고정이득 상태궤환을 통한 불확정 선형 시스템의 성능보장제어

(Guaranteed Performance Control of Uncertain Linear Systems via Constant Gain State Feedback)

李 廷 紋,* 崔 桂 根*

(Jung Moon Lee and Keh Kun Choi)

要 約

본 논문에서는 불확정 선형 시스템과 선형 2차 성능지수(linear quadratic performance index)에 의하여 규정되는 제어문제를 고려해 보았다. 시스템 파라미터의 불확정성에 관해서는 확률적인 정보대신 그 크기만이 주어져 있으며, 시스템의 구조에 제한을 가하는 정합조건(matching condition)이 만족된다고 가정한다. 이때 제어법칙은 명목 시스템(nominal system)에 대한 LQ 최적제어(linear quadratic optimal control) 문제의 해로부터 바로 구해진다.

Abstract

This paper investigates the control problem which is specified by an uncertain linear system and a linear quadratic performance index. Only the size of parameter uncertainty is assumed to be given instead of its statistics. In addition, a matching condition which constrains the system structure is assumed to be satisfied. The control law can be obtained by solving an LQ optimal control problem for a nominal system.

I. 서 론

지금까지 불확정 시스템에 대하여 많은 제어이론들이 제시되었는데, 시간영역에서의 제어이론들은 파라미터의 불확정성에 관한 사전 정보에 따라 크게 두 종류로 나누어진다. 하나는 파라미터의 불확정성에 관한 확률적 정보가 주어지는 경우로서 여기에는 정의된 성능지수의 기대치를 최소화하는 확률 접근방식(stochastic approach)[1]이 있고, 다른 하나는 불확정 파라미터가 취할 수 있는 값의 범위만이 주어지는 경우로서 여기에는 허용된 파라미터의 범위내에서 성능지수나 상태궤적의 감도를 최소화하는 감도 접근방식(sensitivity approach)[2]과, 허용된 파라미터의 범위내에서는 원하는 시스템의 성능이 항상 만족되도록 보장하는 성능보장 접근방식(guaranteed performance approach) 등이 있다.

성능보장 접근방식에서의 제어목적은 불확정 파라미터가 허용된 범위내의 어떤 값을 갖더라도 폐루우프 시스템의 안정도나 성능지수가 항상 보장되도록 하는 것이다. 폐루우프 시스템의 안정도 보장을 목적으로 하는 경우에는 보통 시스템의 구조에 제한을 가하는 정합조건이 만족됨을 전제로 하여 Lyapunov 안정도 이론을 적용하는데, 점근적 안정도 보장 접근방식

*正會員, 서울大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)

接受日字 : 1987年 6月 18日

(guaranteed asymptotic stability approach)[3-5]과 궁극적 유계성 보장 접근방식(guaranteed ultimate boundedness approach)[6,7]등이 이에 속한다.

본 논문은 선형 시스템에서 파라미터의 불확정성에 따른 선형 2 차 성능지수의 상계(upper bound)와 성능지수가 이 상계를 넘지 않도록 보장하는 제어법칙을 구하는데 목적이 있다. 성능보장 접근방식 중에서 성능지수 보장을 목적으로 하는 경우에는 불확정 파라미터의 값을 고정시켜서 구한 최적 제어입력을 시스템에 인가했을 때, 성능지수가 취할 수 있는 값의 최대치를 최소화하는 최대최소화 접근방식(minimax approach)[8]을 적용할 수 있다. 그러나 이 방식으로는 선형 시스템의 경우에도 선형 제어기를 구성하기가 힘들고 특히 안장점(saddle point)이 존재하지 않을 때에는 그 해를 구하기가 매우 어려워지므로 실용상 다소간의 문제점이 있다. 반면에 Chang과 Peng이 제안한 성능지수보장 접근방식(guaranteed performance index approach 혹은 guaranteed cost approach)[9] 에서는 파라미터의 불확정성에 따른 성능지수의 상계가 최대최소화 접근방식에서 얻어지는 성능지수의 최소화된 최대치보다 큰 값으로 정해지지만, 이 상계를 보장하는 제어입력을 비교적 간단하게 구할 수 있다. Chang과 Peng은 불확정 선형 시스템과 선형 2 차 성능지수에 의하여 규정되는 제어문제에 이 방식을 적용하여 Riccati 방정식의 해를 구함으로써 상태귀환 제어기를 구성할 수 있었다. 그러나 이 때 성능지수의 상계가 존재하기 위해서는 우선 폐루우프 시스템의 안정도가 보장되어야 하는데, 여기서는 Riccati 방정식의 양의 정부호 해(positive definite solution)가 미리 보장되지 않으므로 폐루우프 시스템의 안정도를 보장할 수 없다는 단점이 있다.

본 논문에서는 파라미터의 불확정성에 관한 정합조건을 가정하고 Lyapunov 안정도 이론을 적용하여 폐루우프 시스템이 항상 점근적으로 안정하도록 하였다. 이 때 제어법칙은 명목 시스템에 대한 LQ 최적제어 문제의 해로부터 바로 구해지며, LQ 최적제어 문제에서의 최적 성능지수가 파라미터의 불확정성에 따른 선형 2 차 성능지수의 상계가 된다.

Ⅱ. 불확정 선형 시스템의 성능보장 제어문제

1. 문제의 설정

불확정 선형 시스템은 다음과 같은 상태방정식으로 표현된다.

$$\dot{x}(t)=[A+\triangle A(r(t))]\,x(t)+[B+\triangle B(s(t))]\,u(t);\quad x(0)=x_0;\ t\geq 0 \qquad (1)$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태벡터, $u(t)\in R^m$은 입력벡터이다. 또 $r(t)\in \mathcal{R}\subset R^k$와 $s(t)\in \mathcal{S}\subset R^l$은 불확정성 벡터로서 이들은 각각 밀집집합(compact set) $\mathcal{R}$과 $\mathcal{S}$에 속하고 $(A+\triangle A(r(t)),\ B+\triangle B(s(t)))$는 $t\geq 0$ 에서 제어 가능한 행렬의 짝이다. 성능지수는

$$J(u(.))=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x'(t)Qx(t)+u'(t)Ru(t)]\,dt \qquad (2)$$

로 정의되는데, Q는 양의 반정부호 대칭행렬(positive semidefinite symmetric matrix)이고 R은 양의 정부호 대칭행렬(positive definite symmetric matrix) 이다. 또 $(A+\triangle A(r(t)),\ Q^{1/2})$는 $t\geq 0$에서 관측 가능한 행렬의 짝이다.

이 때 유한한 값 V가 존재하여 시스템 파라미터의 불확정성에도 불구하고, 성능지수가 항상 V이하로 되는 제어법칙을 구하고자 한다. 여기서 다음과 같은 정합조건(matching condition)을 만족하는 연속 행렬함수 D(.)와 E(.)가 존재한다고 가정한다.

$$\triangle A(r)=BD(r);\qquad \forall r\in \mathcal{R} \qquad (3)$$

$$\triangle B(s)=BE(s);\qquad \forall s\in \mathcal{S} \qquad (4)$$

$$E(s)R^{-1}+R^{-1}E'(s)\geq R^{-1}\qquad \forall s\in \mathcal{S} \qquad (5)$$

2. 문제의 재설정

앞에서 제시한 가정(5)는 기존의 성능보장제어[7,10]에서 이에 해당하는 조건

$$E(s)+E'(s)+2I>0;\ \forall s\in \mathcal{S} \qquad (6)$$

보다 만족시키기가 어려운 것처럼 보인다. 그러나 식(5)가 성립되지 않더라도 식(6)과 유사한 조건

$$E(s)R^{-1}+R^{-1}E'(s)+2R^{-1}>0;\ \forall s\in \mathcal{S} \qquad (7)$$

이 만족되면 아래와 같이 문제를 재설정하여 본 논문에서 제안하는 제어기의 설계방법을 그대로 적용할 수 있다.

즉 식(5) 대신 식(7)이 성립한다면, E(.)가 연속이므로

$$E(s)R^{-1}+R^{-1}E'(s)\geq \alpha R^{-1}>-2R^{-1};\ \forall s\in \mathcal{S} \qquad (8)$$

을 만족하는 상수 $\alpha>-2$가 항상 존재한다. 이 때

$$\beta\triangleq\frac{2+\alpha}{3} \qquad (9)$$

라 정의하고

$$\overline{A}=A \qquad (10)$$

$$\overline{B}=\beta B \qquad (11)$$

$$\overline{D}(r)=\frac{1}{\beta}D(r);\qquad \forall r\in \mathcal{R} \qquad (12)$$

$$\overline{E}(s)=\frac{1}{\beta}E(s)-\left(1-\frac{1}{\beta}\right)I;\quad \forall s\in \mathcal{S} \qquad (13)$$

라고 하면, 식(8)과 (13)에 의해서

$$\bar{E}(s)R^{-1}+R^{-1}\bar{E}'(s)\geq R^{-1};\ ^{\forall}s\in S \tag{14}$$

가 만족된다. 따라서

$$\triangle\bar{A}(r)=\overline{BD}(r);\ ^{\forall}r\in R \tag{15}$$

$$\triangle\bar{B}(s)=\overline{BE}(s);\ ^{\forall}s\in S \tag{16}$$

라고 하면, 식(10)~(13) 및 식(15)와 (16)에 의하여

$$A+\triangle A(r)=\bar{A}+\triangle\bar{A}(r);\ ^{\forall}r\in R \tag{17}$$

$$B+\triangle B(s)=\bar{B}+\triangle\bar{B}(s);\ ^{\forall}s\in S \tag{18}$$

이 되므로, 식(1)을

$$\dot{x}(t)=[\bar{A}+\triangle\bar{A}(r(t))]x(t)+[\bar{B}+\triangle\bar{B}(s(t))]u(t) \tag{19}$$

로 바꾸어 쓸 수 있다. 그러므로 다음에 제안하는 제어기의 설계방법을 식(19)와 (2)로 규정되는 제어문제에 바로 적용하면 된다.

Ⅲ. 성능보장 제어기의 설계

1. 성능보장 제어기의 상태귀환 이득

식(1)과 (2)로 규정되는 성능보장 제어문제의 제어법칙을 구하기 위해서 먼저 상태방정식과 성능지수가 각각

$$\dot{\bar{x}}(t)=A\bar{x}(t)+Bu(t);\ \bar{x}(0)=x_0;\ t\geq 0 \tag{20}$$

$$\bar{J}(u(.))=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[\bar{x}'(t)\overline{Qx}(t)+u'(t)Ru(t)]dt \tag{21}$$

로 규정되는 LQ 최적제어 문제를 생각해 보기로 하자. 식(20)은 식(1)에서 불확정 파라미터 행렬들을 모두 0이라고 가정한 명목 시스템의 상태방정식이며, 식(21)에서 상태가중행렬(state weighting matrix) $\bar{Q}$는

$$\bar{Q}=Q+M \tag{22}$$

이고, 여기서 M은

$$D'(r)RD(r)\leq M;\ ^{\forall}r\in R \tag{23}$$

을 만족하는 양의 반정부호 대칭행렬이다. 이 LQ 최적제어 문제의 해는 잘 알려진 바와 같이[11]

$$u(t)=\bar{u}^o(t)\triangleq -R^{-1}B'K\bar{x}(t) \tag{24}$$

이고, 여기서 행렬 K는 대수 행렬 Riccati 방정식

$$KA+A'K+\bar{Q}-KBR^{-1}B'K=0 \tag{25}$$

의 양의 정부호 해이다. 또 이 때 성능지수의 최적치는

$$\bar{J}^o\triangleq\bar{J}(\bar{u}^o(.))=\frac{1}{2}x_0'Kx_0 \tag{26}$$

가 된다.

[정리]

식(1)과 (2)로 규정되는 성능보장 제어문제의 해는 식(20)과 (21)로 규정된 LQ 최적제어 문제의 해로부터

$$u(t)=u^o(t)\triangleq -R^{-1}B'Kx(t) \tag{27}$$

가 되며, 이 때 불확정 시스템(1)은 파라미터의 불확정성에도 불구하고 항상 점근적으로 안정하고, 성능지수(2)는 $\bar{J}^o$ 이하로 보장된다.

2. 정리의 증명

불확정 선형 시스템(1)에 제어입력(27)이 가해지면 폐루우프 시스템의 상태방정식은

$$\dot{x}(t)=[A+\triangle A(r(t))]x(t)-[B+\triangle B(s(t))]R^{-1}B'Kx(t) \tag{28}$$

이 된다. 폐루우프 시스템 (28)에 대한 Lyapunov 함수를

$$V(x,t)=\frac{1}{2}x'Kx \tag{29}$$

이라고 정의하면 Lyapunov 도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x,t)&\triangleq\dot{V}(x,t)\\&=x'K[A+\triangle A(r(t))]x\\&\quad -x'K[B+\triangle B(s(t))]R^{-1}B'Kx\\&=x'K[A+BD(r(t))]x\\&\quad -x'KB[R^{-1}+E(s(t))R^{-1}]B'Kx\\&=\frac{1}{2}x'[KA+A'K]x+x'KBD(r(t))x\\&\quad -\frac{1}{2}x'KB[E(s(t))R^{-1}+R^{-1}E'(s(t))+\\&\quad +2R^{-1}]B'Kx\\&\leq\frac{1}{2}x'[KA+A'K]x+x'KBD(r(t))x\\&\quad -\frac{3}{2}x'KBR^{-1}B'Kx\end{aligned} \tag{30}$$

여기서 마지막 부등식은 가정(5)의 결과이다. 그런데 R은 양의 정부호 대칭행렬이므로 정칙(nonsingular) 대칭행렬 $R^{1/2}$이 존재한다. 따라서 식(23)을 이용하면 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}x'KBD(r(t))x&=x'KBR^{-1/2}R^{1/2}D(r(t))x\\&\leq\frac{1}{2}x'KBR^{-1}B'Kx\\&\quad +\frac{1}{2}x'D'(r(t))RD(r(t))x\\&\leq\frac{1}{2}x'KBR^{-1}B'Kx+\frac{1}{2}x'Mx\end{aligned} \tag{31}$$

식(31)을 식(30)에 대입하면

$$\mathscr{L}(x,t)\leq\frac{1}{2}x'[KA+A'K]x+\frac{1}{2}x'Mx-x'KBR^{-1}B'Kx \tag{32}$$

이 되고, 식(25)에 의해서 Lyapunov 도함수는 결국

$$\mathscr{L}(x,t)\leq-\frac{1}{2}x'[Q+KBR^{-1}B'K]x \tag{33}$$

을 만족하게 된다. 이 때 $(A+\triangle A(r(t)),Q^{1/2})$가 $t\geq$

0에서 관측 가능한 행렬의 짝이므로 Lyapunov 안정도 이론에 의해서 폐루우프 시스템 (28)은 항상 점근적으로 안정하다.[11]

한편 식(33)의 양변을 $t \geq 0$에서 적분하면

$$V(x, t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} \leq -\frac{1}{2}\int_0^\infty x'(t)[Q+KBR^{-1}B'K]x(t)dt \tag{34}$$

이 되는데, 점근적으로 안정한 시스템에서는

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{35}$$

이므로 식(34)는

$$-\frac{1}{2}x_0'Kx_0 \leq -\frac{1}{2}\int_0^\infty x'(t)[Q+KBR^{-1}B'K]x(t)dt$$

혹은

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x'(t)[Q+KBR^{-1}B'K]x(t)dt \leq \frac{1}{2}x_0'Kx_0 \tag{36}$$

가 된다. 여기서 식(36)의 좌변은 제어입력(27)이 인가된 불확정 선형 시스템의 성능지수이고, 우변은 명목 시스템에 대한 최적 성능지수임을 알 수 있다. 즉

$$J(u^o(.)) \leq \bar{J}^o \tag{37}$$

이므로 제어법칙 식(27)에 의해서 불확정 선형 시스템 식(1)에 대한 성능지수는 $\bar{J}^o$ 이하로 보장된다. [증명끝]

Ⅳ. 예제 및 검토

상태방정식과 성능지수가 각각

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.6r \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t);$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \ t \geq 0 \tag{38}$$

$$J(u(.)) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_1^2(t) + u^2(t))dt \tag{39}$$

로 규정되는 제어문제를 고려해 보자. 여기서 불확정 파라미터 $-1 \leq r \leq 1$은 시불변이다. 명목 시스템을

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

라고 정의하면

$$\triangle A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6r \end{bmatrix} \qquad \triangle B(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

이므로

$$D(r) = [0 \ 0 \ 1.6r] \qquad E(s) = 0 \tag{42}$$

이다. 그런데 $R=1$이므로 식(5) 대신 식(7)이 만족된다. 이 때 식(8)에서 $\alpha=0$이 되므로 $\beta=2/3$로 하여 명목 시스템을 다시 정의하면

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \tag{43}$$

이 되고

$$\triangle \bar{A}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6r \end{bmatrix} \qquad \triangle \bar{B}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \tag{44}$$

이므로

$$\bar{D}(r) = [0 \ 0 \ 2.4r] \qquad \bar{E}(s) = 1/2 \tag{45}$$

이다. 여기서 $\triangle\bar{B}(s)$나 $\bar{E}(s)$가 실제로 불확정 파라미터를 포함하지는 않는다는 사실에 주목해야 한다.

식(43)~(45)로 재설정된 제어문제에서

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.76 \end{bmatrix} \tag{46}$$

이면 식(23)이 만족되므로, 대수 행렬 Riccati 방정식 (25)의 양의 정부호 해는

$$K = \begin{bmatrix} 2.73 & 3.74 & 1.50 \\ 3.74 & 8.71 & 4.10 \\ 1.50 & 4.10 & 5.60 \end{bmatrix} \tag{47}$$

이다. 따라서 제어법칙은 식(27)에 의해서

$$u(t) = u^o(t) = -[1.50 \ 4.10 \ 5.60]x(t) \tag{48}$$

이 되고, 이를 불확정 시스템(38)에 인가하면 폐루우프 시스템은

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.50 & -4.10 & 1.6r-5.60 \end{bmatrix} x(t) \tag{49}$$

가 되어 $-1 \leq r \leq 1$에서 항상 점근적으로 안정하다. 이 때 성능지수 (39)의 상계는

$$\bar{J}^o = 17.86 \tag{50}$$

이다. 그림 1은 제어입력 (48)이 불확정 시스템 (38)에 인가되었을 때 불확정 파라미터 r의 값에 따른 실제 성능지수의 값을 나타낸 것이다. 여기서 실제 성능지수의 값은 파라미터의 불확정성에도 불구하고 항상 $\bar{J}^o$ 이하로 보장됨을 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 불확정 선형 시스템과 선형 2차 성능지수에 의하여 규정되는 제어문제에서 불확정 파라미터가 허용된 범위내의 어떤 값을 갖더라도 폐루우프 시스템의 안정도와 성능지수의 상계를 보장하는 고정이득 상태귀환 제어기의 설계방법을 제시하였다. 이는

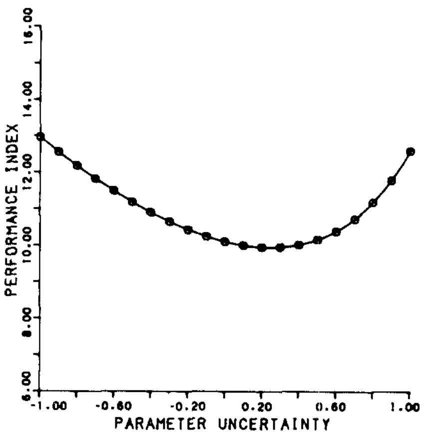

그림 1. 파라미터의 불확정성에 따른 실제 성능지수

Fig. 1. Actual performance index with respect to the parameter uncertainty.

불확정 시스템이 정합조건을 만족할 때 그 명목 시스템에 대한 LQ 최적제어기를 설계하는 것으로서, 기존의 방법들에 비해서 매우 간단하면서도 안정도와 성능지수의 두가지 측면을 모두 보장할 수 있다는 장점이 있다.

이와 같은 방법으로 불확정 선형 시스템에 대한 고정이득 상태귀환 제어기를 설계하였을 때 파라미터의 불확정성에도 불구하고 항상 원하는 성능이 만족됨을 예제에서 확인할 수 있었다. 예제에서는 불확정 파라미터가 시불변인 경우를 보였지만, 불확정 파라미터가 시변인 경우에도 설계방법은 동일하게 적용된다.

參 考 文 獻

[1] W.E. Hopkins, Jr., "Optimal control of linear systems with parameter uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, no. 1, pp. 72-74, Jan. 1986.

[2] M. Sobral, Jr., "Sensitivity in optimal control systems", *Proc. IEEE,* vol. 56, pp. 1644-1652, Oct. 1968.

[3] J.S. Thorp and B.R. Barmish, "On guaranteed stability of uncertain linear systems via linear control," *J. Optimiz. Theory Appl.,* vol. 35, no. 4, pp. 559-579, Dec. 1981.

[4] B.R. Barmish, "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system", *J. Optimiz. Theory Appl.,* vol. 46, no. 4, pp. 399-408, Aug. 1985.

[5] B.R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann, "A new class of stabilizing controller for uncertain dynamical systems", *SIAM J. Contr. Optimiz.,* vol. 21, no. 2, pp. 246-255, Mar. 1983.

[6] G. Leitmann, "Guaranteed ultimate boundedness for a class of uncertain linear dynamical systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. AC-23, no. 6, pp. 1109-1110, Dec. 1978.

[7] B.R. Barmish, I.R. Petersen, and A. Feuer, "Linear ultimate boundedness control of uncertain dynamical systems", *Automatica,* vol. no. 19, 5, pp. 523-532, 1983.

[8] J.L. Speyer and U. Shaked. "Minimax design for a class of linear quadratic problems with parameter uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. AC-19, no. 2, pp. 158-159, Apr. 1974.

[9] S.S.L. Chang and T.K.C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. AC-17, no. 4, pp. 474-483, Aug. 1972.

[10] W.E. Schmitendorf and B.R. Barmish, "Guaranteed asymptotic stability for systems with constant disturbances", in *Proc. 1985 Amer. Contr. Conf.,* Boston, MA, pp. 778-781.

[11] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Linear Optimal Control,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., pp. 31-49, 1971.