

# 鐵筋콘크리트 構造物의 非線形 解析에 관한 研究

A Study on Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures

張 東 一\*  
Chang, Dong Il  
郭 桂 煥\*\*  
Kwak, Kae Hwan

---

## Abstract

A finite element method has been developed to study the material nonlinear analysis of reinforced concrete structures. Concrete behavior under the biaxial state of stress is represented by a nonlinear constitutive relationship which incorporates tensile cracking, tensile stiffening effect between cracks and the strain-softening phenomenon beyond the maximum compressive strength.

The concrete model used is based upon nonlinear elasticity by assuming concrete to be an orthotropic material and modeled as equivalent uniaxial stress-strain constitutive relationship using equivalent uniaxial strain.

The steel reinforcement is assumed to be in a uniaxial stress state and is modeled as a bilinear, elasto-plastic material with strain hardening approximating the Bauschinger effect.

In plane stress state, R.C. beams is modeled as a quadratic element that has two degrees of freedom in each node.

And this results of finite element analysis are compared with the experimental results of midspan deflection, stresses and strains.

---

## 요 지

철근 콘크리트 구조물의 재료적 비선형 해석을 위해 유한요소법을 적용하였다. 2축응력 상태에서의 콘크리트 거동은 인장균열과 균열사이의 인장증강효과(tension stiffening effect) 그리고 최대압축 강도를 넘어서의 변형연화(strain-softening) 효과를 고려하는 비선형 구성 방정식으로 나타냈다.

콘크리트를 직교성(orthotropic) 재료로 가정함으로써 비선형 탄성체로 간주하고, 등가일축변형도 개념을 사용한 등가 일축 응력-변형도(equivalent uniaxial stress-strain) 관계식으로 모형화하고, 철근 보강재는 Bauschinger 효과를 갖는 탄소성 변형 경화재료(elasto-plastic strain-hardening material)로 모형화 했다.

---

\* 正會員 · 漢陽大學校 工科學 教授

\*\* 正會員 · 圓光大學校 工科學 副教授

평면 응력 상태에서 철근콘크리트 보의 모형화는 각 절점에 2개의 자유도를 갖는 사각형요소로 모형화하여 적용시켰으며, 이로부터 구한 유한요소해석의 결과치를 실험결과치의 중앙치점, 응력, 변형을 그리고 균열성장과정에 대하여 비교 검토 하였다.

## 1. 序 論

최근 수십년동안 고층빌딩, 핵저장 용기, 지간이 긴 다리, 해상구조물과 같은 복잡한 구조물에 철근 콘크리트와 프리스트레스 콘크리트가 많이 사용되어 왔으며 최근 컴퓨터의 발달과 유한요소법의 개발로 이러한 구조물의 해석도 크게 가능해 졌다.

콘크리트와 철근 보강재로 구성된 재료적인 비선형성, 셸이나 평판과 같은 구조물을 크게 변형시키는 기하학적 비선형성, 온도변화, 크리이프, 건조수축, 프리스트레스 보강재의 이완과 같은 시간의존적인 비선형성, bond slip, 철근 보강재의 연결작용(dowel action), 균열면에서의 aggregate interlock, 반복하중과 같은 동적하중의 영향으로 짧은 시간동안 구조물의 안정성과 serviceability 를 보장하는 복잡한 해석방법의 개발이 필요해 졌다.

본 논문에서는 정하중 콘크리트의 인장균열과 균열사이의 인장 증강효과(tension stiffening effect), 최대 압축응력을 넘어서의 변형연화(strain softening) 현상을 고려하는 비선형 구성방정식으로써 2축응력 상태에서 콘크리트의 거동을 모형화하고 탄성, 소성, 극한하중 영역에서 철근 콘크리트 보의 하중—처짐 응답과 균열성장 과정을 구하고자 한다.

## 2. 基本理論

### 2.1 변형도와 변위의 관계

고체역학에서 변형(deformation)의 척도를 Green의 변형도<sup>3)</sup>에 의해 나타내면 다음과 같다.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} + U_{k,j}) \quad (2.1)$$

여기서,  $X_i$ : 직각좌표계 축  
 $i=1, 2, 3$

$U_i$ :  $i$  방향의 변위

$$U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}$$

$$U_{k,i} U_{k,j} = \sum_{k=1}^3 (U_{k,i} U_{k,j})$$

식(2.1)은 3 차원 물체에 대한 것이며 kirchhoff 가정을 도입하고 평판 표면과 직각으로  $Z$  축을 잡으면 식(2.1)은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} E_{xx} &= U_{,x} + \frac{1}{2}(U_{,x}^2 + V_{,x}^2 + W_{,x}^2) \\ E_{yy} &= V_{,y} + \frac{1}{2}(U_{,y}^2 + V_{,y}^2 + W_{,y}^2) \\ E_{xy} &= \frac{1}{2}(U_{,y} + V_{,x} + U_{,x}U_{,y} + V_{,x}V_{,y} \\ &\quad + W_{,x}W_{,y}) \end{aligned} \right\} (2.2)$$

여기서  $U, V, W$ 는 각각  $X, Y, Z$  축의 변위이다.

평면내의 변위의 기울기를 무시하면 식(2.2)는,

$$\left\{ \begin{aligned} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} U_{,x} + \frac{1}{2}W_{,x}^2 \\ V_{,y} + \frac{1}{2}W_{,y}^2 \\ \frac{1}{2}(U_{,y} + V_{,x} + W_{,x}W_{,y}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

로 되어 다시쓰면,

$$\left\{ \begin{aligned} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} U_{,x} \\ V_{,y} \\ \frac{1}{2}(U_{,y} + V_{,x}) \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}W_{,x}^2 \\ \frac{1}{2}W_{,y}^2 \\ \frac{1}{2}W_{,x}W_{,y} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$\text{즉, } E = \varepsilon + \eta \quad (2.5)$$

로 나타낼수 있다. 여기서  $\varepsilon$ 는 변형도와 변위벡터의 선형부분이고  $\eta$ 는 비선형 부분이다.

### 2.2 構成方程式

일반적으로 구성방정식은 다음과 같다<sup>3)</sup>.

$$S_{ij} = C_{ijk_1} E_{k_1} \quad (2.6)$$

여기서,

$S_{ij}$ : 2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서

$E_{k_1}$ : Green의 변형도 텐서

$C_{ijk_1}$ : 탄성계수를 포함하는 텐서

평판을 평면응력 상태로 생각하면 식(2.6)은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ \frac{1}{2}E_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

미소 변형도와 회전을 가정하는 선형 탄성이론에 있어서 2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서  $S$  는 Cauchy 응력  $\sigma$  와 같다.

### 2.3 평형 방정식

유한 요소법을 적용함에 있어서 가상일의 원리(Principle of virtual work)를 이용하여 평형 방정식을 세워 변위법을 사용한다<sup>(3)</sup>.

$$\int_V S_{ij} \delta E_{ij} dV - \int_{S_1} T_i \delta U_i d\delta - \int_V P_i \delta U_i dV = 0 \quad (2.8)$$

여기서,  $P_i$  : 체적당 body force  
 $T_i$  : surface traction  
 $S_1$  : surface  
 $V$  : 체적

구조물의 운동이나 변형을 나타내기 위해서 updated lagrangian formulation 을 사용한다.

물체는 변형후에도 평형상태에 있으므로

$$\int_{V_0} (\Delta \delta_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{0ij} \delta \Delta \eta_{ij}) dV_0 = \int_{S_0} \Delta T_i \delta U_i dS_0 + \int_{V_0} \Delta P_i \delta \Delta U_i dV_0 \quad (2.9)$$

식(2.9)는 증분형 평형방정식이다.

### 3. 유한요소의 공식화

유한요소법<sup>(4)</sup>은 구조물의 해석시에 오늘날 가장 중요하고 강력한 방법이다.

요소내의 변위  $U$  는 다음과 같다.

$$U = N\gamma \quad (3.1)$$

여기서,  $N$  : 보간함수(interpolation or shape function)

$\gamma$  : 요소 절점변위의 벡터

식(2.3)의 변형도-변위 관계식은 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$E = LU \quad (3.2)$$

여기서,  $E$  : 변형도

$L$  : differential operator

기하학적 강도(stiffness)를 나타내는 초기응력 항을 무시하면 다음과 같다.

$$\sum_V \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \sum_V \int_V \delta U^T T ds + \sum_V \int_V \delta U^T P dV \quad (3.3)$$

여기서,  $\sum_V$  : 모든 요소의 합

$V$  : 요소의 체적

$S$  : 요소의 surface

$T$  : surface traction 의 벡터

$P$  : body force 의 벡터

$\delta u, \delta \varepsilon$  : 가상 변위벡터, 가상 변형도 벡터

윗식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \gamma^T \left[ \sum_V \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV \gamma - \sum_V \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{\varepsilon}_0 dV + \sum_V \int_V \underline{B}^T \sigma^0 dV \right] \\ = \delta \gamma^T \left[ \sum_V \int_V \underline{N}^T T ds + \sum_V \int_V \underline{N}^T P dV \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

여기서,  $\delta \gamma$  는 가상 절점변위 벡터 이다.

식(3.6)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{K} \gamma = R \quad (3.5)$$

여기서

$$\underline{K} = \sum_V \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV : \text{탄성강도형렬} \quad (3.6)$$

$$R = R_s + R_B + R_r + R_o : \text{외부하중벡터} \quad (3.7)$$

$$R_s = \sum_V \int_V \underline{N}^T T ds : \text{surface traction 에 의한 등가 절점력} \quad (3.8)$$

$$R_B = \sum_V \int_V \underline{N}^T P dV : \text{body force 에 의한 등가 절점력} \quad (3.9)$$

$$R_r = \sum_V \int_V \underline{B}^T \underline{C} \underline{\varepsilon}_0 dV : \text{초기 변형도에 의한 등가 절점력} \quad (3.10)$$

$$R_o = \sum_V \int_V \underline{B}^T \sigma^0 dV : \text{초기 응력에 의한 등가 절점력} \quad (3.11)$$

### 4. 철근콘크리트 재료의 모델

#### 4.1 2축응력 상태에서의 콘크리트

지금까지 많은 실험으로 부터 2축응력 상태에서의 콘크리트의 거동은 1축응력 상태에서의 콘크리트 거동과는 크게 다르다는 것을 알 수 있었다.

2축 압축에서 콘크리트의 최대 압축강도는 1축 압축에서 보다 약 27% 더 크다는 것을 알 수 있고, 최대 압축강도에서 콘크리트 연성 또한, 증가한다는 것을 알 수 있다. 임의의 주축 방향으로 콘크리트 강성이 다른 주축방향에서 압축이 존재함으로써 커짐은 2축 응력상태에서 미소균열의 제한 때문이다.

다른 일정한 주응력비 즉, 압축—압축, 압축—인장, 인장—인장의 영역에서 Kupfer<sup>(8)</sup>는 실험으로부터 콘크리트의 응력—변형을 곡선과 2축강도 포락선(biaxial strength envelope)을 구했다. 콘크리트 구성 모델은 재료를 경로의존(path-dependent)과 응력반전(stress reversible)으로 특성 지우는 hypo-elastic formulation을 사용하는 비선형 탄성체<sup>(9,10)</sup>로 가정 하였다.

#### 4.2 콘크리트의 응력—변형도 관계

2축응력 상태하에서 콘크리트를 orthotropic 재료로 보고 orthotropic 방향 1과 2에서 증분형 구성방정식<sup>(1)</sup>은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12}E_1^{-1} & 0 \\ -\nu_{21}E_2^{-1} & E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

여기서,

첨자 1, 2 : orthotropic 방향

$E_1, E_2$  : orthotropic 방향의 탄젠트 계수

$\nu_{12}, \nu_{21}$  : 포아송 비

$G$  : 전단계수

증분형 등가일축 변형도  $d\epsilon_{iu}$  는,

$$d\epsilon_{iu} = \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad i=1, 2 \quad (4.2)$$

전체 등가일축 변형도  $\epsilon_{iu}$  는,

$$\epsilon_{iu} = \sum \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (4.3)$$

#### 4.3 콘크리트 모델

등가일축 변형도 개념을 사용한 일축압축에 대한 Saenz<sup>(12)</sup>에 의해 제안된 식은 콘크리트의 2축응력—변형도 거동을 고려하는데 사용될 수 있다. 본 논문에서는 Darwin<sup>(1)</sup>에 의해 제안된 그림 4.1과 같은 등가일축 응력—변형도 곡선을 사용하였다.

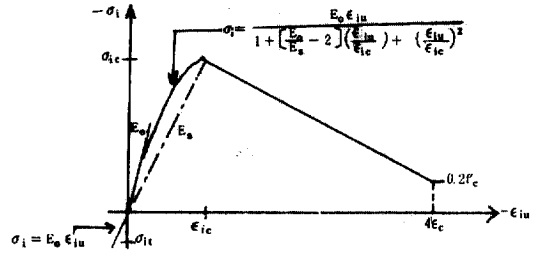


그림 4.1 콘크리트의 등가일축 응력—변형도 모형

압축축에서,

$$\sigma_i = \frac{E_0 \epsilon_{iu}}{1 + \left[ \frac{E_0}{E_s} - 2 \right] \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right) + \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right)^2} \quad (4.4)$$

여기서,

$\epsilon_{iu}$  : 주응력 방향  $i$ 에서 등가일축 변형률

$\epsilon_{ic}, \epsilon_{ic}$  : 2축 강도 포락선으로부터 구해진 주응력 방향  $i$ 에서의 최대압축응력과 이에 대응하는 변형률

$E_0$  : 초기 일축 탄젠트 계수

$E_s$  :  $\sigma_{ic}/\epsilon_{ic}$  Secant 계수

$$E_i : \frac{\partial \sigma_i}{\partial \epsilon_{iu}} = \frac{E_0 \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right)^2 \right]}{1 + \left[ \frac{E_0}{E_s} - 2 \right] \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right) + \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right)^2} \quad (4.5)$$

인장축에서,

$$\sigma_i = E_0 \epsilon_{iu} \quad \sigma_i \leq \sigma_{it} \quad (4.6)$$

여기서,

$\sigma_{it}$  : 주응력방향  $i$ 에서 콘크리트 인장강도

$E_i$  :  $E_0$

최대 압축응력  $\sigma_{ic}$ 를 구하기 위해 Kupfer, Hilsdorf, Rusch<sup>(8)</sup>, Liu, Nilson, Slate<sup>(10)</sup> 등이 2축 하중실험을 하였다.

본 논문에서는 그림 4.2와 같은 J. Van Greunen<sup>(13)</sup>이 제안한 2축강도 포락선을 사용하였다.

2축강도 포락선은 4개의 영역으로 나눌 수 있다.

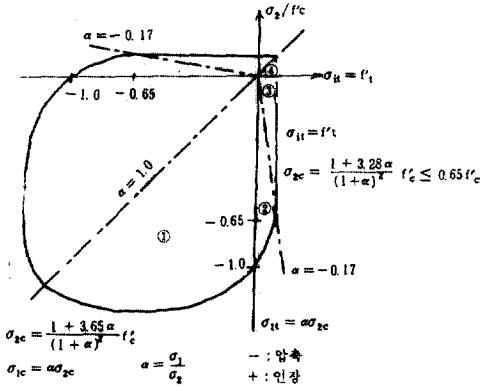


그림 4.2 콘크리트의 2축강도 포락선

①  $\sigma_1 = \text{압축}, \sigma_2 = \text{압축}, 0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sigma_{2c} = \frac{1+3.65\alpha}{(1+\alpha)^2} \sigma_c' \quad (4.7)$$

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c [3P_2 - 2] \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{1c} = \varepsilon_c [-1.6P_1^3 + 2.25P_1^2 + 0.35P_1] \quad (4.10)$$

$$P_1 = \sigma_{1c}/\sigma_c' \quad P_2 = \sigma_{2c}/\sigma_c'$$

최대 압축강도를 넘어서 항복하고 콘크리트의 파손에 의해 파괴된다.

②  $\sigma_1 = \text{인장}, \sigma_2 = \text{압축}, -0.17 \leq \alpha \leq 0$

$$\sigma_{2c} = \frac{1+3.28\alpha}{(1+\alpha)^2} \sigma_c' \quad (4.11)$$

$$\sigma_{1t} = \alpha \sigma_{2c} \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c [4.42 - 8.38P_2 + 7.54P_2^2 - 2.58P_2^3] \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{1t} = \sigma_{1t}/E_0 \quad (4.14)$$

$$P_2 = \sigma_{2c}/\sigma_c'$$

콘크리트의 항복과 파손에 의해 파괴된다.

③  $\sigma_1 = \text{인장}, \sigma_2 = \text{압축}, -\infty < \alpha < 0.17$

$$\sigma_{2c} = 0.65 \sigma_c' \quad (4.15)$$

$$\sigma_{1t} = f_t' \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon [4.42 - 8.38P_2 + 7.54P_2^2 - 2.58P_2^3] \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_{1t} = \sigma_{1t}/E_0$$

$$P_2 = \sigma_{2c}/\sigma_c' \leq 0.65$$

인장방향으로 콘크리트의 균열로 파괴된다.

④  $\sigma_1 = \text{인장}, \sigma_2 = \text{인장}, 1 < \infty < \infty$

$$\sigma_{1t} = \sigma_{2t} = \sigma_t'$$

$$\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t} = \sigma_t'/E_0$$

일축 인장강도  $\sigma_t'$  이상에서 균열이 발생한다.

#### 4.4 압축에서의 변형연화(Strain Softening)

최대 압축응력  $\sigma_{ic}$  를 넘어서의 콘크리트 응력은 변형률이 증가함에 따라 감소한다. 이 현상은 콘크리트가 변형률  $\varepsilon_{cu}$  에서 파손(crush) 될 때까지 콘크리트의 unloading 을 유발한다.

本論文에서 사용된 선형 unloading 곡선은 Karson 과 Jirsa<sup>(7)</sup>의 일축 반복하중 실험으로부터 얻어진 곡선을 근거로 사용되었다.

변형률  $\varepsilon_{iu} < \varepsilon_{ic}$  일때 콘크리트 응력은,

$$\sigma_i = \sigma_{ic} + \frac{\sigma_{cu} - \sigma_{ic}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{ic}} (\varepsilon_{iu} - \varepsilon_{ic}) \quad (4.18)$$

수치해석의 탄젠트 계수는 零으로 생각한다. 즉, 항복후의 구성방정식은 다음과 같다.

$$d\sigma = Q d\varepsilon \quad (4.19)$$

#### 4.5 응력반전(Stress Reversals)과 콘크리트상태

등가 일축 응력-변형도 곡선에서 최대 압축강도 前後의 unloading 과 reloading 은 초기 탄젠트계수  $E_0$  의 경사도를 따라 일어나고 가능한 콘크리트의 상태는 그림 4.3 과 같다.

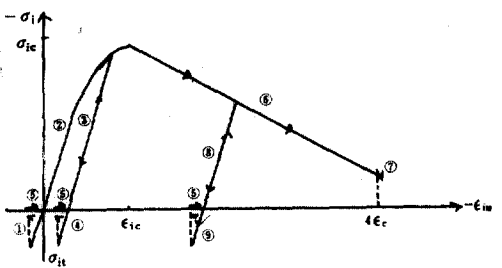


그림 4.3 응력반전상태에서의 콘크리트상태

- ① 주경로의 인장
- ② 주경로의 압축
- ③ 항복전 압축의 unloading 과 reloading
- ④ 항복전 인장의 unloading 과 reloading
- ⑤ 균열의 닫힘과 열림
- ⑥ 주경로의 항복
- ⑦ 압축의 파손
- ⑧ 항복후의 압축의 unloading 과 reloading
- ⑨ 항복후의 인장의 unloading 과 reloading

#### 4.6 철근 보강재 모형

철근은 Bauschinger 효과를 갖는 탄소성 변형 경화(elasto-plastic strain hardening) 재료로 그림 4.4와 같이 모형화하였다.

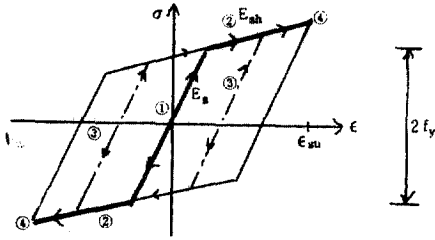


그림 4.4 철근 보강재의 응력-변형도 모형

- ① 주인장과 압축의 하중
- ② 항복후의 하중
- ③ 항복후의 unloading 과 reloading
- ④ 철근변형률  $\epsilon_{s,u}$ 를 넘을 때의 파괴

철근보강재 길이 방향이 축 1과 평행하고 축 2와는 직각을 이룬다면 증분형 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{sc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

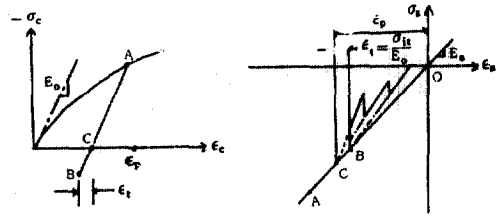
式(4.20)은 해석시  $x, y$  좌표축으로 변환한다.

#### 4.7 균열과 인장 증강효과(Tension Stiffening effect)

콘크리트는 압축에 비해 훨씬 낮은 인장강도로 인해 선형 탄성 취성재료로 거동하는데 철근 콘크리트 구조물의 비선형 거동의 주요 원인이 된다.

주응력이 콘크리트 일축 인장강도를 넘으면 주응력 방향과 직각인 방향으로 균열이 형성된다. 주 균열점에서 콘크리트의 응력은 0이지만 균열사이의 콘크리트는 콘크리트와 철근의 접착력에 의해 약간의 인장응력을 전달 할 수 있는데 이것을 인장 증강효과(tension stiffening effect)라 한다. 균열후 콘크리트 응력을 무시하고 철근 보강재에 대해서는 증가된 강도를 사용하는 Gilbert 와 Wamer<sup>(5)</sup>가 제안한 모형을 수정하면 다음과 같다.

압축하중을 받은후 인장하중으로 unloading 될 때의 콘크리트와 철근 보강재의 응력은 그림 4.5와 같다.



콘크리트 응력-변형도 철근 보강재의 응력-변형도  
그림 4.5 Unloading 에 의한 콘크리트와 철근 보강재의 응력

## 5. 유한 요소법과 컴퓨터 프로그램

### 5.1 요소

본 논문에서는 보에서 뿐만 아니라 flat slabs 나 Panels도 해석하기 위해서 평면응력 상태에서 사각형 요소를 사용하였으며 이는 그림 5.1과 같다.

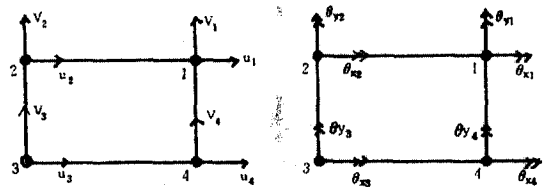


그림 5.1 사각형 요소

### 5.2 요소의 변형도와 변위의 관계식

Kirchhoff의 가정을 사용하면 요소내 어떤 점의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_y \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_x \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

여기서,

$x, y, z$ : 국부요소 좌표계

$u, v, w$ :  $x, y, z$  방향의 변위

$u_0, v_0, w_0$ : 요소 reference surface 의 변위

$\theta_x, \theta_y$ :  $x, y$  축에 대한 회전

평면 변위( $w, \theta_x, \theta_y$ )와 평면내 변위( $U, V$ )에 대한 보간함수를 사용하면 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_0 &= N_m(x, y)U \\ V_0 &= N_m(x, y)V \\ W_0 &= N_b(x, y)W \end{aligned} \quad (5.2)$$

여기서,

$N_m$  : 평면내 변위에 대한 보간함수  
 $N_b$  : 휨 변위에 대한 보간함수  
 변형도-변위 관계식을 정리하면 다음과 같다.

$$\xi = \begin{bmatrix} \underline{N}_{m,x} & 0 \\ 0 & \underline{N}_{m,y} \\ \underline{N}_{m,y} & \underline{N}_{m,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} - Z \begin{bmatrix} N_{b,xx} \\ N_{b,yy} \\ N_{b,xy} \end{bmatrix} W$$

$$= B_m \gamma_m - Z B_b \gamma_b = B \gamma \text{ 이다.} \quad (5.3)$$

여기서,

$$\gamma : \begin{Bmatrix} \gamma_m \\ \gamma_b \end{Bmatrix}$$

### 5.3 비선형 평형 방정식의 해법

외부 하중 history 와 재료재 비선형성을 고려하기 위해 유한 요소법의 증분법이 본 논문에서 사용되었다. 그림 5.2와 같이 시간 구간은  $n$  시간 단계  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ 로 나누고 매 시간 단계에서 외적 하중 벡터  $R_i$ 를 작용하는 때, 좀 더 자세한 하중-변위 응답을 구하기 위해 임의의 하중단계  $\Delta R_i$ 로 나누어 작용시킨다. 그림 5.3과 같이 매 하중 단계  $\Delta R_i$ 에서 비선형 평형 방정

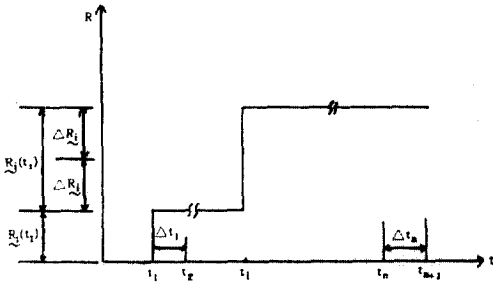


그림 5.2 외부 하중 history

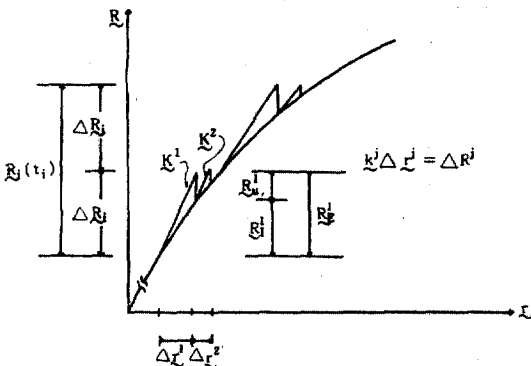


그림 5.3 비선형 평형 방정식을 풀기 위한 해법

식을 풀고 이로부터 구조물의 하중-변위 응답을 구한다.

### 6. 실험 및 수치해석의 비교검토

본 논문을 위하여 그림 6.1과 같은 철근 콘크리트 부재를 제작하였으며, 이는 콘크리트 표준시방서의 강도 설계법에 준하였고, 철근비는 1.63%이다.

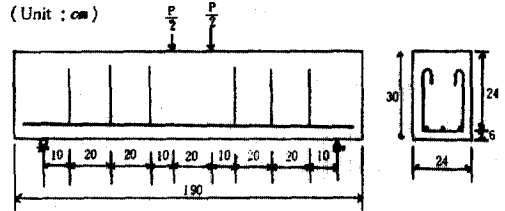


그림 6.1 실험부재

콘크리트의 28일 강도 측정결과  $\sigma_{ck} = 225 \text{ kg/cm}^2$  이고, 철근은 KSD3504에 규정된 D10과 D19를 사용하였고, 전단보강을 위하여 U형 수직 스티럽을 설치하였다. 여기에 사용한 재료의 규격은 표 6.1과 같다.

표 6.1 철근의 단면적, 항복응력 및 탄성계수

Nominal Diameter	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$\sigma_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$E_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )
D 10	0.713	2777	$2.04 \times 10^6$
D 19	2.863	3560	$2.04 \times 10^6$

본 실험부재에 대하여 정하중 실험을 행하였으며, 실험중 부재의 중앙처짐, 인장철근의 중앙부 변형율을 조사하였다<sup>(14)</sup>. 또한 실험부재에 대하여 수치해석을 수행하기 위하여 그림 6.2와 같은 요소로 분할하였으며 이를 ADINA 프로그

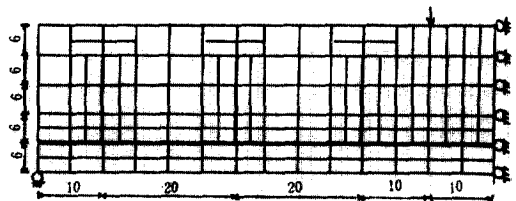
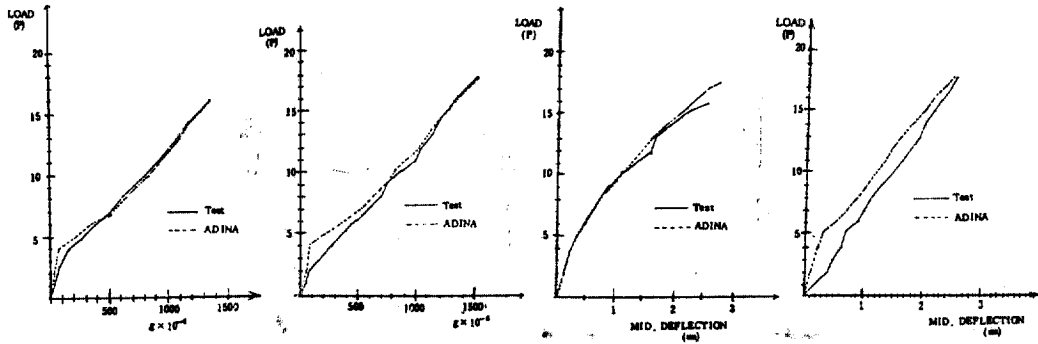


그림 6.2 요소분할



4s-1 시험편                      6s-1 시험편                      4s-1 시험편                      6s-1 시험편  
 (a) 하중-인장철근 변형률 관계                      (b) 하중 중앙처짐 관계  
 그림 6.3 하중과 중앙처짐, 인장철근 변률

랩<sup>(15)</sup>으로 처리하였다.

결과적으로 하중 증가에 따른 부재의 중앙처짐 및 인장철근의 변형률은 그림 6.3 과 같음을 알 수 있다.

## 7. 결과 및 고찰

본 논문에서 얻어진 결과는 다음과 같다.

① 정하중을 받는 철근 콘크리트 보의 중앙처짐 및 인장철근의 변형률을 실험적으로 측정하였으며, 이들 측정치를 ADINA를 이용한 프로그램의 결과와 비교 검토하였다. 비교 검토한 결과가 거의 일치함을 알 수 있었다.

② 철근 콘크리트 구조물의 재료적 비선형성을 고려한 수치해석법을 제시하였다.

③ 수치해석을 위하여 콘크리트와 철근의 재료모형을 제시하여 이를 수행하였다.

④ 콘크리트와 철근 재료에 대한 정확한 응력-변형률 모형을 실험적으로 구하고 이를 프로그램에 적용시키면 더욱 더 정확한 철근 콘크리트 구조물의 해석이 가능해질 것이다.

### 감사의 말

本論文은 1985년도부터 2년간 한국과학재단의 지원에 의하여 연구된 것으로 이에 동재단과 직원에게 감사 드린다.

### 참 고 문 헌

1. Darwin, D. and Pecknold, D., "Inelastic Model

for Cyclic Biaxial Loading of Reinforced Concrete," SRS No. 409, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, July 1974.

2. Darwin, and Pecknold, D., "Analysis of Reinforced Concrete Shear Panels under Cyclic Loading," *Journal of the Structural Division, ASCE*, V. 102, No. St2, February 1976, pp. 355 ~369.
3. Fung, Y.C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
4. Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
5. Gilbert, R.I. and Warner, R.F., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs with Tension stiffening." UNICIV Report No. R-167, University of New South Wales, Kensington, N.S.W., Australia, January 1977.
6. Kang, Y.J., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames," Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No. 77-1, January 1977.
7. Karsan, I.D. and Jirsa, J.J., "Behavior of Concrete under Compressive Loadings," *Journal of the Structural Division, ASCE*, V.95, No. ST 12, December 1969.
8. Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., and Rüsck, H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses," *ACI Journal*, V. 66, No. 8, August 1969, pp. 656~



9. Liu, T.C., Nilson, A.H., and Slate, F.O., "Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression," *ACI Journal*, A. 69, No. 5, May 1972.
10. Liu, T.C., Nilson, A.H., and Slate, F.O., "Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete," *Journal of the Structural Division, ASCE*, V. 98, No. ST5, May 1972.
11. Raiagopal, K.R., "*Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams, Beam-Columns and Slabs by Finite Elements.*" Ph. D. Dissertation, Iowa State University, Ames, Iowa, 1976.
12. Saenz, L.P., Discussion of "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete," by Desayi and Krishnan, *ACI Journal*, V. 61, No. 9, September 1964, pp. 1229~1325.
13. Vna Greunen, J., "*Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Slabs and Panels.*" Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No. 79-3, October 1979.
14. 장동일, 박계환, "鐵筋콘크리트 構造物의 剪斷舉動에 관한 研究", 대한토목학회논문집, 제 7 권 제 1 호, 1987 년 3 월, pp. 83~92.
15. ADINA Engineering "*Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis*", Watertown, Mass. 02172, U.S.A., September, 1981., June 1983.  
(接受 : 1987. 4. 21)