

Lyapunov 안정도이론에 기초를 둔 이산기준모델 적응제어

(Discrete Model Reference Adaptive Control based on Lyapunov's Stability Theory)

咸 雲 哲* 崔 桂 根**

(Woon-Chul Ham and Keh-Kun Choi)

要 約

본 논문에서는 모델의 전달함수가 strictly positive real이 되도록 설정함으로써 기존의 Lyapunov 안정도 이론을 토대로 하여 구성된 시연추제어기를, 단일 입, 출력 이산시스템에 적용될 수 있도록 하는 새로운 적응제어이론을 제시하였다. 또한, 제어기의 구조에 있어서 관측기를 사용하였으며, 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 제시한 알고리즘이 안정한 공정 및 불안정한 공정에 대하여 적용될 수 있음을 알 수 있었다.

Abstract

In this paper, we suggest a new adaptive control theory for discrete-time single-input single-output systems based on the Lyapunov's stability theory by using the fact that the transfer function of the model is strictly positive real. And also, observers are used in the structure of controller. The result of computer simulation shows that the proposed algorithm can be applied to both stable and unstable plants.

I. 서 론

최근 많이 이용되는 최적어론제어¹⁾이나 칼만필터이론²⁾을 공정에 도입하기 위해서는 먼저 그 공정의 dynamics를 특정시키는 parameter에 대한 정확한 값이 요구된다. 또한 위의 두 이론 모두는 state feedback에 기초를 두고 있는 관계로, 공정의 state의 정확한 값이 선행되어야 한다. 그러나 대부분의 공정의 parameter들은 환경이 변함에 따라 시간적으로 변화할 뿐 아니라, 일부 parameter들은 전혀 모르는 상태에 있을 수도 있게 된다. 또한 공정의 state들도 외부

에서 직접 측정가능할 경우는 거의 없다. 1966년 Luenberger에 의해 소개된 관측기는³⁾ 공정의 parameter가 알고있는 상황에서만 가능하였다. 그 이후 미지의 공정에 대한 관측기의 구성에 대한 시도가 계속되던 중, 1973년 Lindorff와 Carroll에 의해 적응관측기이론이⁴⁾ 최초로 소개되면서, 위의 문제들을 해결하게 되었다. 적응관측기는 미지상태의 공정 parameter를 추정해 낼 뿐만 아니라 공정의 모든 state도 추정가능하게 한다. 현재는 이 적응관측기의 이론이 multi-input multi-output 시스템에도 확대되어 적용되고 있는 실정이다. 적응제어이론은 위에서 언급한 적응관측기 이론으로 부터 출발하였다. 초기 continuous 시스템에 있어서의 적응제어이론의 parameter adaptation은 Lyapunov's direct method^{5,6)}나 또는 Popov's hyperstability theorem⁷⁻¹⁰⁾을 이용하여 설계하여 왔으며 discrete 시스템에 있어서는 그 이론적 접근방법이 제

*正會員, 서울大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)

**正會員, 全北大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)

接受日字: 1987年 3月 25日

어기구조에 대한 설계와 제어기에 들어가는 parameter의 식별로 나누어져 있다. 최근 parameter 식별 알고리즘으로 Gradient,^[14] Least Square,^[14] Weighted Least Square^[15,16] 알고리즘 등이 소개되고 있으며, 더 나은 식별 알고리즘이 연구중에 있다. 또한 적응제어 이론에 대한 robustness^[17-19]에 대하여서도 많은 연구가 진행중이다.

그러나 discrete 시스템에 있어서는, 그 이론적 접근 방법이 위에서 언급한 바와 같이 둘로 나뉘어져 있는 관계로, 전체적인 시스템의 안정도를 분석하기가 매우 어려운 점이 있다는 단점이 있다. 반면 continuous 시스템의 경우는 제어기의 설계가 Lyapunov 안정도이론을 토대로 하였기 때문에 전체적인 시스템의 안정도 분석이 매우 용이한 점이 있다. 본 논문에서는 단일 입, 출력 discrete 시스템에 적용될 수 있는 새로운 적응제어이론을 Lyapunov 안정도이론을 토대로 하여, 쫓고자 하는 모델의 전달함수를 strictly positive real로 하여 구현하였으며 그 이론적 타당성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 입증하였다.

II. 수학적 기초

본 논문의 이론을 제시하기에 앞서서 본 논문에서 사용되고 있는 수학적 사항들에 대하여 간단히 고찰하여 본다.

[정리 1]

다음과 같은 positive definite 행렬 LL^T(n×n), 벡터 m(n×1)으로 구성된 행렬 M은 positive semidefinite이며 그 고유치 중 하나는 0이며 나머지 n개의 고유치는 모두 양수이다.

$$M = \begin{bmatrix} L \\ m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LL^T & L m \\ m^T L & m^T m \end{bmatrix} \quad (1)$$

[정리 2]

다음과 같은 벡터 c(n×1), 스칼라 d로 구성된 행렬 E는 positive semidefinite하며 적어도 n개의 고유치는 0이다.

$$E = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cc^T & cd \\ dc^T & dd \end{bmatrix} \quad (2)$$

[정리 3]

[정리 1]과 [정리 2]에서 정의된 행렬 M, E에 대하여 만일 행렬 M의 null space, N(M)이 행렬 E의 null space N(E)에 포함된다면 아래 식을 만족하는 양의 μ는 항상 존재한다.

$$x^T M x - \mu x^T E x \geq 0, \quad \forall x \quad (n+1 \times 1) \quad (3)$$

(증명)

i) 만일 x가 N(M)에 속한 경우, x또한 N(E)에 속하므로 다음 식이 성립하며, 따라서[정리3]을 만족한

다.

$$x^T M x - \mu x^T E x = 0 \quad (4)$$

ii) 만일 x가 N(M)에 속하지 않은 경우, x는 아래와 같이 N(M)에 속한 성분 x₁과 속하지 않은 성분 x₂로 나누어 질 수 있다. 즉,

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in N(M), \quad x_2 \notin N(M) \quad (5)$$

이 경우 다음식이 성립한다.

$$x^T M x = x_2^T M x_2 \geq \lambda_m \|x_2\|^2 \quad (6)$$

여기서 λ_m은 행렬 M의 0 아닌 고유치의 최소값이다. 마찬가지로 방법으로 다음식이 성립한다.

$$x^T E x = x_2^T E x_2 \leq \lambda_e \|x_2\|^2 \quad (7)$$

여기서 λ_e는 행렬 E의 0 아닌 고유치이다. 따라서, 만일 μ를 다음과 같이 설정하면 아래식은 항상 성립한다.

$$0 < \mu < \frac{\lambda_m}{\lambda_e} \quad (8)$$

$$x^T M x - \mu x^T E x \geq 0, \quad \forall x \quad \text{: 증명끝} \quad (9)$$

[정리 4]

다음과 같이 안정행렬 A(n×n), 벡터 b, c(n×1), 스칼라 d, 벡터수열 e(k) (n×1), ϕ(k) (m×1), 정행렬 (positive definite matrix) Γ에 대하여, 만일 w(k)가 유한하고, 전달함수 d + c^T(zI - A)⁻¹ b가 strictly positive real이며 N(M)이 N(E)에 속한다고 하면 어떤 양의 μ에 대하여 아래와 같은 식에 대한 평형상태는 안정하며 k가 무한히 커짐에 따라 e₁(k)와 ϕ(k)는 0로 수렴하게 된다.

$$e(k+1) = A e(k) + b \phi(k)^T w(k) \quad (10)$$

$$e_1(k) = c^T e(k) + d \phi(k)^T w(k) \quad (11)$$

$$\phi(k+1) = \phi(k) - \Gamma w(k) e_1(k) \quad (12)$$

단, Γ = μI / (1 + w(k)^T w(k))

[증명]

먼저 다음과 같은 Lyapunov function을 설정한다. 여기서 행렬 P는 정행렬이다.

$$V(e(k), \phi(k)) = e(k)^T P e(k) + \phi(k)^T \Gamma^{-1} \phi(k) \quad (13)$$

이 경우 Kalman-Yacubovich lemma에 의하여 다음과 같은 성질들이 만족된다는 사실은 잘 알려진 사항이다.

즉, d + c^T(zI - A)⁻¹ b가 strictly positive real인 경우 다음과 같은 성질들이 만족된다.

$$A^T P A - A = -Q, \quad Q > 0 \quad (14)$$

$$b^T P A + s^T = c^T \quad (15)$$

$$d + d - b^T P b = r \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} Q & s \\ s^T & r \end{bmatrix} \geq 0 \quad (17)$$

$$A^T P A - P = -LL^T \quad (18)$$

$$b^T P A + m^T L^T = c^T \quad (19)$$

$$m^T m = d + d - b^T P b \quad (20)$$

따라서 위 성질들을 이용하여 $V(e(k+1), \phi(k+1)) - V(e(k), \phi(k))$ 을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & V[e(k+1), \phi(k+1)] - V[e(k), \phi(k)] \\ &= e(k)^T [A^T P A - P] e(k) + 2w(k)^T \phi(k) b^T P A e(k) \\ &\quad + w(k)^T \phi(k) b^T P b \phi(k)^T w(k) - 2e_1(k) \\ &\quad w(k)^T \phi(k) + e_1(k) w(k)^T \Gamma w(k) e_1(k) \\ &= e(k)^T [-LL^T] e(k) + 2w(k)^T \phi(k) [c - m^T L] \\ &\quad e(k) + w(k)^T \phi(k) [-m^T m + 2d] \phi(k)^T w(k) - \\ &\quad 2e_1(k) w(k)^T \phi(k) + e_1(k) w(k)^T \Gamma w(k) e_1(k) \\ &= [e(k)^T \ w(k)^T \ \phi(k)^T] \\ &\quad \begin{bmatrix} -LL^T & -Lm \\ -m^T L & -m^T m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ w(k)^T \ \phi(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + e_1(k) w(k)^T \Gamma w(k) e_1(k) \\ &= [e(k)^T \ w(k)^T \ \phi(k)^T] \\ &\quad \begin{bmatrix} -LL^T & -Lm \\ -m^T L & -m^T m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ w(k)^T \ \phi(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + [e(k)^T \ w(k)^T \ \phi(k)^T] \\ &\quad \begin{bmatrix} cc^T & cd \\ dc^T & dd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ w(k)^T \ \phi(k) \end{bmatrix} \\ &\quad * w(k)^T \Gamma w(k) \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 [정리3]을 이용하여 Γ 을 $\mu I / (1 + w(k)^T w(k))$ 로 놓을 경우

$V(e(k+1), \phi(k+1)) - V(e(k), \phi(k))$ 는 항상 0 보다 같거나 작다: 증명끝

또한 위의 정리를 통하여 다음과 같은 성질이 만족된다.

[성질 1] $\lim_{k \rightarrow \infty} \| e(k)^T \ w(k)^T \ \phi(k) \| = 0$

[성질 2] $\lim_{k \rightarrow \infty} \| e(k) \| = 0$

[성질 3] $\lim_{k \rightarrow \infty} w(k)^T \ \phi(k) = 0$

또한, 만일 $w(k)$ 가 sufficiently rich 이면 다음 성질이 만족된다.

[성질 4] $\lim_{k \rightarrow \infty} \| \phi(k) \| = 0$

III. 제어기구조

제어하고자 하는 최소위상인 공정 및 strictly positive real 성질을 갖는 모델을 다음과 같이 설정한다.

(공정)
 $x_p(k+1) = A_p x_p(k) + b_p u_p(k) \quad (22)$

$y_p(k) = c_p^T x_p(k) + d_p u_p(k) \quad (23)$
 (전달함수)

$$\frac{Y_p(z)}{U_p(z)} = d_p + c_p^T (z I - A_p)^{-1} b_p = \frac{Z_p(z)}{R_p(z)} = W_p(z) \quad (24)$$

(모델)

$$x_m(k+1) = A_m x(k) + b_m r(k) \quad (25)$$

$$y_m(k) = c_m^T x(k) + d_m r(k) \quad (26)$$

(전달함수)

$$\begin{aligned} \frac{Y_m(z)}{R(z)} &= d_m + c_m^T (z I - A_m)^{-1} b_m \\ &= \frac{Z_m(z)}{R_m(z)} = W_m(z) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 A_p, A_m 는 $n \times n$ 행렬, b_p, b_m, c_p, c_m 는 $n \times 1$ 벡터, d_p, d_m 는 스칼라이다.

제어의 목적은 공정의 출력 $y_p(k)$ 가 모델의 출력 $y_m(k)$ 를 좇도록 하는데 있으며, 이러한 목적을 위하여 구성된 전체적인 제어기구조는 그림 1 과 같다.

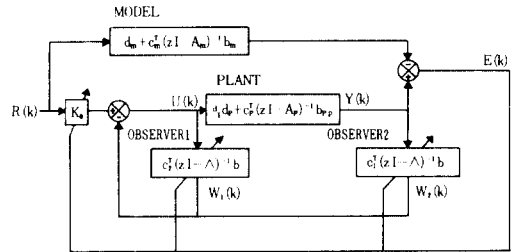


그림 1. 전체적인 시스템의 block diagram.
 Fig. 1. Block diagram of over all system.

그림에서 보는 바와 같이 제어기의 구조에 있어서 관측기를 사용하였다.

[관측기 1]

(관측기 1)

$$v_1(k+1) = \wedge v_1(k) + b u_p(k) \quad (28)$$

$$w_1(k) = c_1^T v_1(k) \quad (29)$$

(관측기 2)

$$v_2(k+1) = \wedge v_2(k) + b y_p(k) \quad (30)$$

$$w_2(k) = c_2^T v_2(k) \quad (31)$$

여기서 \wedge 은 $n \times n$ 안정행렬이며 b, c_1, c_2 는 $n \times 1$ 벡터로써 다음과 같다.

$$b = [0, 0, \dots, 0, 1]$$

$$c_1^T = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}]$$

$$c_2^T = [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}] \quad (32)$$

따라서 관측기 1, 2의 전달함수를 각각 $W_1(z), W_2(z)$ 로 놓으면 다음과 같다.

$$W_1(z) = c_1^T (z I - \wedge)^{-1} b = H_1(z) / N(z) \quad (33)$$

$$W_2(z) = c_2^T (z I - \wedge)^{-1} b = H_2(z) / N(z) \quad (34)$$

따라서 $r(k)$ 와 $y_p(k)$ 사이의 전달함수는 다음과 같다.

$$W(z) = \frac{k_0 W_p(z)}{1 + W_1(z) + W_p(z) W_2(z)}$$

$$= \frac{k_0 k_p Z_p(z) N(z)}{[N(z) + H_1(z)] R_p(z) + k_p Z_p(z) H_2(z)} \quad (35)$$

따라서 $N(z)$ 는 $Z_m(z)$ 를 인수로 갖게되도록 설정하여야 한다. 이 경우 $R_p(z)$ 와 $Z_p(z)$ 가 서로소일 경우 $W(z)$ 를 $W_m(z)$ 로 만드는 $H_1(z)$, k_0 , $H_2(z)$ 는 항상 존재한다. 그림 1에서 보는 바와 같이 제어법칙은 다음과 같다.

$$u_p(k) = k_0 r(k) - w_1(k) - w_2(k)$$

$$= k_0 r(k) - c_1^T v_1(k) - c_2^T v_2(k) \quad (36)$$

이 경우 전체적인 상태방정식은 다음과 같다.

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + b_p u_p(k)$$

$$= A_p x_p(k) + b_p k_0 r(k) - b_p c_1^T v_1(k) - b_p c_2^T v_2(k) \quad (37)$$

$$v_1(k) = \wedge v_1(k) + b u_p(k)$$

$$= \wedge v_1(k) + b k_0 r(k) - b c_1^T v_1(k) - b c_2^T v_2(k) \quad (38)$$

$$v_2(k) = \wedge v_2(k) + b y_p(k)$$

$$= \wedge v_2(k) + b c_1^T x_p(k) + b d_p k_0 r(k) - b d_p c_1^T v_1(k) - b d_p c_2^T v_2(k) \quad (39)$$

$$y_p(k) = c_1^T x_p(k) + d_p k_0 r(k) - d_p c_1^T v_1(k) - d_p c_2^T v_2(k) \quad (40)$$

다음과 같이 θ^* , $\theta(k)$, $w(k)$ 를 정의한다.

$$\theta^{*T} \triangleq [k_0, c_{11}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}]$$

$$\theta(k)^T \triangleq [k_0(k), -c_{11}(k), \dots, -c_{1n}(k), -c_{21}(k), \dots, -c_{2n}(k)]$$

$$w(k)^T \triangleq [r(k), v_1^T(k), v_2^T(k)]$$

$$\theta(k) \triangleq \theta^* + \phi(k) \quad (41)$$

현재 θ^* 가 미지이므로 θ^* 대신 $\hat{\theta}(k)$ 를 대입하며,

위와 같이 정의된 $\theta(k)$, $w(k)$, $\phi(k)$ 를 이용하여 위의 식을 다시표현하면 다음과 같다.

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + b_p \theta^{*T} w(k) + b_p \phi(k)^T w(k) \quad (42)$$

$$v_1(k+1) = \wedge v_1(k) + b \theta^{*T} w(k) + b \phi(k)^T w(k) \quad (43)$$

$$v_2(k+1) = \wedge v_2(k) + b c_1^T x_p(k) + b d_p \theta^{*T} w(k) + b d_p \phi(k)^T w(k) \quad (44)$$

$$y_p(k) = c_1^T x_p(k) + d_p \theta^{*T} w(k) + d_p \phi(k)^T w(k) \quad (45)$$

위의 식을 간략하게 표현하면 다음과 같다.

$$x(k+1) = A_c x(k) + b_c [k_0 r(k) + \phi(k)^T w(k)] \quad (46)$$

$$y_p(k) = c_c^T x(k) + d_c [k_0 r(k) + \phi(k)^T w(k)] \quad (47)$$

여기서 $A_c, b_c, c_c, d_c, x(k)$ 는 각각 다음과 같다.

$$A_c = \begin{bmatrix} A_p & -b_p c_1^T & -b_p c_2^T \\ 0 & \wedge -b c_1^T & -b c_2^T \\ b c_1^T & -b d_p c_1^T & \wedge -b d_p c_2^T \end{bmatrix} d_c = d_p,$$

$$b_c = \begin{bmatrix} b_p \\ b \\ b d_p^T \end{bmatrix}, \quad c_c = \begin{bmatrix} b c_1^T \\ -d_p c_1^T \\ -d_p c_2^T \end{bmatrix}, \quad x(k) = \begin{bmatrix} x_p(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad (48)$$

위 식에서, 만일 $\phi(k)$ 가 0 이라면 위 식은 다음과 같은 모델의 nonminimal 상태표현방정식으로 나타난다.

모델의 nonminimal 상태방정식 :

$$x_{mn}(k+1) = A_{mn} x_{mn}(k) + b_{mn} r(k) \quad (49)$$

$$y_m(k) = c_{mn}^T x_{mn}(k) + d_{mn} r(k) \quad (50)$$

단, 여기서 A_{mn} 은 $(3n \times 3n)$ 행렬이다.

따라서 다음과 같이 오차 $e(k)$ 를 정의하면 아래와 같은 식이 성립된다.

$$e(k) \triangleq x(k) - x_{mn}(k) \quad (51)$$

$$e(k+1) = A_{mn} e(k) + b_{mn} \phi(k)^T w(k) \quad (52)$$

$$e_1(k) = y_p(k) - y_m(k) = c_{mn}^T e(k) + d_{mn} \phi(k)^T w(k) \quad (53)$$

앞 절에서 다루어 본 수학적 사실로부터 모델의 전달함수 $W_m(z) = d_{mn} + c_{mn}^T [zI - A_{mn}]^{-1} b_{mn}$ 이 strictly positive real인 경우 제어기 parameter $\phi(k)$ 를 앞절에서와 같이 설정할 경우, $e_1(k)$ 는 k 가 무한이 증가함에 따라 0으로 접근한다는 사실을 알 수 있으며, 이를 근거로 하여 제어기의 설계가 그 이론적 타당성을 갖고 있다는 사실을 알 수 있다.

IV. 컴퓨터시뮬레이션

본 논문에서의 컴퓨터시뮬레이션은 다음과 같은 두 가지 경우의 공정에 대하여 수행하였다.

[공정 1]

$$y_p(k) = -0.7y_p(k-1) - 0.12y_p(k-2) + u_p(k) + 1.3u_p(k-1) + 0.42u_p(k-2)$$

[공정 2]

$$y_p(k) = -1.5y_p(k-1) - 0.44y_p(k-2) + u_p(k) + 1.3u_p(k-1) + 0.42u_p(k-2)$$

[모델]

$$y_m(k) = -1.2y_m(k-1) - 0.35y_m(k-2) + r(k) + 1.3r(k-1) + 0.4r(k-2)$$

위의 식으로 알 수 있듯이 [공정1]은 안정하며, [공정2]는 불안정 하다. 또한, 초기 제어기 parameter는 아래와 같이 설정하였다.

$$\theta(0)^T = [0, 0, \dots, 0]$$

그림 2는 공정1)에 대하여 $r(k)$ 가 20일 때의 공정의 출력 $y_p(k)$ 및 공정과 모델사이의 출력오차 $e_1(k)$

의 파형으로 μ 를 0.5로 하였다. 그림에서 보듯이 약 20step만에 공정의 출력 $y_r(k)$ 가 ripple 없이 모델의 출력을 잘 쫓고 있음을 알 수 있다. 그림 3은 [공정1]에 대하여 $r(k)$ 가 +20, -20의 구형파 일 경우에 대한 공정의 출력 $y_r(k)$ 및 공정과 모델사이의 출력오차 $e_1(k)$ 의 파형으로 μ 를 0.5로 하였다. 그림에서 보듯이 공정의 출력 $y_r(k)$ 는 k 가 증가함에 따라 점차적으로 모델의 출력을 쫓음을 알 수 있다. 그림4, 5는 불안정한 [공정2]에 대하여 그림2, 3에서와 마찬가지로의 경우로 $r(k)$ 및 μ 를 설정하였을 때의 파형으로 [공정1]에서와 마찬가지로 공정의 출력이 모델의 출력을 잘 쫓고 있음을 알 수 있다.

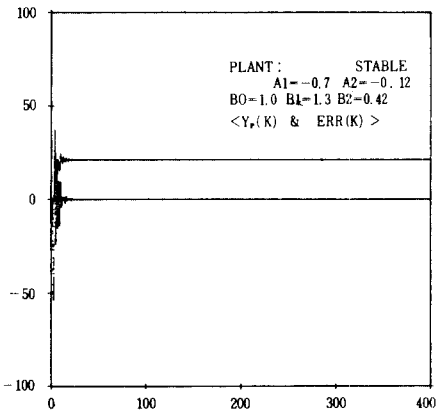


그림 2. 안정한 공정에 대한 D, C 파형 추종곡선
Fig. 2. D. C tracking curve for stable plant.

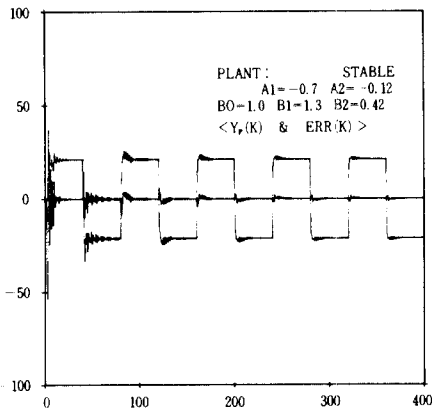


그림 3. 안정한 공정에 대한 구형파 추종곡선
Fig. 3. Pulse tracking curve for stable plant.

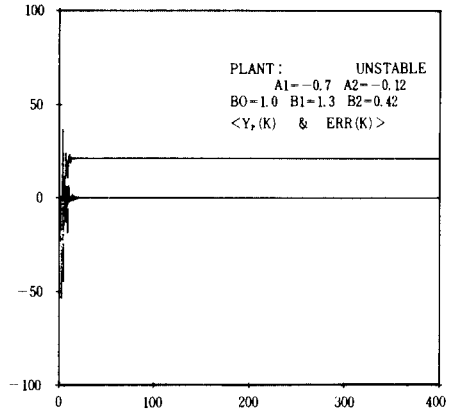


그림 4. 불안정한 공정에 대한 D, C 파형 추종곡선
Fig. 4. D. C. tracking curve for unstable plant.

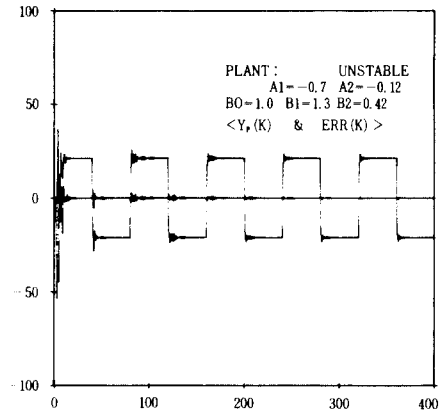


그림 5. 불안정한 공정에 대한 구형파 추종곡선
Fig. 5. Pulse tracking curve for unstable plant.

V. 결 론

본 논문에서는, 전달함수가 positive real일 경우에 성립되는 Kalmam Yacubovirh lemma를 이용하여 기존의 continuous 시스템에 적용되는 Lyapunov 안정도이론에 근거를 둔 제어기의 설계물, discrete 시스템에 적용하여 새로운 적응제어기를 구성하였으며, 제시한 적응제어기에 대한 안정도를 분석하였다.

또한 컴퓨터시뮬레이션을 통하여, 제시한 적응제어기가 안정한 공정 및 불안정한 공정에 대하여 잘 적용됨을 알 수 있었다. 그러나 본 논문에서는 제어하고자 하는 공정이 최소위상이라는 가정하에 출발하였으며, 따라서 비최소위상인 공정에 대하여서는 다소 적용되

지 않음을 예측할 수 있으며 앞으로의 연구는 본 논문의 이론을 좀 더 보강하여 비최소위상 공정에도 적용될 수 있는 제어이론을 찾는 방향으로 진행하겠다.

參 考 文 獻

- [1] Andrew P. Sage, Chelsea Co White III, *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, Inc, 1977.
- [2] Arthur E. Bryson, Jr., Yu-Chi Ho, *Applied Optimal Control*, John Wiley & Sons, 1975.
- [3] Donald E. Kirk, *Optimal Control Theory*, Prentice-Hall, Inc 1970.
- [4] Karl J. Astrom, Introduction to Stochastic Control Theory, *Academic Press*, Inc, 1970.
- [5] Prter S. Maybeck, Stochastic Models, *Estimation and control*, vol.1-2, *Academic Press*, Inc, 1979.
- [6] D. G. Luenberger, "Observing the state of a linear system," *IEEE Trans. Mil. Electron*, vol. Mil-8, pp 74-80, Apr. 1964.
- [7] D. G. Luenberger, "Observers for multi-variable systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, pp 190-197, Apr. 1966.
- [8] R. L. Carroll, D. P. Lindorff, "An adaptive observer for single-input single output linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-18, pp. 428-434, Oct. 1973.
- [9] P. Kudva and K. S. Narendra, "Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov's direct method," *Int. J. Contr.*, vol. 18, pp. 1201-1210, Dec. 1973.
- [10] H. Elliott and W. A. Wolovich, "Parameter adaptive identification and control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-24, Aug. 1979.
- [11] I. D. Landau and H. Silveira, "A stability theorem with application to adaptive control," *IEEE Trans. Automat.*, vol. AC-24, no 2, pp.305-312, Apr. 1979.
- [12] L. Dugard, I. D. Landau and H. M. Silveira, "Adaptive state estimation using MRAS techniques," *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. AC-25, no. 6, pp. 1169-1182, Dec. 1980.
- [13] I. D. Landau, *Adaptive Control*, Dekker, New-York, 1979.
- [14] G. C. Goodwin, P.J. Ramadge and P. E. Cains, "Discrete time multivariable adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, no. 3, June. 1980.
- [15] G. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 2-8, Feb. 1977.
- [16] G. C. Goodwin and K. S. Sin, "*Adaptive Filtering Prediction and Control*," Prentice-Hall, Inc, 1984.
- [17] K. S. Narendra, Y. H. Lin and L. S. Valavni, "Stable adaptive control design, Part II, Proof of stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, pp. 440-448, June. 1980.
- [18] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, "Robust redesign of adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 3, Mar. 1984.
- [19] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, "Instability analysis and Improvement of robustness of adaptive control," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 583-594, 1984.