

콘크리트의 파괴거동규명과 等價龜裂길이 理論確立에 관한 研究

Fracture Behavior of Concrete and Equivalent Crack Length Theory

吳 炳 煥*
Oh, Byung Hwan

Abstract

Several series of fracture tests were conducted to explore the fracture characteristics and to determine the fracture energy of concrete. A stable three-point bend test was employed to generate the load-deflection curves. The fracture energy may then be calculated from the area under the complete load-deflection curve. The initial notch-to-beam depth ratio (a_0/H) was varied from zero to 0.6. The prediction formula for the fracture energy of concrete is also derived and is found to depend on the tensile strength and aggregate size. The proposed fracture energy formula can be used for the fracture analysis of concrete structures. The present study also devises an equivalent crack length concept to predict the maximum failure loads of concrete beams. A simple formula for the equivalent crack length is proposed.

要 旨

本 論文에서는 콘크리트의 파괴실험을 통하여 파괴거동을 규명하고 파괴에너지를 결정하였으며, 이로부터 파괴에너지 예측공식을 도출하였다. 콘크리트의 파괴실험은 3점휨하중실험을 수행하였으며 초기균열길이에 따른 파괴거동과 파괴에너지의 변화특성을 규명하기 위하여 초기균열길이를 보강이의 각각 0, 0.2, 0.4, 0.6 배로 하였다. 본 실험으로부터 하중-처짐곡선이 자동으로 기록되었으며, 이 하중-처짐곡선의 면적이 콘크리트의 파괴에너지를 결정하기 위하여 이용되었다. 본 연구에서 도출된 파괴에너지 예측공식은 콘크리트구조물의 파괴해석을 위해 효과적으로 이용될 수 있으며, 파괴에너지가 콘크리트의 인장강도와 골재크기에 의존하고 있음을 나타내고 있다. 또한, 본 연구에서는 콘크리트보의 최대하중을 계산하기 위하여 소위 등가균열길이 개념을 고안하였으며, 이를 위하여 등가균열길이에 대한 예측공식을 제안하였다. 본 등가균열길이 개념은 R-curve 등에 의하지 않고도 파괴하중을 계산할 수 있는 효과적인 개념으로 분석되고 있다.

1. 序 論

破壞力學理論이 금속이나 기타재료에 대하여 활발하게 연구되고 있는 가운데, 최근 들어 콘

크리트의 破壞舉動에 대해서도 아주 깊은 관심을 갖게 되었다. 콘크리트의 파괴거동은 本 研究者^(6,7)를 비롯하여 많은 연구자들이^(2-6,9-15,17,22-30) 최근에 활발하게 연구를 수행하고 있다.

콘크리트의 破壞韌性(fracture toughness)은 線

* 正會員·서울大學校 工科大學 助教授, 土木工學科

型彈性破壞力學(linear elastic fracture mechanics)理論의 수정없이 직접적으로 구하기 어렵다는 것이 최근 들어 점점 인식되고 있다. 이것은 콘크리트의 균열 끝에서 소위 파괴진행대(fracture process zone)라는 비선형거동영역이 아주 크게 존재하기 때문이며, 이 비선형거동영역은 주로 콘크리트균열 끝에서의 미세균열현상으로 인해 발생된다. 콘크리트의 이러한 파괴진행대는 금속이나 기타 공학재료의 그것에 비해 아주 크기 때문에 콘크리트의 파괴인성측정을 어렵게 하고 있다. 또한, 콘크리트균열끝에서 미세균열이 발생하기 때문에 하중증가에 따른 균열의 전파길이를 정확하게 측정할 수 없게 된다.

이러한 어려움을 극복하기 위한 한가지 방법은 하중—처짐線圖(load-deflection diagram)를 이용하는 방법이며, 하중—처짐곡선하의 면적을 측정함으로써 콘크리트의 파괴에너지를 계산할 수 있다. 그러나, 이 방법을 사용하기 위해서는 몇 가지 고려해야 할 문제가 있다. 먼저 콘크리트의 파괴진행대 밖에서 소모되는 에너지의 양이 무시할 정도로 작아야 한다. 콘크리트의 초기균열이 보(beam)의 높이에 비하여 아주 작을 경우에는 파괴진행대 영역밖의 부분이 응력을 많이 받게 되어 추가적인 에너지소모가 뒤따르게 된다. 따라서, 이 경우의 콘크리트 파괴에너지는 실제값보다 크게 계산되게 된다. 콘크리트 파괴 실험에서 또 한가지 고려해야 할 사항은 파괴의 안정성이다. 즉, 파괴가 점진적으로 안정하게 이루어져야 하며 이렇게 함으로서 원활한 하중—처짐곡선을 얻을 수 있게 된다.

本 研究의 目的은 3 點荷 하중시험을 이용하여 콘크리트의 파괴에너지를 결정하고, 이로부터 파괴에너지를 예측할 수 있는 공식을 제안하는데 있으며, 또한 콘크리트보의 파괴하중을 계산하기 위하여 等價龜裂길이(equivalent crack length)개념을 고안하고자 한다. 콘크리트의 파괴에너지는 콘크리트구조물의 파괴해석을 수행하기 위하여 반드시 필요하며 따라서 이에 대한 예측공식의 제안은 중요한 意味를 부여한다.

2. 콘크리트의 破壞實驗

2.1 實驗部材의 材料, 製作 및 養生

콘크리트의 파괴실험을 수행하기 위하여 일련의 콘크리트보(beam)를 제작하였다. 각 시리즈의 콘크리트에 대한 배합성분과 강도특성이 表 1에 요약되어 있다. 골재의 최대치수는 25 mm 였으며 시멘트는 보통포트랜드시멘트를 사용하였다. 보의 크기는 100×100×400 mm 였으며 제작 후 습윤양생을 실시하였다. 각 시리즈의 콘크리트보는 4 가지의 서로 다른 초기 낫취를 갖게 하였으며, 초기균열길이 a_0 와 보의 깊이 H 의 比를 각각 $a_0/H=0, 0.2, 0.4, 0.6$ 으로 하였다. 초기균열길이를 이와 같이 다르게 한 이유는 콘크리트의 파괴에너지가 초기균열길이에 따라 어떻게 변화하는지를 규명하기 위함이었다.

表 1. 콘크리트의 배합성분과 강도

	Number of Specimens	Mix Proportions (C : S : G : W)	Compressive Strength (N/mm ²)	Monotonic (M) or Cyclic (C)
Series 1	8	1 : 1.88 : 2.86 : 0.41	25.8	M
Series 2	4	1 : 1.88 : 2.90 : 0.41	27.5	M
Series 3	4	1 : 2.44 : 3.44 : 0.49	21.5	C
Series 4	8	1 : 3.07 : 4.09 : 0.58	20.3	M, C
Series 5	8	1 : 1.88 : 2.86 : 0.41	26.2	C

Note : C=Cement, S=Sand, G=Gravel (Coarse Aggregate), W=Water

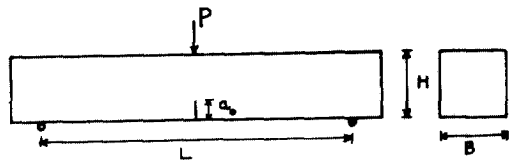


그림 1. 콘크리트의 파괴실험 개략도

2.2 實驗方法 및 實驗結果

콘크리트보는 3 점하중상태(three-point loading condition)로 재하되었으며, 이에 대한 개략적 그림이 그림 1에 도시되어 있다. 실험은 Instron 시험기에 의해 수행되었으며, 하중은 0.05 mm/min 속도로 모든 시편에 대하여 일정하게 작용되었다. 실험수행과정으로부터 하중—처짐곡선이 자동으로 기록되었으며 일련의 시편에 대해서는 하중제거(unloading)와 再載荷(reloading) 등의 반복하중을 실시하였다. 이러한 반복하중을 실시한 이유는 하중정도에 따른 콤플라이언스

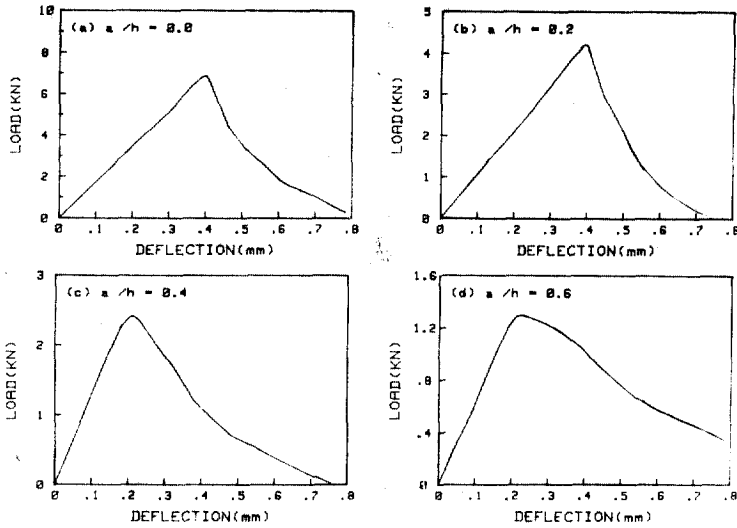


그림 2. 하중—처짐線圖 (Series-1 Concrete)

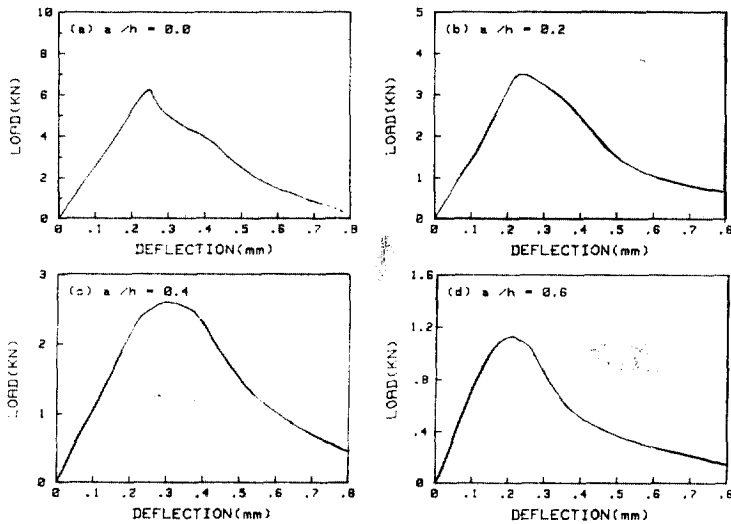


그림 3. 하중—처짐線圖 (Series-2 Concrete)

(compliance)의 변화를 알기 위함이었다.

본 실험으로부터 얻어진 結果들이 그림 2에서 부터 그림 6까지 각 시리즈별로 도시되어 있다. 이 그림들은 초기균열이 커짐에 따라 최대파괴 하중이 크게 감소하고 있음을 보여주고 있다.

3. 콘크리트의 破壞에너지

3.1 破壞에너지의 決定

이제 前節에서 얻은 實驗結果를 利用하여 콘크리트의 파괴에너지를 결정할 수 있다. 콘크리

트의 파괴에너지는 파괴실험에서 얻은 하중—처짐線圖의 면적으로부터 구할 수 있다. 즉, 이 면적은 콘크리트의 균열이 전파함으로서 소모된 에너지를 表示한다. 또한, 작용된 하중 이외에 콘크리트보의 자중에 의한 영향을 고려해야하므로 콘크리트의 파괴에너지는 결국 다음과 같이 표시할 수 있다⁽³⁰⁾.

$$G_f = \frac{\int_0^{\delta_0} P(\delta) d\delta + mg\delta_0}{B(H-a_0)} \quad (1)$$

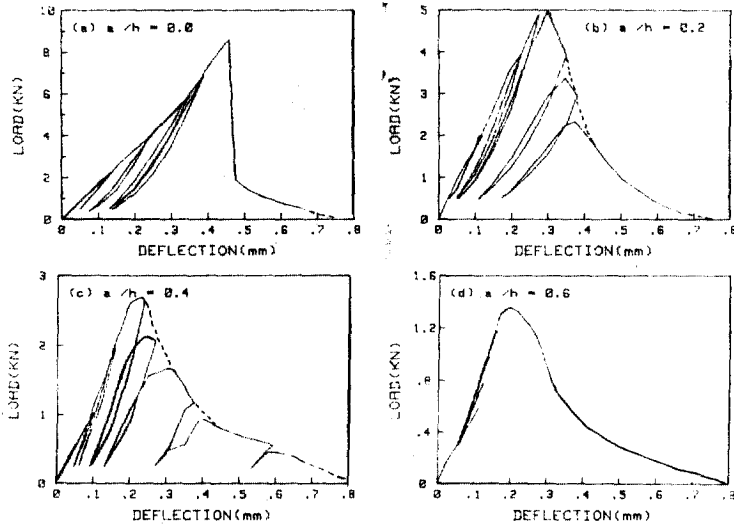


그림 4. 하중—처짐線圖 (Series-3 Concrete)

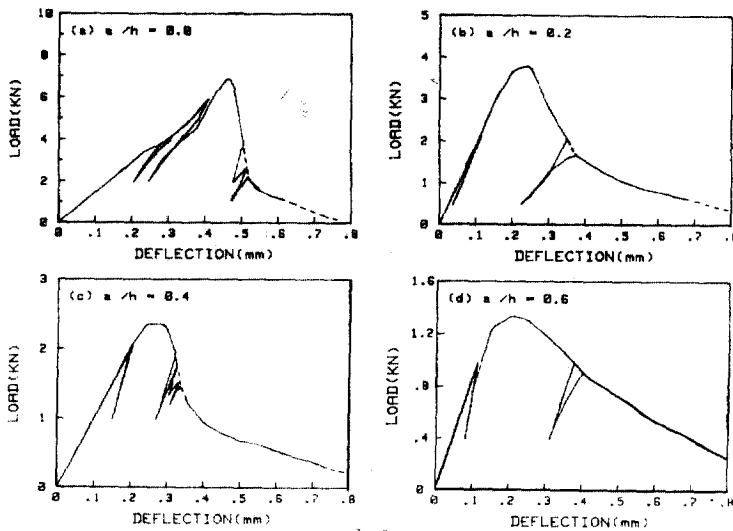


그림 5. 하중—처짐線圖 (Series-4 Concrete)

여기서, δ_0 =콘크리트보의 최대처짐, m =보의 질량, g =중력가속도, B =보의 폭, H =보의 깊이, a_0 =초기균열길이를 나타낸다. 上記式(1)의 分子의 첫번째항은 하중—처짐線圖의 面積을 나타내고, 두번째항은 自重의 영향을 表示한다.

上記式(1)에 따라 파괴에너지를 계산한 결과가 그림 7에 圖示되어 있다. 그림 7에서 보는 바와 같이 초기균열이 커짐에 따라 콘크리트의 파괴에너지가 감소함을 알 수 있으며, 균열길이 가 어느 정도 이상에서는 그 감소의 폭이 줄어들어

들어 일정해지는 경향을 보이고 있다. 초기균열이 아주 작은 경우에 파괴에너지가 크게 계산되는 것은 파괴진행대 외곽의 콘크리트가 응력을 많이 받아 추가적인 에너지가 소모되기 때문인 것으로 인식되고 있다. 또한, 초기균열이 아주 과다하게 클 경우에는 균열이 전파할 부분(ligament)이 작아 파괴진행대(fracture process zone)가 충분히 발달할 수 없으므로 파괴에너지가 약간 작게 계산되어 나오게 된다⁽⁶⁾. 따라서, 콘크리트의 파괴에너지 계산에 적합한 초기균열길이

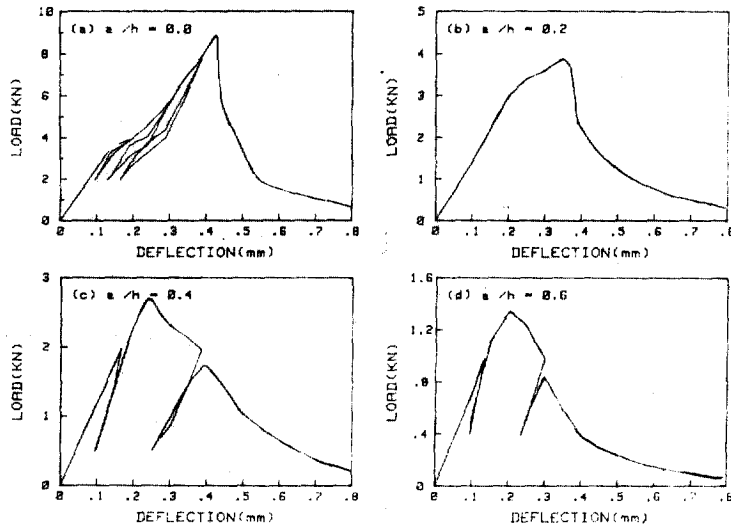


그림 6. 하중-처짐線圖 (Series-5 Concrete)

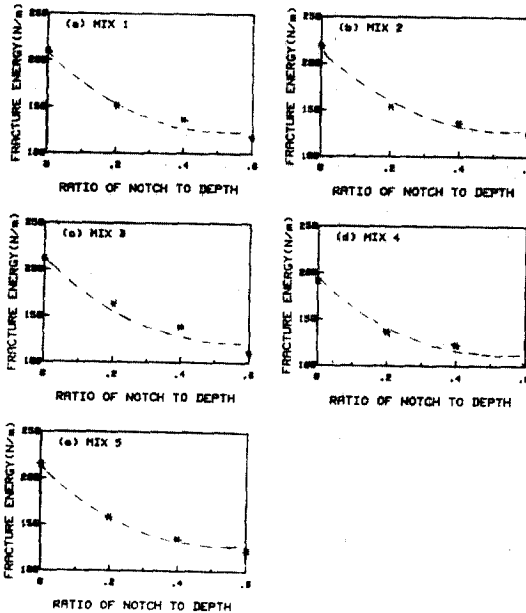


그림 7. 초기균열길이에 따른 콘크리트 파괴에너지의 변화

表 2. 각 시리즈 콘크리트에 대한 파괴에너지

	평균파괴에너지 (N/m)
Series 1	132.0
Series 2	134.8
Series 3	129.0
Series 4	116.6
Series 5	132.9

는 $a_0/H=0.5$ 로 고려될 수 있다^(6,22). 이에 따라 계산된 각 시리즈의 콘크리트에 대한 파괴에너지 값이 표 2에 요약되어 있다. 본 연구결과 콘크리트보의 자중이 파괴에너지에 미치는 영향은 크지 않으며, 전 에너지값의 약 4~11% 정도로 나타났다.

3.2 파괴에너지 예측공식의 도출

콘크리트구조물의 파괴해석을 수행하기 위해서는 파괴에너지 G_f 값을 알아야 한다. 따라서, 각 주어진 콘크리트에 대한 파괴에너지의 예측이 필요하게 된다.

이제 파괴에너지의 예측을 위하여 균열끝의 파괴진행영역을 고려하기로 한다. 파괴진행영역에서는 미세균열현상이 수반되고 이것은 變形軟化현상을 나타내는 응력-변형관계로 서술될 수 있다. 이 응력-변형거동은 그림 8(a)와 같이 2개의 선형구간(bilinear stress-strain diagram)으로 理想化될 수 있다⁽⁶⁾. 이 그림으로부터 콘크리트의 파괴에너지는 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$G_f = w_c A = \frac{1}{2} w_c \epsilon_0 f'_c \quad (2)$$

여기서, w_c =미세균열진행대의 폭= $c_0 d_a$,⁽⁶⁾ d_a =굵은 골재의 최대치수, A =응력-변형곡선 하의 면적, ϵ_0 =응력이 끝나는 점의 변형률, f'_c =콘크리트의 인장강도, E_c =탄성계수이다.

미세균열진행대의 폭 w_c 는 굵은 골재치수 d_a

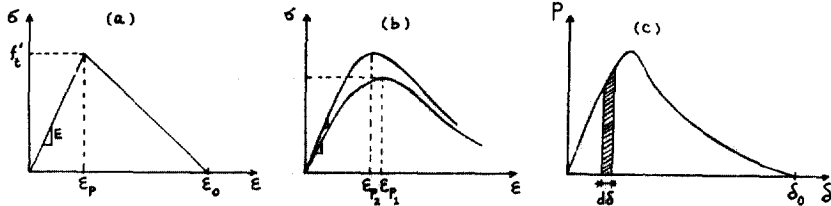


그림 8. (a) 파괴진행대에서의 응력-변형거동 (b) 강도에 따른-응력변형거동 (c) 하중-처짐곡선

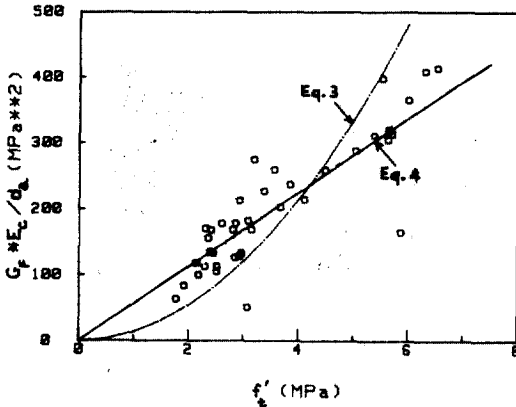


그림 9. 인장강도에 따른 파괴에너지의 변화

에 비례하고^(3,6), $\epsilon_0 = c_1 \epsilon_p$, $\epsilon_p = f_t / E_c$ 로 표시할 수 있으므로 上記의 式(2)는 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$G_f = \frac{1}{2} c_0 c_1 f_t^2 d_a / E_c = c_2 f_t^2 d_a / E_c \quad (3)$$

式(3)은 콘크리트의 파괴에너지가 인장강도가 증가함에 따라 상당히 빠르게 증가함을 보여주고 있다. 그러나, Gopalaratnam & Shah⁽¹⁴⁾, 및 Petersson⁽²²⁾ 그리고 본 연구의 실험결과는 콘크리트의 인장강도가 증가함에 따라 파괴에너지가 서서히 증가하고 있음을 나타내고 있다. 이것은 $\epsilon_p = c_3 / E_c$ 의 관계를 사용할 필요성을 시사해주며, 이것은 타 연구자의 실험연구결과^(14, 23)와도 일치하는 내용이 된다(그림 8(b) 참조). 따라서, 이 관계를 이용하여 式(3)을 다시 쓰면,

$$G_f = \frac{1}{2} c_0 c_1 c_3 f_t d_a / E_c = c_4 f_t d_a / E_c \quad (4)$$

上記式들에서 c_0 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 는 상수로서 실험자료로부터 결정될 수 있다.

콘크리트의 파괴에너지 예측공식을 결정하기

위하여 본 연구결과를 비롯하여 타 연구자들의 실험결과^(12,14,22)를 이용하여 회귀분석을 실시하였다. 그림 9는 이 회귀분석결과를 나타내고 있으며 파괴에너지가 인장강도에 따라 線型的으로 변하고 있음을 보여주고 있다. 즉, 式(4)가 式(3)보다 실험자료를 더 잘 예측하고 있음을 알 수 있으며, 이 회귀분석으로부터 도출된 예측공식은 다음과 같다.

$$G_f = 58.1 f_t d_a / E_c \quad (5)$$

여기서, G_f 는 N/mm 로 표시되며, $E_c = N/mm^2$ (or MPa), d_a 는 mm 로 표시된다. E_c 값이 주어지지 않을 때는 $E_c = 4,700 \sqrt{f'_c}$ 로 계산할 수 있으며 여기서 f'_c 은 압축강도로서 N/mm^2 로 표시한다⁽¹⁾. 콘크리트의 인장강도는 최근에 광범위한 실험자료를 이용하여 Raphael⁽²³⁾이 제안한 다음 공식으로부터 구할 수 있다.

$$f_t = 0.324 f'_c{}^{2/3} \quad (6)$$

$$\text{or } f_t = 0.74 f'_r \quad (7)$$

여기서, f_t , f'_r 및 f'_c 은 모두 N/mm^2 로 표시되며, f'_r 은 콘크리트의 파괴계수(modulus of rupture)이다. 이제 上記式(5)는 주어진 콘크리트의 파괴에너지를 계산하기 위해 사용될 수 있다.

4. 等價龜裂길이 理論

荷重이 증가함에 따라 안정된 균열은 성장하게 되며, 最大荷重에 도달되었을 때 전파되는 길이가 중요한 의미를 갖게 된다. 그러나, 콘크리트의 균열끝에서는 미세균열현상으로 인해 비선형파괴진행영역이 존재하기 때문에 정확한 균열길이를 측정하기가 어렵게 된다. 또한, 어느 정도의 균열까지를 실제의 균열로 고려해야 할 것인지에 대한 어려운 문제가 존재하게 된다.

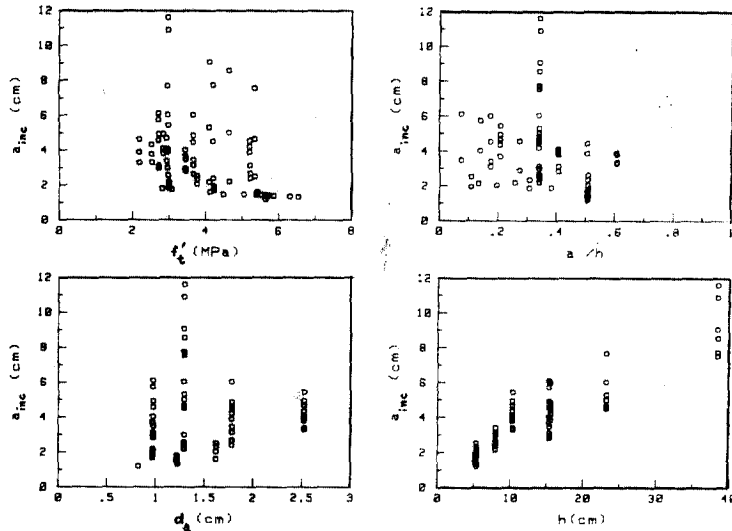


그림 10. 균열증가량 a_{inc} 와 각 인자와의 관계

본 연구에서는 이러한 어려움을 극복하기 위하여 소위 等價龜裂길이 概念을 고안하고자 한다. 여기서 등가균열길이란 초기균열길이에다 최대하중시까지 증가된 균열길이를 합한 유효균열길이를 뜻한다. 즉, 최대하중에서의 유효균열길이를 예측함으로써 부재의 파괴하중을 계산할 수 있게 된다. 최대하중에서의 증가된 유효균열길이는 최대하중 P 와 파괴에너지 G_f 의 관계로부터 다음과 같이 구할 수 있다. 여기서 3점 휨 하중을 받는 콘크리트보에 대한 응력확대계수 (stress intensity factor) K_I 은 다음 식(8)로 쓸 수 있다.

$$K_I = \sqrt{\pi a} \frac{PL}{BH^2} f(\alpha) \quad (8)$$

$$f(\alpha) = 1.635 - 2.603\alpha + 12.30\alpha^2 - 21.27\alpha^3 + 21.86\alpha^4 \quad (9)$$

여기서, $\alpha = a/H$, a = 균열길이, H = 보의 길이, B = 보의 폭, L = 보의 지간, P = 외부작용 하중을 나타낸다. 또한 평면응력에 대해 $G_f = K_I^2/E$ 이므로 식(8)은 다음 식으로 다시 쓸 수 있다.

$$P = \sqrt{\frac{E}{\pi a}} \frac{BH^2}{Lf(\alpha)} \sqrt{G_f} = F_1(a)G_f \quad (10)$$

식(10)은 주어진 하중상태와 파괴에너지에 대하여 균열길이 a 를 계산할 수 있는 관계식이 된다. 따라서, 실험자료로부터 최대파괴하중 P_{max}

와 파괴에너지 G_f 가 주어질 경우 등가균열길이 a_{eq} 를 계산할 수 있다.

위에서 설명한 방법을 이용하여 等價龜裂길이를 구하기 위하여 본 연구의 실험자료와 他 研究者들의 실험자료^(10,13,17,22,24,28)를 사용하였다. 이 등가균열길이를 구하는 절차를 요약하면 다음과 같다.

(1) 우선 $a = a_0$ 로 정하고 이에 상응하는 하중 P 를 식(10)으로부터 구한다.

(2) 이 P 값이 만약 실험자료의 최대하중 P_{max} 보다 작다면, $a = a_0 + \Delta a$ 로 증분시키고 이에 대응하는 하중 P 를 식(10)으로부터 다시 계산한다. 여기서 Δa 는 균열길이의 증분량으로서 $\Delta a = 0.01a$ 정도로 취한다.

(3) 上記(2)項에서 계산되는 P 값이 P_{max} 에 도달될 때까지 반복하고 이 때의 균열길이를 등가균열길이 $a_{eq}(=a_0 + a_{inc})$ 로 정한다. 여기서 a_{inc} 는 최대하중에서의 진전된 균열증분길이이다.

상기와 같은 절차를 통해 등가균열길이를 구할 수 있으며, 逆으로 上記의 식(10)은 等價龜裂길이가 주어졌을 경우 보의 최대하중 P_{max} 를 계산할 수 있는 관계식을 제공하게 된다. 따라서 上記의 계산결과로부터 a_{eq} 를 예측할 수 있는 公式를 도출하는 것이 필요하며, 이를 위하여 균열증가량에 가장 영향을 미치는 因子를 분석하는 것이 필요하다. 그림 10은 본 연구에서

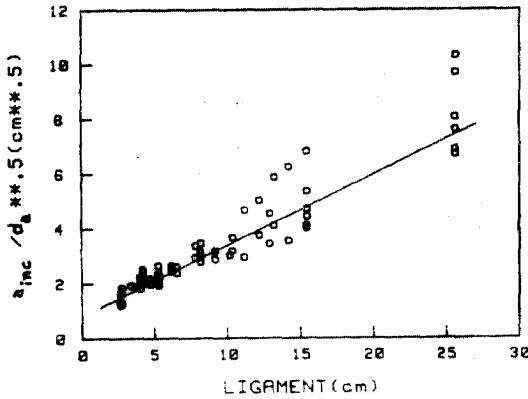


그림 11. 균열증가량에 대한 회귀분석 결과

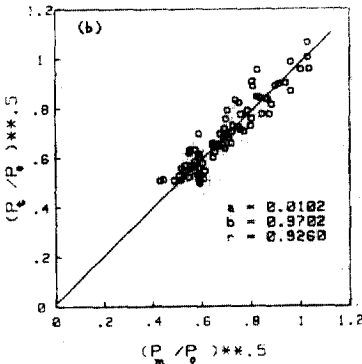
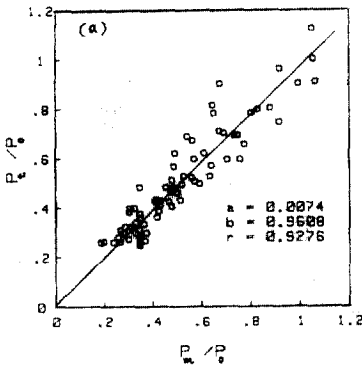


그림 12. 최대하중의 이론치와 실험치의 비교

계산된 균열증가량 a_{inc} 가 각 영향인자에 따라 어떻게 영향을 받는지를 보여주고 있다. 그림 10은 균열증가량 a_{inc} 가 짧은 골재의 최대치수, 보의 길이, 그리고 초기균열길이에 어느 정도 연관성을 갖고 있으나 인장강도에는 별로 영향을 받지 않고 있음을 보여주고 있다.

이와 같은 영향인자 분석으로부터 다음과 같은 식이 균열증가량 a_{inc} 를 가장 잘 예측하고, 있는 것으로 나타났다.

$$a_{inc} = [0.80 + 0.258(1-\alpha)H]d_0^{1/2} \quad (11)$$

여기서, $(1-\alpha)H = H - a_0 = \text{ligament}$ 이고 H 와 a_0 및 d_0 는 cm로 주어진다. 그림 11은 식(11)에 대한 회귀분석결과를 보여주고 있다. 이제 식(5), (10), (11)을 이용하여 보의 최대파괴하중을 계산할 수가 있게 된다. 식(10)으로부터 이론적 파괴하중값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_t = F_1(a_{eq}) \sqrt{G_f} \quad (12)$$

여기서, $P_t = \text{파괴하중의 이론치}$, $a_{eq} = a_0 + a_{inc}$ 이며 a_{inc} 는 식(11)로부터 계산할 수 있다.

상기의 식(12)를 이용하여 파괴하중의 이론치를 구하였으며, 여러 실험자료 (10, 13, 17, 22, 24, 28)와 비교한 것이 그림 12이다. 그림 12에서 보는 바와 같이 파괴하중의 이론치와 실험치가 좋은 상관관계를 가지고 있음을 알 수 있으며, 이것은 등가균열길이개념과 파괴에너지 공식이 실험치를 잘 예측하고 있음을 시사해주고 있다. 그림 12에서 P_0 는 기준값으로서 보의 휨이론에 의한 균열이 없는 보의 하중을 나타내며, 즉 $P_0 = 2BH^2f_t/3L$ 로 표시된다.

5. 結 論

본 研究에서는 콘크리트의 파괴실험을 통하여 콘크리트의 파괴거동을 규명하고, 파괴에너지를 결정하였으며, 이로부터 파괴에너지를 예측할 수 있는 공식을 도출하였다.

콘크리트의 파괴에너지는 안정된 3점휨하중 시험을 통하여 결정될 수 있으며 하중-처짐곡선의 면적으로부터 구할 수 있다. 콘크리트의 파괴에너지는 초기균열길이 커짐에 따라 감소하게 되고 어느 일정한 값에 도달하는 것으로 나타났다.

파괴에너지에 대한 공식의 도출 결과 콘크리트의 파괴에너지는 콘크리트의 인장강도와 골재 크기에 의존하며 그 값은 약 100~150 N/m의 범위에 있는 것으로 나타났다.

또한, 콘크리트보의 최대파괴하중을 계산하기 위하여 소위 등가균열길이 개념을 고안하였으며 이 등가균열길이에 대한 예측공식을 제안하였다. 이 등가균열길이 개념은 R-curve 해석에 의존하지 않고도 최대하중을 계산할 수 있는 효과적인 개념으로 사료된다.

謝 辭

本論文은 1986년도 문교부 자유과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었으며 이에 깊은 감사를 드린다.

參 考 文 獻

1. ACI 318~83, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," American Concrete Institute, 1983.
2. Bazant, Z.P., "Crack Band Model for Fracture of Geomaterials," *Proceedings, 4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, Alberta, Canada*, Vol. 3, Z. Eisenstein, ed., June, 1982, pp. 1137~1152.
3. Bazant, Z.P., "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 4, April, 1984, pp. 518~535.
4. Bazant, Z.P., and Cedolin, L., "Approximate Linear Analysis of Concrete Fracture by R-curves," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, No. 6, June, 1984, pp. 1336~1355.
5. Bazant, Z.P., and Cedolin, L., "Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, No. EM2, Apr., 1979, pp. 297~313.
6. Bazant, Z.P., and Oh B.H., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete," *Materials and Structures(RILEM, Paris)*, Vol. 16, 1983, pp. 155~177.
7. Bazant, Z.P., and Oh, B.H., "Rock Fracture via Strain-Softening Finite Elements," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 110, No. 7, 1984, pp. 1015~1035.
8. Broek, D., "Elementary Engineering Fracture Mechanics," Noordhoff International Publishing, Leyden, Netherlands, 1974.
9. Brown, J.H., "Measuring the Fracture Toughness of Cement Paste and Mortar," *Magazine of Concrete Research* Vol. 24, No. 81, Dec., 1972.
10. Bazant, Z.P., Kim, J.K., and Pfeiffer, P., "Non-linear Fracture Properties from Size Effect Tests," *J. of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 112, No. 2, Feb., 1986, pp. 289~307.
11. Cho, K.Z., Kobayashi, A.S., Hawkins, N.M., Barker, D.B., and Jeang, F.L., "Fracture Process Zone of Concrete Cracks," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 110, No. 8, 1984, pp. 1174~1184.
12. Entov, V.M., and Yagust, V.I., "Experimental Investigation of Laws Governing Quasi-Static Development of Macrocracks in Concrete," *Mechanics of Solids (Translation from Russian)*, Vol. 10, No. 4, 1975, pp. 87~95.
13. Gjerv, O.E., Sørensen, S.I., and Arnesen, A., "Notch Sensitivity and Fracture Toughness of Concrete," *Cement and Concrete Research*, Vol. 7, 1977, pp. 333~344.
14. Gopalaratnam, V.S., and Shah, S.P., "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension," *Journal of the American Concrete Institute*, May-June, 1985, pp. 310~323.
15. Huang, C.M.J., "Finite Element and Experimental Studies of Stress Intensity Factors for Concrete Beams," thesis presented to the Kansas State University, at Kansas, in 1981, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
16. Hutchinson, J.W., and Paris, P.C., "Stability Analysis of J-Controlled Crack Growth; Elastic-Plastic Fracture," ASTM-STP668, American Society for Testing and Materials, 1979, pp. 37~64.
17. Kaplan, M.F., "Crack Propagation and the Fracture of Concrete," *American Concrete Institute Journal*, Vol. 58, No. 11, Nov. 1961.
18. Knott, J.F., "Fundamentals of Fracture Mechanics," Butterworth, London, England, 1973.
19. Nadeau, J.S., Mindess, S., and Hay, J.M., "Slow Crack Growth in Cement Paste," *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 57, No. 2, 1974, pp. 51~54.
20. Paris, P.C., et al., "The Theory of Tearing Instability of the Tearing Mode of Elastic-Plastic Crack Growth," ASTM Special Technical Publication, No. 668 and 677, 1979, pp. 5~36.

21. Parker, A.P., "The Mechanics of Fracture and Fatigue," E. & F.N. Spon, Ltd London, 1981.
22. Pertersson, P.E., "Fracture Energy of Concrete; Method of Determination," *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, 1980, pp.78~89, and "Fracture Energy of Concrete; Practical Performance and Experimental Results," *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, 1980, pp.91~101.
23. Raphael, J.M., "Tensile Strength of Concrete" *Journal of the American Concrete Institute*, March-April, 1984, pp.158~165.
24. Shah, S.P., and McGarry, F.J. "Griffith Fracture Criterion and Concrete," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 97, No. EM6, Proc. Paper 8597, Dec., 1971, pp.1663~1676.
25. Sok, C, and Baron, J, Mecanique de la Rupture Appliquee au Beton Hydraulique," *Cement and Concrete Research*, Vol. 9, 1979, pp.641~648.
26. Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corp., Hellertown, Pa., 1973.
27. Visalvanich, K., and Naaman, A.E., "Fracture Model for Fiber Reinforced Concrete," *Journal of American Concrete Institute*, Vol. 80, Mar.-Apr., 1983, pp.128~138.
28. Walsh, P.F., "Fracture of Plain Concrete," *The Indian Concrete Journal* Vol. 46, No. 11, Nov., 1979, pp.469, 470, and 476.
29. Wecharatana, M., and Shah, S.P., "Slow Crack Growth in Cement Composites," *Journal of Structural Engineering Division, ASCE*, Vol. 108, No. ST6, June, 1982, pp.1400~1413.
30. Wecharatana, M., and Shah, S.P., "Predictions of Nonlinear Fracture Process Zone in Concrete," *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*, Vol. 109, No. 5, 1983, pp.1231~1246.
31. Wittmann, F.H., "Fracture Mechanics of Concrete," Elsevier, 1983.

(接受：1987. 4. 8)