeeping performance

S.S. 8½의 船底의 波面에 對한 相對速度( $X_{12}$ )와 S.S. 8½의 船體中心線 位置에서의 左右加速度( $X_i$ )와의 相關係數는 모든 出會角에서 陰의 값이고 無相關에 가깝다.

船體中央部の 縱 Bending moment ( $X_6$ )와 다른 耐航性要素들과의 相關係數는 모든 出會角에 걸쳐서 除의 값이지만, S.S. 8½의 左右加速度와의 相關係數( ${}_s\rho_6$ )는 船首正向波의 狀態에서 無相關에 가깝고, S.S. 8½의 相對速度와의 相關係數( ${}_t\rho_{6-}$ )는 船尾追波인 狀態에서 無相關에 가까워진다.

船體中央部の 縱 Bending moment 와 S.S. 8½의 相對變位の 相關( ${}_t\rho_{71}$ )은 船首正向波와 船尾追波인 狀態에서 높게 되고, F.P.의 Deck wetness 와의 相關( ${}_1\rho_6$ )은 船首正向波인 狀態에서 높으며, Propeller racing 와의 相關( ${}_t\rho_3$ )는 船尾追波인 狀態에 높아진다.

또한, Fig. 1 에는 波浪中에 있어서의 船速低下(Nominal speed loss)<sup>2), 3)</sup>를 考慮할 경우, 各要素의 相關關係가 一定速度로써 航行할 경우와 比較하여 어떻게 變化하는가를 알아 보기 위해서 相關係數  ${}_1\rho_{71}$ ,  ${}_1\rho_6$ ,  ${}_1\rho_6$ ,  ${}_1\rho_6$  에 關於하여 一點鎖線으로 表示하였다.

### 3. 耐航性要素의 시스템적인 結合과 그 危險度

#### 3.1 耐航性要素의 시스템적인 結合

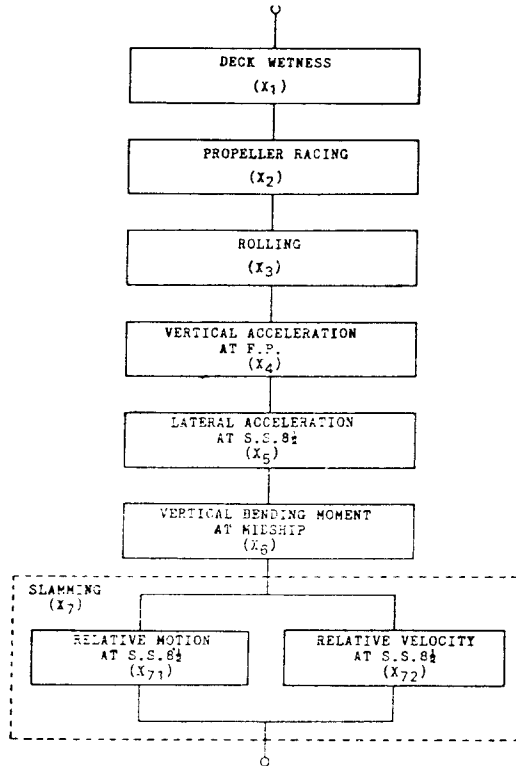


Fig. 2 Reliability diagram of the seakeeping performance in waves

各 耐航性要素가 어떠한 주어진 限界值( $\hat{X}_i$ )를 超過할 때에 그 現象이 發生하고, 한편 그 發生確率에 주어진 限界發生確率을 넘을 때, 船舶은 波浪中에서 그 機能을 잃게 되든지 아니면 危險하게 된다고 말할 수 있다.

이와 같은 各 耐航性要素의 시스템적인 結合은, Fig. 2와 같이 表現할 수 있다. 이것은 한 개의 要素라도 危險하게 되면 船舶이 機能을 잃게 되는 것을 나타내는 直列結合이다.

### 3.2 耐航性要素의 評價值, 危險度와 相對危險度

任意 要素의 極值分布는 Rayleigh 分布로서, 그 發生確率을  $Q(\hat{X}_i)$ 라고 한다. 이 경우, 標準 偏差로써 無次元化한 限界值의 逆數를  $i$ 要素의 評價值  $E_i$ 라고 定義한다. 卽,

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{-2 \ln \{Q(\hat{X}_i)\}}} = \left[ \frac{\sigma_i}{\hat{X}_i} \right] \quad (10)$$

評價值  $E_i$ 가 Zero가 되면 耐航性能에 대한  $i$ 要素의 信賴度는 1이 되고,  $E_i$ 가 無限大가 되면  $i$ 要素의 信賴度는 0으로 된다.

任意  $i$ 要素의 주어진 限界發生確率에 관한 限界值를  $E_{ic}$ 로 表示하고, 限界評價值  $E_{ic}$ 에 對한 評價值  $E_i$ 의 比를  $i$ 要素의 危險度  $\mu_i$ 라고 定義한다.

$$\mu_i = \frac{E_i}{E_{ic}} = \frac{[\hat{X}_i / \sigma_{ic}]}{[\hat{X}_i / \sigma_i]} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{ic}} \quad (11)$$

여기에서,  $\sigma_{ic}$ 는 要素  $X_i$ 가 危險하게 되는데 꼭 알맞은 標準偏差이다. 危險度  $\mu_i$ 는 出會角 ( $X$ ), 船速( $V$ ) 및 海象( $S$ )에 따라서 變化한다. 그리고,  $\mu_i > 1$ 인 경우에  $i$ 要素는 危險하게 되고,  $\mu_i < 1$ 인 경우에는 安全하게 된다는 것을 表示하는 것이기도 하다.

任意  $i, j$ 要素의 危險도가  $\mu_i, \mu_j$ 인 경우,  $i$ 要素를 基準으로 하여 表現한 危險도의 比를  $i$ 要素에 對한  $j$ 要素의 相對危險度  ${}_i\mu_j$ 라고 定義한다.

$${}_i\mu_j = \frac{\mu_j}{\mu_i} = \frac{[\hat{X}_i / \sigma_{ic}]}{\alpha_{ij} \cdot [\hat{X}_j / \sigma_j]} = \frac{\sigma_{ic} \cdot \sigma_j}{\sigma_{jc} \cdot \sigma_i} \quad (12)$$

여기에서,  $\alpha_{ij} = E_{jc} / E_{ic} = [\hat{X}_i / \sigma_{ic}] / [\hat{X}_j / \sigma_{jc}]$ 이다. 相對危險度も 出會角, 船速, 海象에 따라서 變化한다. 또한,  ${}_i\mu_j > 1$ 의 경우에는  $i$ 要素에 비하여  $j$ 要素가 危險하게 되기 쉽고,  ${}_i\mu_j < 1$ 의 경우는 그 反對의 意味를 가진다.

이와 같은 相對危險度を 定義하면, 基準으로 하는  $i$ 要素와 任意의  $j$ 要素는 同等하게 性能을 評價할 수 있게 된다. 그것은  $j$ 要素의 限界值를  $\alpha_{ij} \cdot \mu_j$  배한 값이  $j$ 要素의 見보기限界值( $\hat{X}_j$ )로 되기 때문이다.

Fig. 3은 對象 Container 船이 船速 16.1 knt 로써, 海象狀態가 Beaufort No. 8의 短波頂不規則 波中을 航走할 경우, 各 耐航性要素의 危險도와 相對危險度を 나타내는 그림이다.

여기에서 危險도는, 從來의 提案되어 있는 限界確率에 對한 各 要素의 危險도를 나타낸 것이

다. Fig. 3(a)에서 보면, 出會角이 船首正向波에서 110°까지의 範圍에서는 F.P.의 上下加速度와 Deck wetness의 危險度가 제일 높고, 船首正向波에서 120°의 사이에는 危險度가 1.0보다 크게 된다. 出會角이 110°~35°의 사이에는 Rolling의 危險度가 제일 높고, 35°부터 船尾追波 사이에는 Propeller racing의 危險度가 제일 높아진다. 이 船速과 海象狀態에 있어서는, F.P.의 上下加速度와 Deck wetness 以外の 現象들의 危險度가 1.0보다 낮은 것을 알 수 있다.

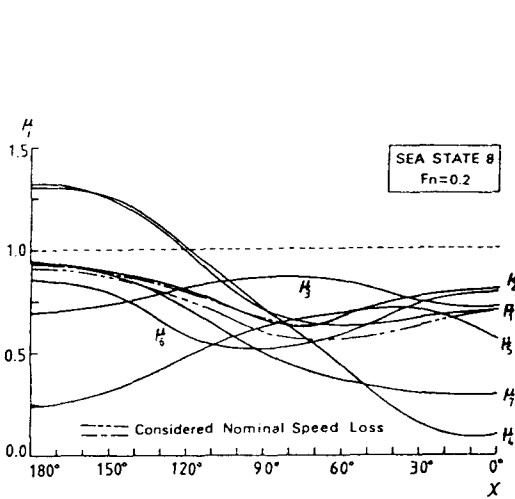


Fig. 3(a) Dangerousness of the factors on seakeeping performance

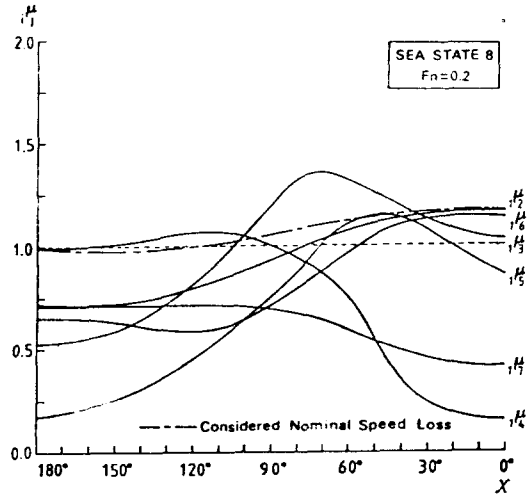


Fig. 3(b) Relative dangerousness of the factors on seakeeping performance

Fig. (b)는, Deck wetness( $X_1$ )를 基準要素로 한 경우의 相對危險度를 表示한 그림이다.

船首正向波로부터 160°의 出會角까지는 Deck wetness에 對한 各 要素의 相對危險度가 1.0보다 작고, 이 狀態에서는 Deck wetness가 가장 危險하게 되기 쉽지만, 110°에서 35°까지의 出會角에서는 Rolling이 가장 危險하게 되기 쉬우며, 35°에서 船尾追波의 사이에는 Propeller racing이 가장 危險하게 되기 쉽다는 것을 알 수 있다.

또한, Fig. 3에서는 船速低下를 考慮한 경우의 危險度와 相對危險度の 變化를 比較하기 위하여 Propeller racing의 危險度( $\mu_2$ )와 相對危險度( ${}_1\mu_2$ )를 一點鎖線으로써, Deck wetness의 危險度( $\mu_1$ )를 二點鎖線으로 表示하였다. 이 狀態에서는 船速低下에 의한  $\mu_2$ 의 變化는 작고, 相對危險度  ${}_1\mu_2$ 의 變化는  $\mu_1$ 에 의한 影響이 크다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 耐航性信賴度와 評價值

##### 4.1 耐航性信賴度

耐航性要素의 極值가 各各의 限界值를 超過하지 않는 確率, 즉, Fig. 2의 直列結合이 切斷되



지 않는 確率을 船舶의 耐航性信賴度라고 定義한다. 이것은 船舶의 出會角, 速度 및 海象에 따라서 變化하기 때문에  $P(X, V, S)$ 로 表記한다.

任意  $i, j, k$  要素의 相關係數가  $i\rho_i, i\rho_k, k\rho_i$ 이고,  $i$  要素를 基準으로 하였을 때의  $j, k$  要素의 相對危險度를  $i\mu_j, i\mu_k$ 이라고 한다. 이 경우, 相關關係를 가지는 한 개 이상의 要素가 同時에 그 限界值를 超過하는 確率을 計算하기 위하여 多次元 Rayleigh 分布函數의 近似式을 附錄 I 에 表示한 것과 같이 나타낼 수 있다.

우선, (12)式의  $\alpha_{ij} \cdot i\mu_j$ 를 다음과 같이 表記한다.

$$\beta_j \equiv \alpha_{ij} \cdot i\mu_j \quad (13)$$

任意的  $i$  要素를 基準으로 하였을 경우, 附錄 I 의 (I-3)式, (I-8)式에서 表示한 것과 같이, 各 要素의 相對危險度를 考慮하여 한 개의 基準要素를 使用한 1~3次元 要素의 同時發生確率을 求할 近似式은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(1) 1次元 要素의 發生確率

$$\left. \begin{aligned} Q(\hat{X}_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{X}_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} \\ Q(\hat{X}_j) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{X}_j}{\beta_j \sigma_j}\right)^2\right\} = Q(\hat{X}_i)^{\beta_j-2} \\ Q(\hat{X}_k) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{X}_k}{\beta_k \sigma_k}\right)^2\right\} = Q(\hat{X}_i)^{\beta_k-2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(2) 2次元 要素의 同時發生確率

$$\left. \begin{aligned} Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j) &= Q(\hat{X}_i)Q(\hat{X}_j) \left\{1 + \frac{i\rho_j^2}{4} \left(\frac{\hat{X}_i}{\sigma_i}\right)^2 \left(\frac{\hat{X}_j}{\beta_j \sigma_j}\right)^2\right\} \\ &= Q(\hat{X}_i)^{1+\beta_j-2} \left\{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\hat{X}_i}{\sigma_i}\right)^4 \left(\frac{i\rho_j}{\beta_j}\right)^2\right\} \\ Q(\hat{X}_j, \hat{X}_k) &= Q(\hat{X}_j)Q(\hat{X}_k) \left\{1 + \frac{j\rho_k^2}{4} \left(\frac{\hat{X}_j}{\beta_j \sigma_j}\right)^2 \left(\frac{\hat{X}_k}{\beta_k \sigma_k}\right)^2\right\} \\ &= Q(\hat{X}_i)^{\beta_j-2+\beta_k-2} \left\{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\hat{X}_i}{\sigma_i}\right)^4 \left(\frac{j\rho_k}{\beta_j \beta_k}\right)^2\right\} \\ Q(\hat{X}_k, \hat{X}_i) &= Q(\hat{X}_k)Q(\hat{X}_i) \left\{1 + \frac{k\rho_i^2}{4} \left(\frac{\hat{X}_k}{\beta_k \sigma_k}\right)^2 \left(\frac{\hat{X}_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} \\ &= Q(\hat{X}_i)^{1+\beta_k-2} \left\{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\hat{X}_i}{\sigma_i}\right)^4 \left(\frac{k\rho_i}{\beta_k}\right)^2\right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(3) 3次元 要素의 同時發生確率

$$\begin{aligned}
 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k) &= Q(\hat{X}_i)Q(\hat{X}_j)Q(\hat{X}_k) \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{i\rho_j^2}{4} \left( \frac{\hat{X}_i}{\sigma_i} \right)^2 \left( \frac{\hat{X}_j}{\beta_j \sigma_j} \right)^2 + \frac{i\rho_k^2}{4} \left( \frac{\hat{X}_j}{\beta_j \sigma_j} \right)^2 \left( \frac{\hat{X}_k}{\beta_k \sigma_k} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k\rho_i^2}{4} \left( \frac{\hat{X}_k}{\beta_k \sigma_k} \right)^2 \left( \frac{\hat{X}_i}{\sigma_i} \right)^2 \right\} \\
 &= Q(\hat{X}_i)^{1+\beta_j^{-2}+\beta_k^{-2}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\hat{X}_i}{\sigma_i} \right)^4 \left\{ \left( \frac{i\rho_j}{\beta_j} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{j\rho_k}{\beta_j \beta_k} \right)^2 + \left( \frac{k\rho_i}{\beta_k} \right)^2 \right\} \right] \tag{16}
 \end{aligned}$$

Fig. 2 와 같은 結合을 가지는 시스템에 있어서 어떠한 要素의 極值가 限界值를 超過하는 確率  $Q\{X, V, S\}$  는 (14), (15), (16) 式의 表現을 利用하면 다음 式과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 Q\{X, V, S\} &= \sum_{i=1}^7 Q(\hat{X}_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^7 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j) \\
 &\quad + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^7 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k) \\
 &\quad - \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j < k < l}}^7 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k, \hat{X}_l) \\
 &\quad + \sum_{\substack{i,j,k,l,m=1 \\ i < j < k < l < m}}^7 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k, \hat{X}_l, \hat{X}_m) \\
 &\quad - \sum_{\substack{i,j,k,l,m,n=1 \\ i < j < k < l < m < n}}^7 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k, \hat{X}_l, \hat{X}_m, \hat{X}_n) \\
 &\quad + Q(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3, \hat{X}_4, \hat{X}_5, \hat{X}_6, \hat{X}_7) \tag{17}
 \end{aligned}$$

Fig. 2 에 있어서,  $X_{71}$  와  $X_{72}$  는 並列結合으로서 서로 獨立이기 때문에  $Q(X_7)$  는  $Q(X_{71}) \cdot Q(X_{72})$  이다.

(17) 式에서 3次元 以上の 項은 Zero 에 가깝다고 생각되어 點線으로 두른 2次元 要素의 項까지 取하여  $Q\{X, V, S\}$  를 近似할 수 있다고 한다.

만약, Deck wetness( $X_1$ )를 基準으로 할 경우, (14), (15), (16) 式의 關係에서 發生確率  $Q\{X, V, S\}$  는 다음과 같이 나타낼 수 있다(附錄 II 參照).

$$\begin{aligned}
 Q\{X, V, S\} &\approx \sum_{i=1}^7 Q(\hat{X}_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^7 Q(\hat{X}_i, \hat{X}_j) \\
 &= \sum_{i=1}^7 Q(\hat{X}_i)^{\beta_i^{-2}} \left\{ 1 - \sum_{j=i+1}^7 Q(\hat{X}_i)^{\beta_j^{-2}} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left( \frac{\hat{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \sum_{k=1}^6 Q(\hat{X}_1)^{\beta_k^{-2}} \left[ \sum_{l=k+1}^6 Q(\hat{X}_1) \left( \frac{k\rho_l}{\beta_k \beta_l} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + Q(\hat{X}_1)^{\beta_7^{-2}} \left\{ \left( \frac{k\rho_{71}}{\beta_k \beta_{71}} \right)^2 + \left( \frac{k\rho_{72}}{\beta_k \beta_{72}} \right)^2 \right\} \right] \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但, } \beta_1 &= 1 \\ \beta_7^{-2} &= \beta_{11}^{-2} + \beta_{12}^{-2} \end{aligned}$$

이다.

(18)式的 右邊 第1項은, 各 要素가 獨立인 경우에 7개의 要素中에서 한개 以上の 現象이 發生하는 確率을 2次元 同時 發生項까지 취한 近似項이다. 이 때에 各 要素의 相關關係에 의한 發生確率의 減少가 第2項이다.

基準要素에 對한 各 要素의 相對危險度가 計算으로 求해질 수 있을 경우, 基準要素만 觀測하면, (18)式으로 부터 船舶의 耐航性能信賴度를 求할 수 있다. 結局, 定義한 耐航性能信賴度  $P\{X, V, S\}$ 는 다음과 같이 된다.

$$P\{X, V, S\} = 1 - Q\{X, V, S\} \quad (19)$$

#### 4.2 耐航性能의 評價值

上記한 것 과 같은 耐航性能信賴度는 多次元 Rayleigh 分布로 부터 求해진 確率이지만, 信賴性工學 등에서 適用하는 內容을 應用하여 耐航性能信賴度를 評價值  $E_T$ 라 하고, 다음 式과 같이 表現하면 性能評價上 便利하다.

$$E_T = \frac{1}{\sqrt{-2 \ln[1 - P\{X, V, S\}]}} = \frac{1}{\sqrt{-2 \ln[Q\{X, V, S\}]}} \quad (20)$$

通常, 信賴性工學의 分野에 있어서는,

$$r = -\log_{10}(1 - P) \quad (21)$$

로 表現하여 信賴度의 指標로 하고 있지만<sup>12)</sup>, 이  $r$ 과 (20)式의  $E_T$ 는 다음과 같은 關係가 있다.

$$E_T = \sqrt{\frac{\log_{10} e}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r}} \approx 0.466 r^{-1/2} \quad (22)$$

船舶의 耐航性能에서 취급되는 現象의 極值分布가 Rayleigh 分布이기 때문에 (20)式과 같은 定義가 좋다고 생각되어진다.

이  $E_T$ 는, 耐航性能信賴도가 0일 때에  $E_T \rightarrow \infty$ 이고, 耐航性能信賴도가 1일 때에  $E_T \rightarrow 0$ 로 되는 값이다. 이  $E_T$ 를 利用하여, 船舶의 出會角, 速度 및 海象과  $E_T$ 와의 關係를 나타내는 評價圖를 作成하여 耐航性能을 總合적으로 評價할 수 있다.

評價圖上에서,  $E_T$ 가 耐航性能信賴度 0.9에 相當하는 領域을 벗어나는 것은 耐航性能 시스템이 機能的으로 安全하게 될 確率이 0.9以下로 되는 것을 나타낸다. 即, 耐航性能要素中에서 어느 한 要素가 原因이 되어 船舶의 耐航性能이 危險하게 될 確率이 0.1以上 되는 것을 意味한다. 이것은, 確率적으로 같은 船舶 100隻 중에서 10隻 이상이 어떠한 原因으로 危險하게 되어 있는 狀態이다.

Fig. 4(a)~(d)는 靜水中 航行速度가 16.1 knt( $F_n=0.2$ )와 22.14 knt( $F_n=0.275$ )의 경우, 對象

Container 船의 耐航性信賴도가 出會角에 따라서 變化하는 모양을 나타낸 評價圖로서,  $F_n=0.2$ 의 船速에 대해서는, 各 海象에 있어서 船速을 考慮한 경우와 一定船速의 경우를 比較하여 表示하였다. 海象狀態 6의 경우에는, 船速이 低下하여도 耐航性信賴도에 그 影響이 보이지 않지만, 海象狀態가 거칠게 됨에 따라 船速低下의 影響은 커지게 되고, 船速이 低下하면 耐航性信賴도는 높아진다.

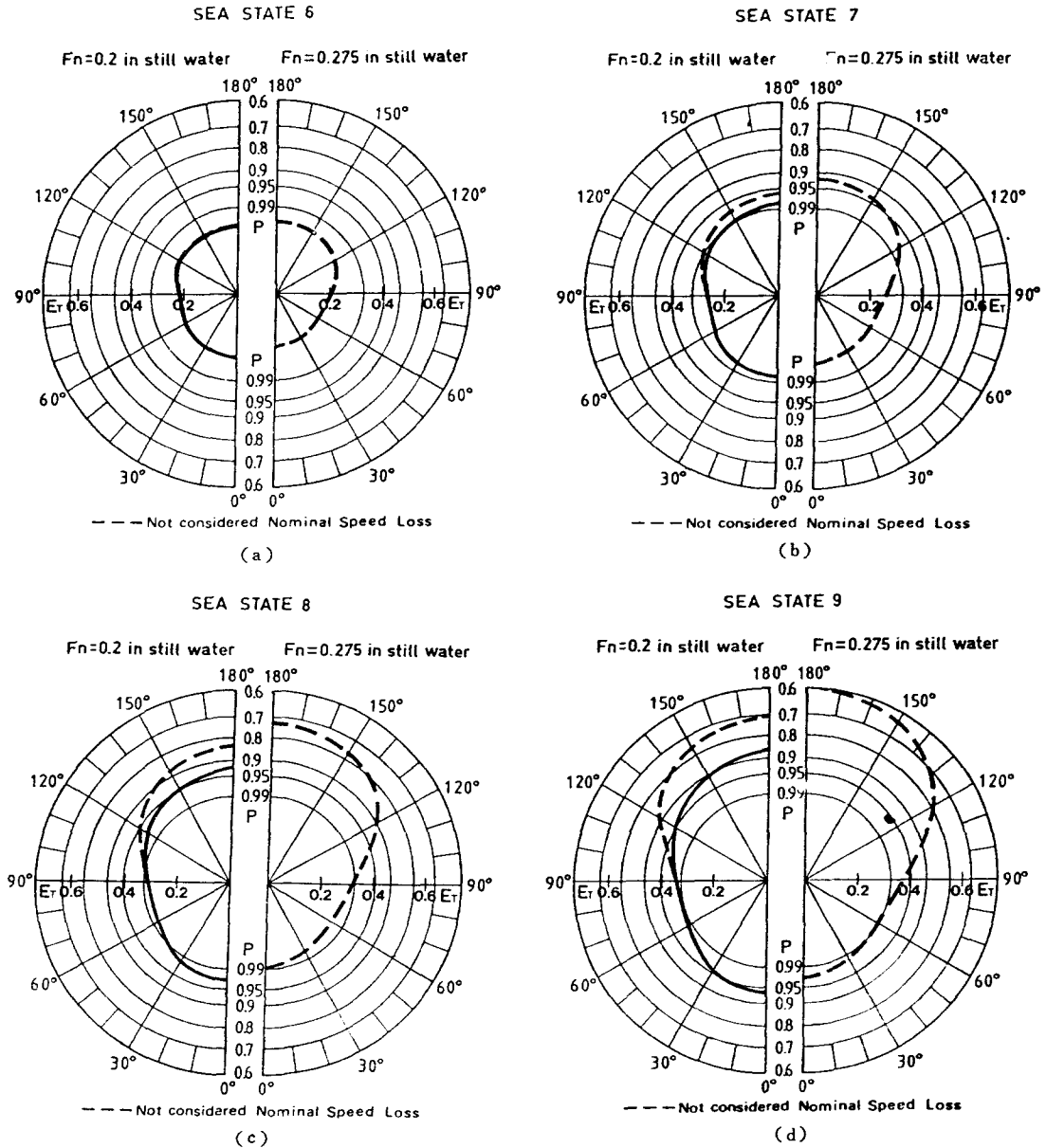


Fig. 4(1) Evaluation diagram of the seakeeping performance in waves

靜水中의 速力  $F_n=0.2$  와  $F_n=0.275$  의 경우를 比較하면, 船首正向波에서는 船速이 빠른 편이, 船尾追波에서는 船速이 느린 편이 耐航性信度가 낮아지는 것을 알 수 있다.

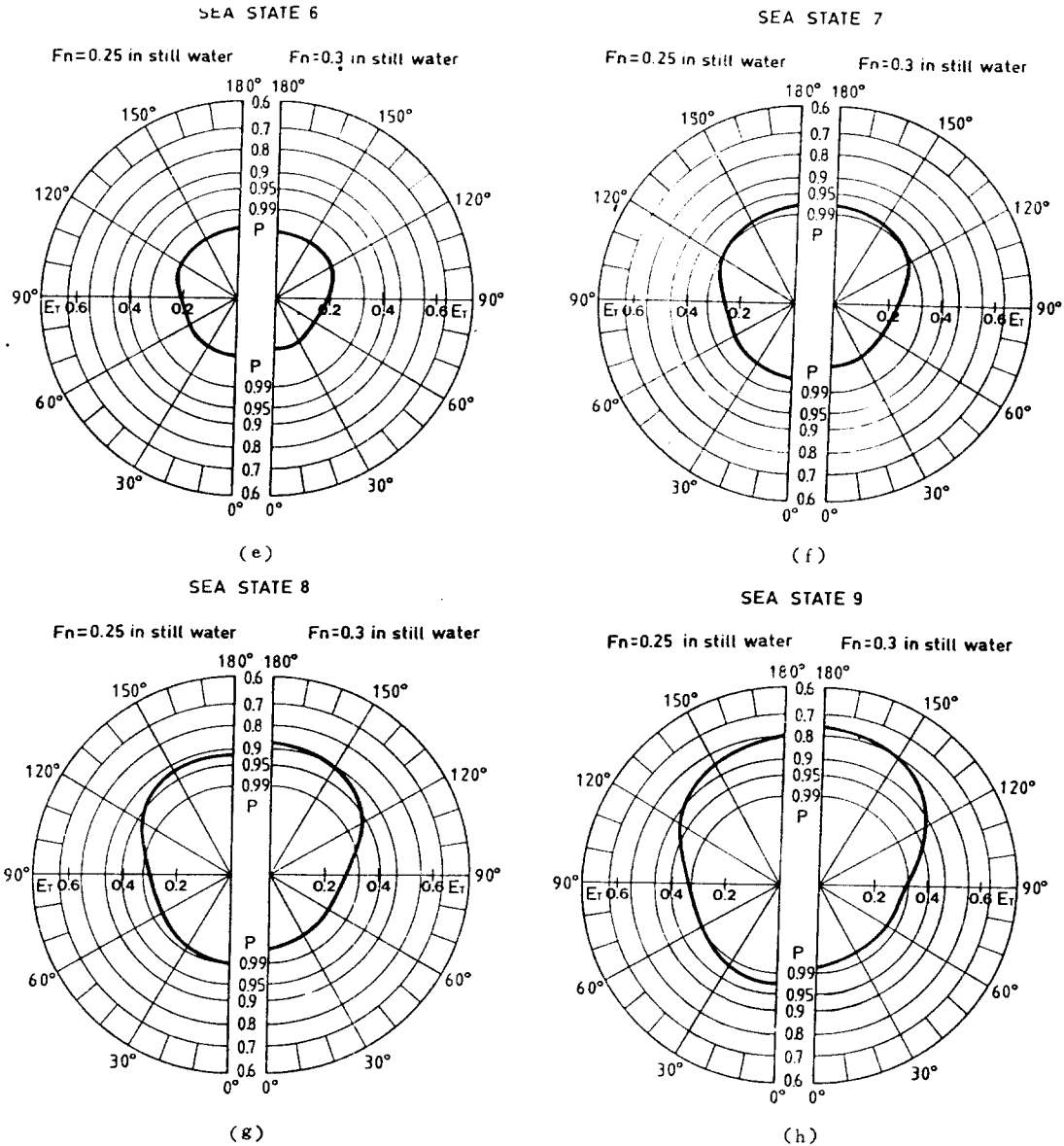


Fig. 4(2) Evaluating diagram of the seakeeping performance in waves

Fig. 4(e)~(h)는 靜水中의 航行速力이 20.13 knt( $F_n=0.25$ )와 24.16 knt( $F_n=0.3$ )의 경우, 各 海象에 있어서 船速이 低下한 狀態에서 對象 Container 船의 耐航性信度의 出會角에 의한 變化를 나타낸 評價圖이다.

海象狀態 6, 7의 경우는 船速이 빠른 편이 耐航性信賴도가 높고, 海象狀態가 거칠어질수록 船速이 빠른 편이 耐航性信賴도가 낮아진다. 이 評價圖에서 보면, 海象狀態 7 以下에서는 船舶의 波浪中 耐航性信賴도는 0.9 以上이지만, 海象狀態 8이 되면, 어떤 船速狀態에서는 出會角  $180^{\circ} \sim 150^{\circ}$ 의 範圍에서 耐航性信賴도가 0.9 以下로 되는 것을 알 수 있다.

또한, 以上의 計算에서는 基準要素로서 Deck wetness 를 취하였지만, 基準要素로서 Propeller racing 을 취하였을 경우에도 그 結果는 같았다.

### 5. 數值計算의 條件

數值計算에 使用한 對象船型은 SR 108의  $L_{pp}=175\text{m}$  Container 船이다. 그 主要目을 Table 1에 表示한다. 海象은 Beaufort No. 6, 7, 8, 9의 狀態로 短波頂不規則波中에서 計算을 行하였다. 各 海象에 對한 平均波周期와 有義波高를 Table 2에 表示한다. 船速은 靜水中 航行速力 16.1 knt( $F_n=0.2$ ), 20.13 knt( $F_n=0.25$ ), 24.16 knt( $F_n=0.30$ )의 3 種類로써 各 海象에서 船速低下한 狀態에 對해서도 計算을 行하였다. 但, 船速低下를 計算할 때, 橫波에서 船尾追波인 狀態까지의 出會角에서는 波浪中 抵抗增加量은 0으로 하고, 主機關의 條件은 Torque 一定의 狀態로 하였다.

Table 1. Principal particulars of ship

ITEMS		DIMENSIONS
Length P. P.	$L_{pp}$ (m)	175.00
Breadth	B (m)	25.40
Depth	D (m)	15.40
Mean draft	$d_M$ (m)	9.50
Displacement volume	( $\text{m}^3$ )	24,742
Block coefficient	$C_B$	0.572
Length-breadth ratio L/B		6.89
Breadth-draft ratio B/D		2.67
Center of buoyancy	$l_{cb}$ (% $L_{pp}$ )	1.417
Height of C. G.	KG (m)	9.52
Metacentric height	GM (m)	1.00
Rolling period	$T_R$ (sec)	18.00
Radius of gyration	$K_{yy}/L_{pp}$	0.24
Propeller diameter	$D_p$ (m)	6.50
Propeller pitch ratio p		1.055

Table 2. Sea states

Beaufort Scale	Mean Wave Period $T_0$ (sec)	Significant Wave Height $H_{1/3}$ (m)
6	7.60	3.90
7	8.90	5.30
8	10.30	7.10
9	11.70	9.21

短波頂不規則波中の 船舶의 出會角은 船首正向波로 부터 30°의 間隔으로 船尾追波까지 7개의 狀態에 對해서 計算을 行하였다.

耐航性信賴度를 計算할 때의 各要素의 限界值 및 限界確率은 다음과 같이 취하였다<sup>13)</sup>.

(1) F.P의 Deck wetness

- 限界值：靜水中 航走時의 水位上昇<sup>14)</sup>을 考慮한 F.P.의 有効乾舷을 限界值로 하였다.
- 限界確率： $2 \times 10^{-2}$

(2) Propeller 露出

- 靜水中 航走時의 水位上昇<sup>15)</sup>을 考慮하여, Propeller 上端露出을 限界로 하였다.
- 限界確率： $10^{-1}$

(3) Rolling

- 船體中央部 Weather side의 bulwark top에 海水가 流入하는 것을 限界狀態로 생각하여, 靜水中 吃水面에서 bulwark top까지의 높이를 限界值로 하였다.
- 限界確率： $10^{-3}$

(4) F.P.의 上下加速度

- 限界值：0.8g……Container 強度 JIS(Z 1618—1972)에 의함. g는 重力加速度이다.
- 限界確率： $10^{-3}$

(5) S.S. 8½의 左右加速度

- 限界值：0.6g……Container 強度 JIS(Z 1618—1972)에 의함.
- 限界確率： $10^{-3}$

(6) 船體中央部の 縱 Bending moment

- 限界值：許容波浪荷重을 70,000 ton-m 로 推定하였다.
- 限界確率： $10^{-5}$

(7) Slamming

- Threshold velocity 는  $V_{th} = 0.09 \sqrt{gL}$  로써 推定하였다.
- 限界確率： $10^{-2}$

## 6. 結 論

波浪中에 있어서 船舶의 耐航性能을 評價하기 위해서 行한 本 研究의 結果를 綜合하여 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

(1) 서로 相關關係를 가지는 多次元 不規則 現象을 豫測·評價하기 위한 多次元 Rayleigh 分布의 結合確率密度函數와 分布函數의 近似式을 求하였다. 이 近似式에 의하여, 耐航性 分野에서 取扱되고 있는 多次元 現象의 發生確率에 容易하게 計算될 수 있다.

(2) 船舶의 耐航性能을 評價하기 위하여, 商船의 運航目的을 滿足하는 代表的인 시스템적 結合을 생각하여 評價를 行하였다.

(3) 各 耐航性能 要素에 相對危險度를 考慮함으로써, 多次元 要素中의 한개의 要素로써 船舶의 耐航性能을 評價할 수 있는 評價法을 提案하였다. 이것은 船舶의 波浪中 航行狀態를 評價하기 위하여, 必要한 Sensor 의 設置 등에 有効한 指針을 제공하게 될 것으로 생각된다.

또한, 本 論文의 結果가 船舶의 最適設計나 經濟性을 포함한 運航性評價, 最適航路, 經年變化에 의한 耐航性 등의 研究에 有用하게 될 것이라고 생각한다.

## 參 考 文 獻

- 1) 中村彰一: 耐航性の諸要素, 第1回 耐航性に關するシンポジウム, 日本造船學會(1969), p. 121.
- 2) 日本海難防止協會: 大型專用船の運航上の安全對策に關する調査研究, 完了報告書(1971).
- 3) N. K. Eales: Optimizing the Seakeeping Performance of Destroyer-Type Hulls, Proc. of 13th Symposium on Naval Hydrodynamics, ONR(1980), p. 479.
- 4) 福田淳一·新開明二·森山厚夫: 波浪中船體應力長期豫測(その1), 日本造船學會論文集, 第144號(1978), p. 230.
- 5) 細田龍介·黒井昌明: 最適航法, 第2回 耐航性に關するシンポジウム, 日本造船學會(1977), p. 211.
- 6) 內藤 林·中村彰一·原 正一: 波浪中における船速低下の推定法に關する研究, 日本造船學會論文集, 第146號(1979), p. 147.
- 7) E. N. Comstock, S. L. Bales and R. G. Keane: Seakeeping in Ship Operation, Proc. of 5th STAR Symposium, SNAME(1980), p. 187.
- 8) 細田龍介, 他: 船舶の初期設計における耐航性の綜合的評價に關する研究(第1報), 日本造船學會論文集, 第153號(1983), p. 151, (第2報), 日本造船學會論文集, 第154號(1983), p. 253.
- 9) 福田淳一: 船體應答の統計的豫測, 第1回 耐航性に關するシンポジウム, 日本造船學會(1969), p. 99.
- 10) 山内保文: 海洋波中の應答, 第1回 耐航性に關するシンポジウム, 日本造船學會(1969), p. 53.
- 11) 新谷 厚·內藤 林: 波浪中の馬力増加, 第2回 耐航性に關するシンポジウム, 日本造船學會(1977), p. 165.
- 12) 例えは, V. V. ボロチン: 構造設計の確率論的方法と信頼性問題, 培風館(1981, 小林繁夫, 他譯), p. 147.



- 13) 日本造船研究協會, 第125研究部會: 超高速コンテナ船の耐航性に關する報告書, 研究資料 No. 211 (1975), p. 31.
- 14) 田崎 亮: 船舶の波浪中における甲板上への海水打ち込みについて, 運研技報, 第11卷, 第8號(1961), p. 357.
- 15) 小林正典, 他: 船舶の耐航性に關する理論計算プログラム(その1, 理論計算式), 三井造船技報, 第82號 (1973), p. 18.
- 16) M. K. Ochi and W. E. Bolton: Statistics for Prediction of Ship Performance in a Seaway, Inter. Shipbuilding Prog., Vol. 20(1973), p. 351.
- 17) W. B. Davenport and W. L. Root: An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill(1958), p. 161.
- 18) K. S. Miller: Multidimensional Gaussian Distributions, John Wiley and Sons(1964), p. 36.
- 19) K. S. Miller, R. I. Earnstein and L. E. Blumenson: Generalized Rayleigh Progresses, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 20, No. 4(1963), p. 137.

## 附 錄 I

### A. 多次元 Rayleigh 分布函數의 近似式

相關關係를 가지는 多次元 要素의 發生確率을 容易하게 計算할 수 있게 하기 위하여 多次元 Rayleigh 分布函數의 近似式을 求한다.

相關係數를 Zero 近傍에서 級數展開하여 二乘項까지 취한 2~3 次元의 結合確率密度函數와 分布函數의 近似式은 다음과 같이 求할 수 있다.

#### A.1 2次元 分布

確率變數  $X_i, X_j$ 의 標準偏差에서 無次元化한 Rayleigh 結合確率密度函數  $f(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ 는 다음과 같이 表現된다<sup>(6), (17)</sup>.

$$\begin{aligned}
 f(\bar{X}_i, \bar{X}_j) &= \frac{\bar{X}_i \bar{X}_j}{G_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (W_{ii} \bar{X}_i^2 + W_{jj} \bar{X}_j^2) \right\} \\
 &\quad \times I_0(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j) \\
 &= \bar{X}_i \bar{X}_j \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{X}_i^2 + \bar{X}_j^2) \right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{G_2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ (W_{ii} - 1) \bar{X}_i^2 \right. \\
 &\quad \left. + (W_{jj} - 1) \bar{X}_j^2 \} \right] \cdot I_0(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j) \\
 &\equiv q(\bar{X}_{i,j}) \cdot \phi(\bar{X}_{i,j}; i\rho_j)
 \end{aligned} \tag{I-1}$$

여기에서,

$$G_2 = \begin{vmatrix} 1 & i\rho_j \\ i\rho_j & 1 \end{vmatrix} : X_i, X_j \text{의 相關行列式,}$$

$i\rho_j$  :  $X_i, X_j$ 의 相關係數,

$W_{ii}, W_{jj}, W_{ij}$  : 相關行列 $[G_2]$ 의 餘因數

$I_0(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j)$  : Zero order 의 變形 Bessel 函數

$$\begin{aligned}
 q(\bar{X}_{i,j}) &= \bar{X}_i \bar{X}_j \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{X}_i^2 + \bar{X}_j^2) \right\} \\
 \phi(\bar{X}_{i,j}; i\rho_j) &= \frac{1}{G_2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ (W_{ii} - 1) \bar{X}_i^2 \right. \\
 &\quad \left. + (W_{jj} - 1) \bar{X}_j^2 \} \right] \cdot I_0(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{G_2} = \frac{1}{1 - i\rho_j^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i\rho_j^{2n}$$

$$W_{ii} - 1 = W_{jj} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} i\rho_j^{2n}$$

$$W_{ij} = \frac{i\rho_j}{1 - i\rho_j} = \sum_{n=1}^{\infty} i\rho_j^{(2n-1)}$$

이다. 上記 (I-1)式을 近似式으로 다음과 같이 된다.

$$f(\bar{X}_i, \bar{X}_j) \approx q(\bar{X}_{i,j}) \left\{ 1 + i\rho_j^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_i^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_j^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_i^2 \bar{X}_j^2 \right) \right\} \quad (I-2)$$

(I-2)式을 二重積分하면 分布函數를 求할 수 있다.

$\bar{X}_i, \bar{X}_j$ 가 同時에 限界值  $\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*$ 를 超過할 確率을 計算하는 近似式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} P[\bar{X}_i \geq \bar{X}_i^*, \bar{X}_j \geq \bar{X}_j^*] &= \int_{\bar{X}_i^*}^{\infty} \int_{\bar{X}_j^*}^{\infty} f(\bar{X}_i, \bar{X}_j) d\bar{X}_i d\bar{X}_j \\ &\approx (1 + i\rho_j^2) e^{-\bar{X}_i^*/2} e^{-\bar{X}_j^*/2} \\ &\quad - \frac{i\rho_j^2}{2} \{ (\bar{X}_i^* e^{-\bar{X}_i^*/2} + 2e^{-\bar{X}_i^*/2}) \\ &\quad \times e^{-\bar{X}_j^*/2} + (\bar{X}_j^* e^{-\bar{X}_j^*/2} + 2e^{-\bar{X}_j^*/2}) e^{-\bar{X}_i^*/2} \} \\ &\quad + \frac{i\rho_j^2}{4} (\bar{X}_i^* e^{-\bar{X}_i^*/2} + 2e^{-\bar{X}_i^*/2}) \\ &\quad \times (\bar{X}_j^* e^{-\bar{X}_j^*/2} + 2e^{-\bar{X}_j^*/2}) \\ &= e^{-\bar{X}_i^*/2} \cdot e^{-\bar{X}_j^*/2} \left( 1 + \frac{i\rho_j^2}{4} \bar{X}_i^* \bar{X}_j^* \right) \\ &= Q(\bar{X}_{i,j}^*) \left( 1 + \frac{i\rho_j^2}{4} \bar{X}_i^* \bar{X}_j^* \right) \\ &\equiv Q(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*) \end{aligned} \quad (I-3)$$

여기에서  $Q(\bar{X}_{i,j}^*) = e^{-(\bar{X}_i^* + \bar{X}_j^*)/2} = Q(\bar{X}_i^*) \cdot Q(\bar{X}_j^*)$ 이다. 즉,  $Q(\bar{X}_{i,j}^*)$ 는  $X_i, X_j$ 가 獨立인 경우에 同時에  $\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*$ 를 超過할 確率이다.

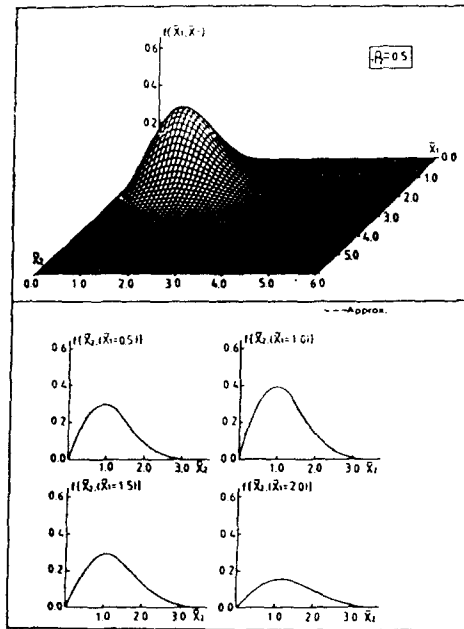
또한,  $\bar{X}_i, \bar{X}_j$ 가 同時에 限界值  $\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*$ 를 超過하지 않을 確率을 計算할 近似式은 다음과 같 이 된다.

$$\begin{aligned} P[0 \leq \bar{X}_i \leq \bar{X}_i^*, 0 \leq \bar{X}_j \leq \bar{X}_j^*] &= \int_0^{\bar{X}_i^*} \int_0^{\bar{X}_j^*} f(\bar{X}_i, \bar{X}_j) d\bar{X}_i d\bar{X}_j \\ &\approx 1 - e^{-\bar{X}_i^*/2} - e^{-\bar{X}_j^*/2} \\ &\quad + e^{-\bar{X}_i^*/2} \cdot e^{-\bar{X}_j^*/2} \left( 1 + \frac{i\rho_j^2}{4} \bar{X}_i^* \bar{X}_j^* \right) \\ &= 1 - Q(\bar{X}_i^*) - Q(\bar{X}_j^*) + Q(\bar{X}_i^*) \cdot Q(\bar{X}_j^*) \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{i\rho_j^2}{4} \bar{X}_i^* \bar{X}_j^* \right) \\ &\equiv P(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*) \end{aligned} \quad (I-4)$$

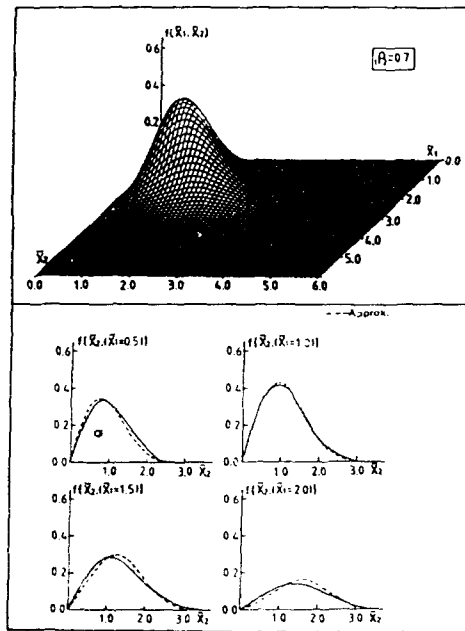
$X_i, X_j$ 가 獨立인 경우에는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*) &= \{1 + Q(\bar{X}_i^*)\} \{1 + Q(\bar{X}_j^*)\} \\ &= P(\bar{X}_i^*) \cdot P(\bar{X}_j^*) \end{aligned} \quad (I-5)$$

Fig. 5(a), (b)는 (I-1)式의 結合確率密度函數와 近似式 (I-2)式을 比較하기 위해서 表示



(a)



(b)

Fig. 5 Two-dimensional Rayleigh's joint probability density function and its approximation

한 그림이고, Fig. 6은 相關關係를 가지는 2次元 確率變數의 同時發生確率과 近似 計算에 의한 確率을 比較하기 위하여 表示한 그림이다.

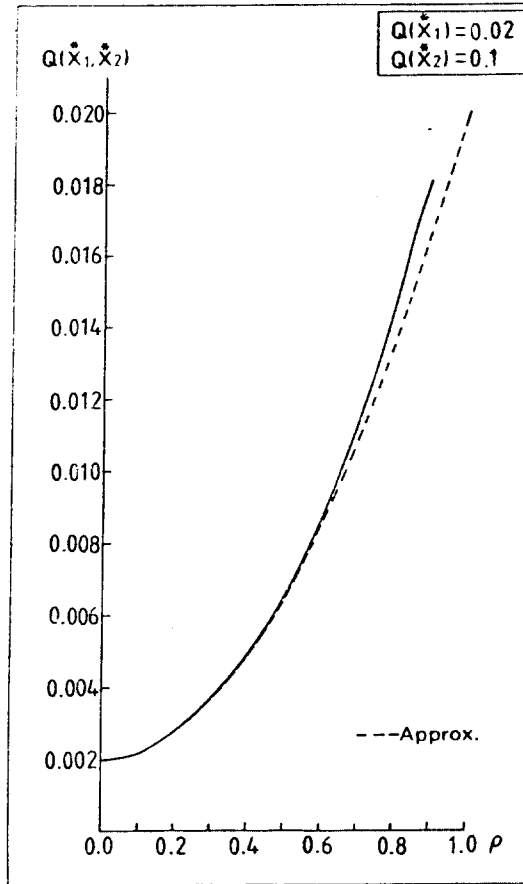


Fig. 6 An example of two-dimensional Rayleigh's joint probability and it's approximation

### A. 2 3次元 分布

確率變數  $X_i, X_j, X_k$ 의 標準偏差로써 無次元化한 Rayleigh 結合確率密度函數  $f(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k)$ 는 다음과 같이 된다<sup>18), 19)</sup>.

$$\begin{aligned}
 f(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k) &= \frac{\bar{X}_i \bar{X}_j \bar{X}_k}{G_3} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(W_{ii}\bar{X}_i^2 + W_{jj}\bar{X}_j^2 + W_{kk}\bar{X}_k^2)\right\} \\
 &\times \left\{I_0(|W_{ij}|\bar{X}_i\bar{X}_j) \cdot I_0(|W_{jk}|\bar{X}_j\bar{X}_k)\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times I_0(|W_{ki}| \bar{X}_k \bar{X}_i) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j) \\
 & \times I_n(|W_{jk}| \bar{X}_j \bar{X}_k) \cdot I_n(|W_{ki}| \bar{X}_k \bar{X}_i) \} \\
 = & \bar{X}_i \bar{X}_j \bar{X}_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{X}_i^2 + \bar{X}_j^2 + \bar{X}_k^2) \right\} \\
 & \times \frac{1}{G_3} \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ (W_{ii} - 1) \bar{X}_i^2 \right. \\
 & \left. + (W_{jj} - 1) \bar{X}_j^2 + (W_{kk} - 1) \bar{X}_k^2 \} \right] \\
 & \times \left\{ I_0(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j) \cdot I_0(|W_{jk}| \bar{X}_j \bar{X}_k) \right. \\
 & \times I_0(|W_{ki}| \bar{X}_k \bar{X}_i) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(|W_{ij}| \bar{X}_i \bar{X}_j) \\
 & \times I_n(|W_{jk}| \bar{X}_j \bar{X}_k) \cdot I_n(|W_{ki}| \bar{X}_k \bar{X}_i) \} \\
 = & q(\bar{X}_{i,j,k}) \cdot \phi(\bar{X}_{i,j,k}; \rho)
 \end{aligned} \tag{I-6}$$

여기에서,

$$G_3 = \begin{vmatrix} 1 & i\rho_j & k\rho_i \\ i\rho_j & 1 & j\rho_k \\ k\rho_i & j\rho_k & 1 \end{vmatrix} : X_i, X_j, X_k \text{의 相關行列式,}$$

$W_{ij}$ : 相關行列 $[G_3]$ 의  $i$ 行  $j$ 列의 餘因數,

$I_n(\sim)$ :  $n$  order 의 變形 Bessel 函數

$$q(\bar{X}_{i,j,k}) = \bar{X}_i \bar{X}_j \bar{X}_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{X}_i^2 + \bar{X}_j^2 + \bar{X}_k^2) \right\}$$

이다. 上記의 (I-6)式을 近似式으로 表現하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 f(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k) & \approx q(\bar{X}_{i,j,k}) \left\{ 1 + i\rho_j^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_i^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_j^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_i^2 \bar{X}_j^2 \right) \right. \\
 & \quad + j\rho_k^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_j^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_k^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_j^2 \bar{X}_k^2 \right) \\
 & \quad \left. + k\rho_i^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_k^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_i^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_k^2 \bar{X}_i^2 \right) \right\} \\
 = & q(\bar{X}_{i,j,k}) \{ 1 + \rho(\bar{X}_{i,j}) + \rho(\bar{X}_{j,k}) + \rho(\bar{X}_{k,i}) \}
 \end{aligned} \tag{I-7}$$

여기에서,

$$\begin{aligned}
 \rho(\bar{X}_{i,j}) & = i\rho_j^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_i^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_j^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_i^2 \bar{X}_j^2 \right) \\
 \rho(\bar{X}_{j,k}) & = j\rho_k^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_j^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_k^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_j^2 \bar{X}_k^2 \right) \\
 \rho(\bar{X}_{k,i}) & = k\rho_i^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{X}_k^2 - \frac{1}{2} \bar{X}_i^2 + \frac{1}{4} \bar{X}_k^2 \bar{X}_i^2 \right)
 \end{aligned}$$

이다.

$\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k$  가 同時에 限界值  $\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k$  를 超過할 確率을 計算하는 近似式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 & P[\bar{X}_i \geq \bar{X}_i^*, \bar{X}_j \geq \bar{X}_j^*, \bar{X}_k \geq \bar{X}_k^*] \\
 &= \int_{\bar{X}_i^*}^{\infty} \int_{\bar{X}_j^*}^{\infty} \int_{\bar{X}_k^*}^{\infty} f(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k) d\bar{X}_i d\bar{X}_j d\bar{X}_k \\
 &\approx e^{-(\bar{X}_i^{*2} + \bar{X}_j^{*2} + \bar{X}_k^{*2})/2} \left[ 1 + \rho_j^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\bar{X}_i^{*2} + 2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}(\bar{X}_j^{*2} + 2) + \frac{1}{4}(\bar{X}_i^{*2} + 2)(\bar{X}_j^{*2} + 2) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \rho_k^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\bar{X}_j^{*2} + 2) - \frac{1}{2}(\bar{X}_k^{*2} + 2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{4}(\bar{X}_j^{*2} + 2)(\bar{X}_k^{*2} + 2) \right\} + \rho_k^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\bar{X}_k^{*2} + 2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}(\bar{X}_i^{*2} + 2) + \frac{1}{4}(\bar{X}_k^{*2} + 2)(\bar{X}_i^{*2} + 2) \right\} \right] \\
 &= Q(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k) \left\{ 1 + \frac{1}{4}(\rho_j^2 \bar{X}_i^{*2} \bar{X}_j^{*2} + \rho_k^2 \bar{X}_j^{*2} \bar{X}_k^{*2} \right. \\
 &\quad \left. + \rho_k^2 \bar{X}_k^{*2} \bar{X}_i^{*2}) \right\} \equiv Q(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*, \bar{X}_k^*) \tag{I-8}
 \end{aligned}$$

여기에서,  $Q(\bar{X}_{i,j,k}^*)$ 는,

$$Q(\bar{X}_{i,j,k}^*) = e^{-(\bar{X}_i^{*2} + \bar{X}_j^{*2} + \bar{X}_k^{*2})/2} = Q(\bar{X}_i^*) Q(\bar{X}_j^*) Q(\bar{X}_k^*)$$

이고,  $X_i, X_j, X_k$ 가 獨立의 경우, 同時에 限界值  $\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*, \bar{X}_k^*$ 를 超過할 確率이다.

$\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k$ 가 同時에 限界值  $\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*, \bar{X}_k^*$ 를 超過하지 않는 確率을 計算하는 近似式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 & P[0 \leq \bar{X}_i \leq \bar{X}_i^*, 0 \leq \bar{X}_j \leq \bar{X}_j^*, 0 \leq \bar{X}_k \leq \bar{X}_k^*] \\
 &= \int_0^{\bar{X}_i^*} \int_0^{\bar{X}_j^*} \int_0^{\bar{X}_k^*} f(\bar{X}_i, \bar{X}_j, \bar{X}_k) d\bar{X}_i d\bar{X}_j d\bar{X}_k \\
 &= 1 - Q(\bar{X}_i^*) - Q(\bar{X}_j^*) - Q(\bar{X}_k^*) \\
 &\quad + Q(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*) + Q(\bar{X}_j^*, \bar{X}_k^*) + Q(\bar{X}_k^*, \bar{X}_i^*) \\
 &\quad - Q(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*, \bar{X}_k^*) \equiv P(\bar{X}_i^*, \bar{X}_j^*, \bar{X}_k^*) \tag{I-9}
 \end{aligned}$$

Fig. 7은 3次元 分布函數를 (I-9)式으로 近似하여 比較한 例이다.

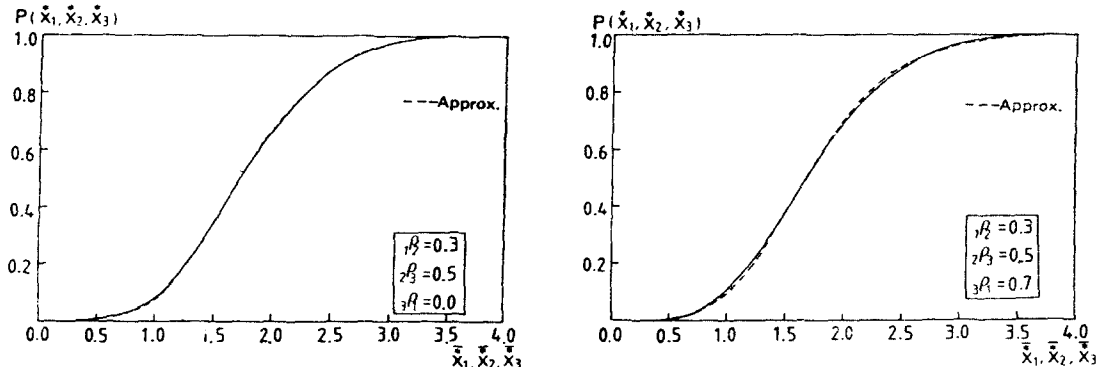


Fig. 7 Three-dimensional cumulative Rayleigh's distribution function and its approximation

## 附 錄 II

$$\begin{aligned}
 Q\{X, V, S\} &\approx \sum_{i=1}^7 Q(\check{X}_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 7} Q(\check{X}_i, \check{X}_j) \\
 &= Q(\check{X}_1) + Q(\check{X}_2) + Q(\check{X}_3) + Q(\check{X}_4) + Q(\check{X}_5) \\
 &\quad + Q(\check{X}_6) + Q(\check{X}_7) - Q(\check{X}_1, \check{X}_2) - Q(\check{X}_1, \check{X}_3) \\
 &\quad - Q(\check{X}_1, \check{X}_4) - Q(\check{X}_1, \check{X}_5) - Q(\check{X}_1, \check{X}_6) - Q(\check{X}_1, \check{X}_7) \\
 &\quad - Q(\check{X}_2, \check{X}_3) - Q(\check{X}_2, \check{X}_4) - Q(\check{X}_2, \check{X}_5) - Q(\check{X}_2, \check{X}_6) \\
 &\quad - Q(\check{X}_2, \check{X}_7) - Q(\check{X}_3, \check{X}_4) - Q(\check{X}_3, \check{X}_5) - Q(\check{X}_3, \check{X}_6) \\
 &\quad - Q(\check{X}_3, \check{X}_7) - Q(\check{X}_4, \check{X}_5) - Q(\check{X}_4, \check{X}_6) - Q(\check{X}_4, \check{X}_7) \\
 &\quad - Q(\check{X}_5, \check{X}_6) - Q(\check{X}_5, \check{X}_7) - Q(\check{X}_6, \check{X}_7) \\
 &\approx Q(\check{X}_1) + Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2} + Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2} + Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2} \\
 &\quad + Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2} + Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} + Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{1+\beta_2-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_2}{\beta_2} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{1+\beta_3-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_3}{\beta_3} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{1+\beta_4-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_4}{\beta_4} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{1+\beta_5-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_5}{\beta_5} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{1+\beta_6-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_6}{\beta_6} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{1+\beta_7-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_7}{\beta_7} \right)^2 \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{1\rho_{72}}{\beta_7} \right)^2 \left\{ \right. \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2+\beta_3-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{2\rho_3}{\beta_2\beta_3} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2+\beta_4-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{2\rho_4}{\beta_2\beta_4} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2+\beta_5-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{2\rho_5}{\beta_2\beta_5} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2+\beta_6-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{2\rho_6}{\beta_2\beta_6} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2+\beta_7-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{2\rho_{71}}{\beta_2\beta_7} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{2\rho_{72}}{\beta_2\beta_7} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2+\beta_4-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{3\rho_4}{\beta_3\beta_4} \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2+\beta_5-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{3\rho_5}{\beta_3\beta_5} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2+\beta_6-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{3\rho_6}{\beta_3\beta_6} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2+\beta_7-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{3\rho_{71}}{\beta_3\beta_7} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{3\rho_{72}}{\beta_3\beta_7} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2+\beta_5-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{4\rho_5}{\beta_4\beta_5} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2+\beta_6-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{4\rho_6}{\beta_4\beta_6} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2+\beta_7-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{4\rho_{71}}{\beta_4\beta_7} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{4\rho_{72}}{\beta_4\beta_7} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2+\beta_6-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{5\rho_6}{\beta_5\beta_6} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2+\beta_7-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{5\rho_{71}}{\beta_5\beta_7} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{5\rho_{72}}{\beta_5\beta_7} \right)^2 \right\} \\
 &- Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2+\beta_7-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{6\rho_{71}}{\beta_6\beta_7} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 \left( \frac{6\rho_{72}}{\beta_6\beta_7} \right)^2 \right\} \\
 &= Q(\check{X}_1) \{ 1 - Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \} \\
 &\quad + Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2} \{ 1 - Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \} \\
 &\quad + Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2} \{ 1 - Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2} \\
 &\quad - Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \} \\
 &\quad + Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2} \{ 1 - Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \} \\
 &\quad + Q(\check{X}_1)^{\beta_5-2} \{ 1 - Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} - Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \} \\
 &\quad + Q(\check{X}_1)^{\beta_6-2} \{ 1 - Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \} + Q(\check{X}_1)^{\beta_7-2} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left( \frac{\check{X}_1}{\sigma_1} \right)^4 Q(\check{X}_1) \left\{ Q(\check{X}_1)^{\beta_2-2} \left( \frac{1\rho_2}{\beta_2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + Q(\check{X}_1)^{\beta_3-2} \left( \frac{1\rho_3}{\beta_3} \right)^2 + Q(\check{X}_1)^{\beta_4-2} \left( \frac{1\rho_4}{\beta_4} \right)^2 \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_5-2}\left(\frac{1\rho_5}{\beta_5}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_6-2}\left(\frac{1\rho_6}{\beta_6}\right)^2 \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{1\rho_{71}}{\beta_{71}}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{1\rho_{72}}{\beta_{72}}\right)^2\} \\
 &-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{X}_1}{\sigma_1}\right)^4 Q(\bar{X}_1)^{\beta_2-2}\left\{Q(\bar{X}_1)^{\beta_3-2}\left(\frac{2\rho_3}{\beta_2\beta_3}\right)^2\right. \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_4-2}\left(\frac{2\rho_4}{\beta_2\beta_4}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_5-2}\left(\frac{2\rho_5}{\beta_2\beta_5}\right)^2 \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_6-2}\left(\frac{2\rho_6}{\beta_2\beta_6}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{2\rho_{71}}{\beta_2\beta_{71}}\right)^2 \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{2\rho_{72}}{\beta_2\beta_{72}}\right)^2\} \\
 &-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{X}_1}{\sigma_1}\right)^4 Q(\bar{X}_1)^{\beta_3-2}\left\{Q(\bar{X}_1)^{\beta_4-2}\left(\frac{3\rho_4}{\beta_3\beta_4}\right)^2\right. \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_5-2}\left(\frac{3\rho_5}{\beta_3\beta_5}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_6-2}\left(\frac{3\rho_6}{\beta_3\beta_6}\right)^2 \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{3\rho_{71}}{\beta_3\beta_{71}}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{3\rho_{72}}{\beta_3\beta_{72}}\right)^2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{X}_1}{\sigma_1}\right)^4 Q(\bar{X}_1)^{\beta_4-2}\left\{Q(\bar{X}_1)^{\beta_5-2}\left(\frac{4\rho_5}{\beta_4\beta_5}\right)^2\right. \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_6-2}\left(\frac{4\rho_6}{\beta_4\beta_6}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{4\rho_{71}}{\beta_4\beta_{71}}\right)^2 \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{4\rho_{72}}{\beta_4\beta_{72}}\right)^2\} \\
 &-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{X}_1}{\sigma_1}\right)^4 Q(\bar{X}_1)^{\beta_5-2}\left\{Q(\bar{X}_1)^{\beta_6-2}\left(\frac{5\rho_6}{\beta_5\beta_6}\right)^2\right. \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{5\rho_{71}}{\beta_5\beta_{71}}\right)^2+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{5\rho_{72}}{\beta_5\beta_{72}}\right)^2\} \\
 &-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{X}_1}{\sigma_1}\right)^4 Q(\bar{X}_1)^{\beta_6-2}\left\{Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{6\rho_{71}}{\beta_6\beta_{71}}\right)^2\right. \\
 &+Q(\bar{X}_1)^{\beta_7-2}\left(\frac{6\rho_{72}}{\beta_6\beta_{72}}\right)^2\} \tag{II-1}
 \end{aligned}$$