표면파기법을 이용한 자연지반 및 포장구조의 동적물성 추정에 관한 연구

——이론적 분산곡선——

Evaluation of Dynamic Properties of Natural Soils and Pavement Systems Using Surface Wave Technique

—Theoretical Dispersion Curves—

김 수 일*
Kim, Soo Il
우 제 윤**
Woo, Je Yoon

Abstract

A new analytical method to determine the theoretical dispersion curves of Rayleigh wave in multilayered elastic media is developed. The method developed in this study gives the solutions for unlimited frequency, and is essential part of surface wave techniques to evaluate the layer profiles and dynamic properties of soils and pavement systems.

Delta-Matrix technique is utilized to overcome the overflow and loss of precision problem inherent in the original Thomson-Haskell formulation at high frequencies. Conventional inversion methods based on the original Thomson-Haskell formulation lead to erroneous results due to the limitations on the layer profiles and the magnitude of frequency. The method developed in this study establishes the base of the research on more accurate and efficient inversion method, especially for the pavement systems as well as the natural soils.

요 지

본 연구에서는 다층탄성체에서 주파수에 제약없이 Rayleigh 파의 이론적 분산곡선을 결정할 수 있는 새로운 해석적 방법을 개발하였다. 이는 표면파기법에 있어 자연지반 및 포장구조의 성층구조와 동적물성을 정확히 추정하는 역산기법의 근간이 되는 것이다.

본 연구에서는 델타 매트릭스 기법을 활용하여 원래의 Thomson-Haskell 방법이 내포하고 있는 수치한계초과 및 유효수치소실로 인한 수치연산적 장애를 극복하였다. 원래의 Thomson-Haskell 방법을 토대로 한 종래의 역산기법들은 성층구조 및 주파수 크기의 제약으로 인하여 부정확한 결과를 초래하게 된다. 본 연구에서 개발한 방법은 자연지반은 물론, 특히 포장구조에 있어 보다 정확하고 효율적인 역산기법에 대한 연구에 토대가 될 것으로 판단된다.

* 정회원 · 연세대학교 공과대학 교수, 토목공학과
** 정회원 · 연세대학교 대학원 박사과정

1. 서 론

지반의 동적 거동특성 해석이나 포장구조체의 내구력 평가 등에 있어 토층 및 포장층의 동적 물성을 정확히 결정하는 것은 매우 중요하다. 지반의 동적물성을 추정하는 현장시험방법들 중에서 표면파기법은 검측공을 뚫을 필요가 없는 비파괴적인 방법일 뿐 아니라 계측 및 해석 장비의 발달로 시험조작을 간편화, 신속화 할 수 있는 장점이 있어 최근 이를 이용하여 보다 신뢰성 있는 결과를 얻기 위한 연구들이 수행되오고 있다.

표면파기법은 실험적으로 표면파인 Rayleigh 파(이하, R파)의 주파수에 따른 전파속도 변화곡선인 분산곡선(dispersion curve)을 결정하고 이를 분석하여 지반의 성층구조와 각 구성층들의 동적물성을 역산(inversion)하는 것이다. 이러한 역산기법들로서는 재래식 $\frac{1}{2}L_R$ 방법[1] 및 $\frac{1}{3}L_R$ 방법을[2,3,4] 시초로 하여, 이를 개선한 수정 $\frac{1}{2}L_R$ 및 $\frac{1}{3}L_R$ 방법,[5] 면적비 L_R 방법[5] 등의 반경험적인 역산기법들이 최근까지도 활용되고 있으나 이들 기법들은 이론적으로 무리한 가정을 내포하고 있어 지반의 구성층간의 물성차이가 심할 경우나 상대적으로 매우 얇은 층이 협재하는 경우와 특히 포장구조체와 같이 하부의 자연지반과 물성차이가 현저하고 두께가 얇은 포장층이 상부에 놓이는 경우에는 매우 부정확한 결과를 주게 된다[4].

이러한 반경험적 역산기법의 문제점을 해결하기 위한 연구로서 Nazarian과 Stoke[6]는 다층탄성체에서 탄성파 전파에 관한 Thomson[7]-Haskell[8](이하, TH)이론을 토대로 한 해석적인 역산기법을 발표하고 김수일[9]도 이와 유사한 연구를 발표하였으나 이들은 원래의 TH이론이 내포하고 있는 수치연산적 문제점을 해결하지 못한 형태의 전산 알고리즘을 적용함으로서 고주파수의 분산곡선 해석시에 전산기의 처리가능 수치상한치를 초과하는 수치초과(overflow)문제와 유효수치의 소실로 인한 수치오차 문제로 인하여 해석가능한 지반모델에 제약이 있었다. 특히 포장구조와 같이 얇은 두께의 상부 포장층의 동적물성을 정확히 결정할 때 필요한 높은 주파수에서의 분산곡선을 역산하는 것이 실제적으로 불가능한 문제점이 있다.

본 연구는 해석적 역산기법의 중심이라 할 수 있는 이론적 분산곡선의 결정에 있어 원래의 TH이론의 직접 적용이 내포하고 있는 전술한 문제점을 규명하고 이를 극복할 수 있는 새로운 이론적 분산곡선의 결정방법을 개발하여 이를 최적화된 형태로 전산화하는데 그 목적이 있다. 이러한 분산곡선 결정방법은 포장구조를 포함한 일반적인 다층탄성 지반모델에 대하여 주파수에 제약없이 지반 및 포장층의 성층구조와 동적 물성을 정확히 추정할 수 있는 표면파 기법의 기틀이 된다.

2. TH이론의 수치연산적 문제점

표면파인 R파는 균질탄성매질에서는 주파수에 무관하게 일정한 속도로 전파되나, 물성이 서로 상이한 탄성매질층들로 구성된 다층탄성매질과 같은 비균질매질에서는 그 전파속도가 주파수에 따라서 변화한다. 균질매질에서의 R파속도를 진R파속도(true R-wave velocity), 비균질매질에서와 같이 주파수에 따라 변화하는 R파속도를 외견R파속도(apparent R-wave velocity), 또는 위상속도(phase velocity)라 하며, R파의 주파수(또는 파장)와 위상속도 관계곡선을 분산곡선(dispersion curve)이라 한다.

Thomson[7]의 연구를 토대로 Haskell[8]은 그림 1과 같이 최하단의 균질, 반무한층위에 물성이 서로 상이한 균질, 수평층들로 구성된 다층탄성매질에서 R파의 분산곡선의 함수식인 분산방정식(dispersion equation)을 다음과 같이 일련의 매트릭스들의 곱산 형태로 유도하였다.

$$(J_{22}-J_{21})(J_{31}-J_{41}) -(J_{42}-J_{32})(J_{11}-J_{21})=0 \qquad (1)$$

식(1)에서 $J=E_n\cdot A_{n-1}\cdot A_{n-2}\cdots A_m\cdots A_2\cdot A_1$ 으로서 E_n은 반무한층, A_m은 임의의 m번째 표층의 특성과 유관한 (4×4) 매트릭스이다.

층매트릭스 A_m의 각 원소는 다음과 같은 일반적인 형태로 표현할 수 있다.

$$(A_m)_{ij}=U\cdot CP+V\cdot CQ$$

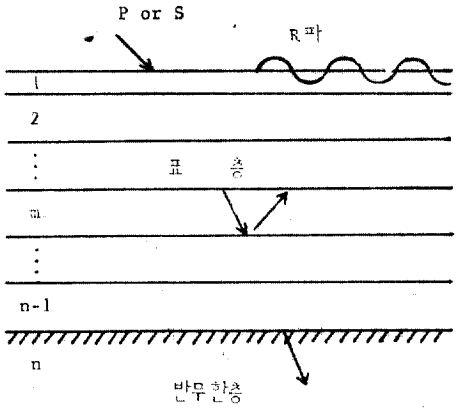

그림 1. 다층 지반에서의 표면파 전파

또는 $=X\cdot SP+Y\cdot SQ$ (2)

여기서 U, V, X, Y는 R파의 주파수와는 무관한 함수로 이루어진 계수항이고, $CP=\cos P_m$, $CQ=\cos Q_m$, $SP=\sin P_m$, $SQ=\sin Q_m$의 초월함수이며, P_m과 Q_m은 다음과 같다.

$$P_m=k\cdot d_m\cdot\gamma_{\alpha m}$$
$$=-i[2\pi/c\cdot\sqrt{1-c^2/\alpha_m{}^2}](f\cdot d_m)$$
$$Q_m=k\cdot d_m\cdot\gamma_{\beta m}$$
$$=-i[2\pi/c\cdot\sqrt{1-c^2/\beta_m{}^2}](f\cdot d_m) \quad (3)$$

여기서 $k=2\pi f/c$는 파수(Wave Number)이고 α_m, β_m은 각각 압축파 및 전단파속도, d_m은 층두께, f와 c는 각각 R파의 주파수와 위상속도이며, $\gamma_{\alpha m}=-i\sqrt{1-c^2/\alpha_m{}^2}$, $\gamma_{\beta m}=\sqrt{1-c^2/\beta_m{}^2}$, $i=\sqrt{-1}$이다.

식(3)을 고찰하면 $c<\beta_m<\alpha_m$, 또는 $\beta_m<c<\alpha_m$인 경우는 P_m 또는 Q_m은 허수가 되어 CP, CQ, SP, SQ는 쌍곡선함수가 된다. 따라서 식(3)의 $(f\cdot d_m)$이 증가하면, 즉 주파수나 층두께가 커지면 식(2)의 수치는 지수함수로 급격히 증가한다. 더우기 식(1)의 곱산형태는 가일층 수치를 증가시키게 되어 주파수가 어느 한계치를 넘으면 수치초과(overflow) 문제를 초래하게 되어 비록 식(2)의 결과적인 수치크기가 작을지라도 사실상 우변의 개별항의 수치적 연산이 불가능하게 되거나 식(3)의 매트릭스 곱산도중에 수치초과 문제가 발생한다. 또한 식 (1)의 좌변은 매우 큰 수치의 벨셈형태이므로 유효수치가 소실되어 수치오차문제가 발생하게 된다.

따라서 상대적으로 얇은 층이 협재하는 경우처럼 층두께 차이가 심하거나 층수가 많을 경우에는 비교적 낮은 주파수에서도 전술한 수치연산적 문제로 인하여 이론적 분산곡선을 결정할 수 없게 된다. 이는 TH이론의 분산방정식 형태가 식(1)과 같이 최종곱매트릭스의 원소들을 서로 곱하는 방식이 되어 식(2)의 층매트릭스 원소중에서 동종의 초월함수가 곱해지는 것에 근본적인 원인이 있는 것으로서 사실상 식(1)을 해석적으로 전개하면 이들 동종의 초월함수가 곱해진 항이 해석적으로 제거된 형태로 될 수 있으나 식(1)은 이를 그대로 내포한 형태가 되어 수치연산시 과대수치 발생에 따른 전산기의 수치초과 및 유효수치 소실 문제가 발생하는 것이다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여 Dorman[10] 등과 Press[11] 등은 주파수가 증가하여 분산방정식값이 어느 한계치 이상이 되면 표층의 일부를 하부로부터 차례로 반무한층으로 대치시켜 실제적으로 층수를 감소시키는 소위 층감소(layer reduction)기법을 적용하여 고주파수에서 수치초과문제를 방지하였다. 그러나 이기법은 반무한층으로 대치되는 최상단층 이하 반무한층 바로 위층까지 탄성파속도는 최상부층으로부터 순차적으로 증가하는 경우에 한해 적용될 수 있고 또한 실제적으로 계산에 참여되는 층수가 강조됨에 따른 수치오차 문제가 있는 등, 그 적용에 있어 제약이 있는 근사적인 방법으로서 수치연산적 문제점을 근본적으로 해결하지는 못하였다.

TH이론 이후 분산곡선의 결정에 관해 많은 연구[12-23]들이 수행되어 각각 다른 방법으로 이론적 분산곡선의 결정에 있어 수치적 연산문제를 해결하기 위한 연구들이 시도되었다. 본 연구는 이러한 연구성과들을 토대로 주파수에 제약없이 고주파수에서의 전술한 수치연산적 문제점을 극복하고 계산시간을 단축할 수 있는 새로운 연산논리를 개발하여 전산화하였다.

3. 델타 매트릭스(Delta Matrix)방법

일련의 $(n\times n)$매트릭스곱으로 이루어진 최종곱매트릭스의 임의의 r차 소행렬식(subdeterminant)은 매트릭스 곱을 이루는 각 매트릭스의

표 1. Delta Matrix 원소의 구성 방법

Delta Matrix, A^4_{pq} 의 행(p) 및 열(q) 번호	1	2	3	4	5	6	(6×6)매트릭스
선택한 소행렬식, A^{ij}_{kl}의 행(i, j) 및 열(k, l)번호	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4	(4×4)매트릭스

표 2. 델타 매트릭스 B^4의 원소

층구분	원 소	제 1 항 계 수	제 2 항 계 수	상 수 항	초월함수 곱 항
		U^4 또는 X^4	V^4 또는 Y^4	C	
표 층 (5×5)	$B^4_{11}=B^4_{55}$	$2\Gamma^2-2\Gamma+1$	$-\Gamma^2\Gamma_\alpha\Gamma_\beta-(\Gamma-1)^2(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{-1}$	$-2\Gamma(\Gamma-1)$	CC, SS
	$B^4_{12}=B^4_{45}$	$i(\rho C^2)^{-1}\Gamma_\beta^{-1}$	$i(\rho c^2)\Gamma_\alpha$	0	CS, SC
	$B^4_{13}=2B^4_{35}$	$-2(\rho c^2)(2\Gamma-1)$	$-2(\rho c^2)^{-1}[(\Gamma-1)+(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{-1}+\Gamma\Gamma_\alpha\Gamma_\beta]$	0	CC', SS
	$B^4_{14}=B^4_{25}$	$-i(\rho c^2)\Gamma_\beta$	$-i(\rho c^2)^{-1}\Gamma_\alpha^{-1}$	0	CS, SC
	B^4_{15}	$2(\rho c^2)^{-2}$	$2(\rho c^2)^{-2}[\Gamma_\alpha\Gamma_\beta+(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{-1}]$	0	CC', SS
	$B^4_{21}=B^4_{54}$	$i=(\rho c^2)\Gamma^2\Gamma_\beta$	$i(\rho c^2)(\Gamma-1)^2\Gamma_\alpha^{-1}$	0	CS, SC
	$B^4_{22}=B^4_{44}$	1	0	0	CC
	$B^4_{23}=2B^4_{34}$	$2i\Gamma\Gamma_\beta$	$2i(\Gamma-1)\Gamma_\alpha^{-1}$	0	CS, SC
	B_{24}	0	$\Gamma_\alpha^{-1}\Gamma_\beta$	0	SS
	$B^4_{31}=\frac{1}{2}B^4_{53}$	$(\rho c^2)\Gamma(\Gamma-1)(2\Gamma-1)$	$(\rho c^2)[(\Gamma-1)^3(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{-1}+\Gamma^3\Gamma_\alpha\Gamma_\beta]$	0	CC', SS
	$B^4_{32}=\frac{1}{2}B^4_{43}$	$-i(\Gamma-1)\Gamma_\beta^{-1}$	$-i\Gamma\Gamma_\alpha$	0	CS', SC
	B^4_{33}	$4\Gamma(\Gamma-1)$	$2\Gamma^2\Gamma_\alpha\Gamma_\beta+2(\Gamma-1)^2(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{-1}$	1	CC', SS
	$B^4_{41}=B^4_{52}$	$-i(\rho c^2)\cdot\Gamma^2$	$-i(\rho c^2)(\Gamma-1)^2\Gamma_\beta^{-1}$	0	CS, SC
	B^4_{51}	$2(\rho c^2)\Gamma^2(\Gamma-1)^2$	$(\rho c^2)[(\Gamma-1)^4(\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)^{-1}+\Gamma^4\Gamma_\alpha\Gamma_\beta]$	0	CC', SS
반무한층 (1×5)	B^4_{11}	$-2(\beta/\alpha)^2-C^2(1-\Gamma)^2/(\alpha^2\Gamma\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)$		—	—
	B^4_{12}	$-(\rho\alpha^2\Gamma\Gamma_\beta)^{-1}$		—	—
	B^4_{13}	$-(\rho\alpha^2)^{-1}+(1-\Gamma)/(\rho\alpha^2\Gamma\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)$		—	—
	B^4_{14}	$(\rho\alpha^2\Gamma\Gamma_\alpha)^{-1}$		—	—
	B^4_{15}	$(1+\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)/(\rho c^2\alpha^2\Gamma\Gamma_\alpha\Gamma_\beta)$		—	—

주 : ρ는 밀도, $\Gamma=2(\beta/c)^2$이며 c, α, β, Γ_α, Γ_β는 식(3)에서 정의된 바와 같으며 표층 및 반무한층을 지칭하는 밑첨자 m 및 n은 생략하였다.
예) $\alpha=\alpha_m$(표층), 또는 α_n(반무한층)

r차 소행렬식을 개개의 원소로 하는 ${}_nC_r$차의 델타 매트릭스라 하는 소행렬식 매트릭스들의 곱과 동일하게 된다.[24] 예를 들어 (4×4)매트릭스의 (2×2)소행렬식들로 구성되는 델타 매트릭스의 차수는 ${}_4C_2=6$이고 각 원소의 구성방법은 표 1과 같다.

식(1)의 분산방정식은 다음과 같이 새로운 최종곱매트릭스, J'의 첫번째 소행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

$$J'|^{12}_{12}=\begin{vmatrix} J'_{11} & J'_{12} \\ J'_{12} & J'_{22} \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

여기서 $J'=E_n'\cdot A_{n-1}\cdot A_{n-2}\cdots A_m\cdots A_2\cdot A_1$ 이고

E'_n은 다음과 같이 원래 TH의 반무한층매트릭스, E_n 중에서 0이 아닌 원소를 재배열하여 얻는 (2×4)매트릭스이다.

$$E'_n=\begin{bmatrix} E_{11} & -E_{22} & E_{13} & -E_{24} \\ -E_{31} & E_{42} & -E_{33} & E_{44} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

따라서 식(4)는 델타 매트릭스 정리로부터 다음과 같다.

$$J'|{}^{12}_{12}=(E^{\Delta}_{11}E^{\Delta}_{12}\cdots E^{\Delta}_{15}E^{\Delta}_{16})_n\times$$

$$\begin{pmatrix} A^{\Delta}_{11} & A^{\Delta}_{12}\cdots A^{\Delta}_{16} \\ \vdots & \vdots \\ A^{\Delta}_{51} & A^{\Delta}_{52}\cdots A^{\Delta}_{56} \\ A^{\Delta}_{61} & A^{\Delta}_{62}\cdots A^{\Delta}_{66} \end{pmatrix}_{n-1}\cdots\begin{pmatrix} (A^{\Delta}{}_{ij}) \end{pmatrix}_2\begin{pmatrix} A^{\Delta}_{11} \\ A^{\Delta}_{21} \\ \vdots \\ A^{\Delta}_{51} \\ A^{\Delta}_{61} \end{pmatrix}_1 \qquad (6)$$

식(6)과 같이 델타 매트릭스의 곱산으로 표현된 분산방정식은 그 매트릭스 곱산이 (1×6)(6×6)…(6×6)(6×1)=(1×1)이 됨으로 단일원소(single element)로 됨을 알 수 있으며 또한 $A^{\Delta}_{51}=A^{\Delta}_{41}$가 되어 식(6)은 (5×5)매트릭스 곱산으로 축소할 수 있는데 이를 축소 델타매트릭스(reduced delta matrix), B^{Δ}라 한다. 매트릭스, B^{Δ}의 모든 원소는 다음과 같이 일반적 형태로 표현할 수 있다.

$$(B^{\Delta})_{ij}=U^{\Delta}\cdot CC+V^{\Delta}\cdot SS+C$$

또는 $$=X^{\Delta}CS+Y^{\Delta}\cdot SC+C \qquad (7)$$

여기서 U^{Δ}, V^{Δ}, X^{Δ}, Y^{Δ} 및 C는 층의 물성과 R파 위상속도만의 함수로 표현되는 계수항 및 상수항이며 CC, SS, CS, SC는 R파의 주파수에 관한 초월함수들의 곱항들로서 다음과 같다.

$$CC=CP\cdot CQ(\text{또는 } CC'=1-CP\cdot CQ),$$
$$SS=SP\cdot SQ,\ CS=CP\cdot SQ,$$
$$SC=SP\cdot CQ \qquad (8)$$

표 2에는 매트릭스, B^{Δ}의 원소를 나타내었다.

식(7)을 원래의 TH이론에 의한 식 (1)의 분산방정식과 비교하면 동종의 초월함수가 곱해진 항이 해석적으로 제거된 형태임을 알 수 있다.

4. 새로운 연산논리의 개발

본 연구에서는 분산방정식이 델타 매트릭스를 이용하면 식(7)과 같이 됨에 착안하여 고주파수에서 전술한 수치연산적 문제점을 극복할 수 있는 연산 논리를 개발하였다.

4-1. 층매트릭스의 인수분해

식(7)을 이용하더라도 여전히 P_m 또는 Q_m이 매우 커지면 각항의 초월함수값이 과대하여 수치초과문제가 발생하게 되는데 다음과 같이 고주파수에서 층매트릭스가 인수분해됨을 알 수 있으므로 이 점을 이용하여 수치초과 문제를 해결할 수 있다.

$\beta_m<c<\alpha_m$이고 P_m매우 큰 경우에는,

$$CP=1/2(e^{Pm}+e^{-Pm})=1/2e^{Pm}=CP^*$$
$$SP=i1/2(e^{Pm}-e^{-Pm})=-i(1/2e^{Pm})$$
$$=-i\cdot CP^* \qquad (9)$$

따라서 식(7)은 다음과 같이 쌍곡선함수, CP를 공통인수로 하여 인수분해할 수 있다.

$$(B^{\Delta})_{ij}=CP^*[U^{\Delta}\cdot CQ-i\cdot V^{\Delta}\cdot SQ]$$
$$+\underbrace{(C/CP^*)}_{\approx 0}$$
$$=CP^*[U^{\Delta}\cdot CQ-i\cdot V^{\Delta}\cdot SQ]$$
또는, $$=CP^*[U^{\Delta}\cdot\{\underbrace{(1/CP^*)}_{\approx 0}-CQ\}$$
$$-i\cdot V^{\Delta}\cdot SQ]+\underbrace{(C/CP^*)}_{\approx 0} \qquad (10)$$
$$=CP[-U^{\Delta}\cdot CQ-i\cdot V^{\Delta}\cdot SQ]$$
또는, $$=CP^*[X^{\Delta}\cdot SQ-i\cdot Y^{\Delta}CQ]$$

같은 방법으로 $c<\beta_m<\alpha_m$이고, P_m과 Q_m이 매우 클 경우에는 $SP=-i\cdot CP^*$, $SQ^*=iCP^*$가 되어 식(7)은 $CC^*=CP^*\cdot CQ^*$를 공통인수로 하여 다음과 같이 인수분해 할 수 있다.

$$(B^{\Delta})_{ij}=CP^*CQ^*[U^{\Delta}-V^{\Delta}]$$
또는 $$=-iCP^*CQ^*[X^{\Delta}+Y^{\Delta}] \qquad (11)$$

식(10) 및 식(11)을 고찰하면 P_m 또는 Q_m이 각각 허수가 되는 $\beta_m<c<\alpha_m$, $c<\beta_m<\alpha_m$인 경우는 초월함수가 쌍곡선함수가 되나 식(3)의 $(f\cdot d_m)$이 어느 한계치 이상이 되면 (*) 표시가 붙은 쌍곡선 함수를 제거한 형태의 식을 사용함으로서 과대수치의 발생을 방지할 수 있음을 알 수 있다. 이는 식 (4)의 분산방정식 우변이 고주파수에서 실제적으로 인수분해됨을 의미하는 것으로서 분산방정식의 근을 구하는데 있어 오차를 유발하지 않는다.

4-2. 곱매트릭스의 정규화

식(6)과 같이 층매트릭스가 곱해짐에 따라 중

간 곱매트릭스의 원소들의 수치가 증가함으로 인해서도 과대수치가 발생할 수 있는데, 이는 매번의 매트릭스 곱 후 얻어지는 중간 곱매트릭스의 원소 중 최대수치를 갖는 원소의 절대값으로 모든 원소의 수치를 나눈 후, 다음번의 층매트릭스를 곱함으로써 과대수치의 발생을 방지할 수 있다. 이는 양의 상수로 분산방정식의 양변을 나누는 것과 동일하므로 수치오차를 유발하지 않는다.

5. 연산논리의 최적화

식(6)의 분산방정식은 R파의 주파수와 위상속도에 관한 초월함수 형태이므로 무수히 많은 근이 존재하게 되며 각 근은 특정 모드(mode)의 분산곡선을 의미하게 된다. 이러한 분산방정식의 근의 결정은 R파의 주파수나 위상속도중 어느 한 변수를 고정시키고 식(6)을 만족하는 나머지 한 변수값을 시행착오적으로 반복연산해야

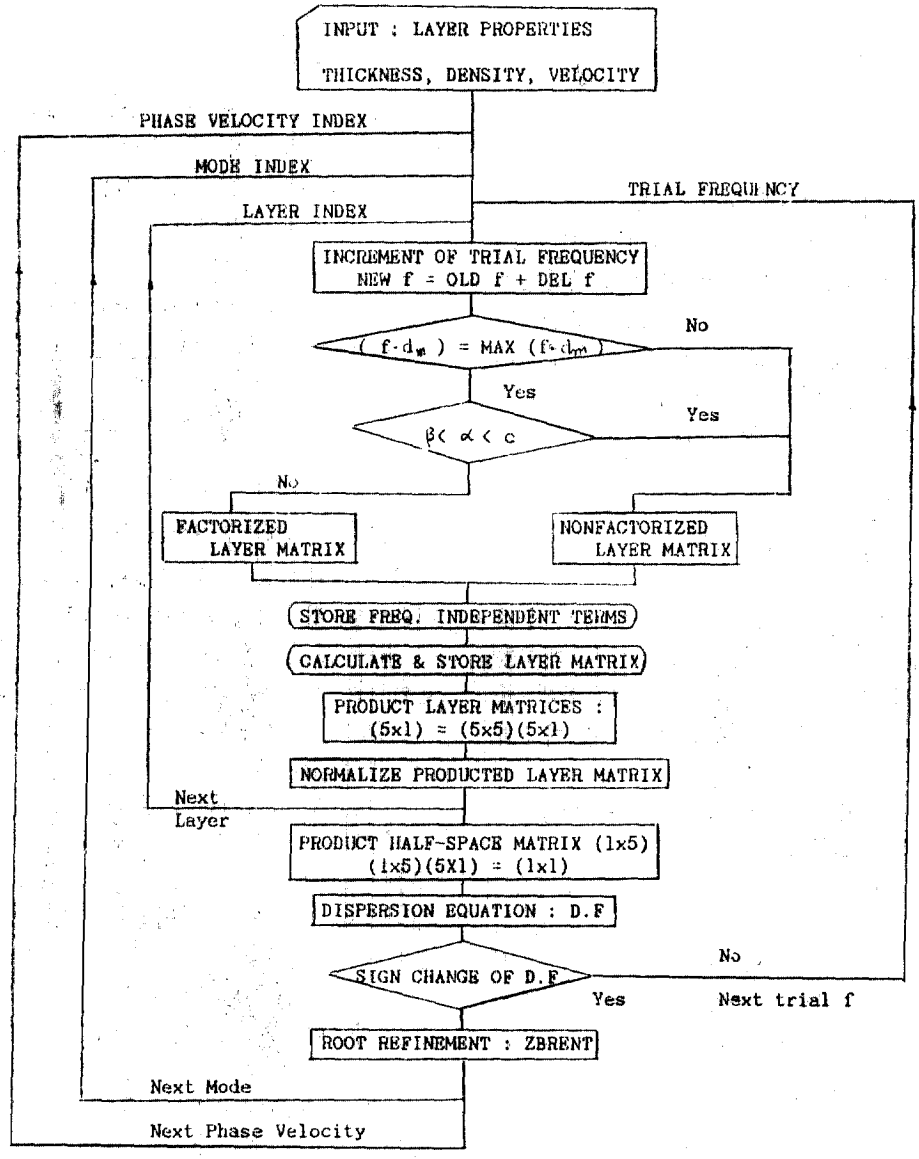

그림 2. 분산곡선도출 프로그램의 유통도

하는데 본 연구에서는 이러한 연산과정을 계산시간을 단축시키고 근의 정확도를 증진시킬 수 있도록 최적화한 연산논리를 개발하였다.

5-1. 분산방정식 근의 결정

본 연구에서는 위상속도를 고정하고 주파수를 0에서부터 일정증분씩 증가시키면서 첫번째 단계로서 분산함수값의 부호가 바뀌는 근의 범위를 결정하고 두번째 단계로서 Brent[25] 알고리즘을 이용하여 정밀한 근을 산출하였다.

이와 같은 근의 결정방법은 각 모드별 분산곡선을 순차적으로 용이하게 얻을 수 있는 장점이 있다.

5-2. 주파수 무관항의 분리계산

식(7)의 층매트릭스 원소계산시, 주파수와 무관한 계수항 및 상수항인, U^d, V^d, X^d, Y^d 및 C를 별도로 분리하여 주어진 위상속도에 대해 일회만 계산시켜 기억시켜 놓는다. 다음에 주파수와 유관한 초월함수항들을 주파수를 시행착오적으로 변화시키는 반복연산시 기억시켜 놓은 계수항과 상수항을 단순히 곱하거나 더함으로서 계산시간을 단축할 수 있도록 하였다.

5-3. 가상토층기법

식(3)의 $(f \cdot d_m)$의 의미를 고찰하면 주파수를 정수배적으로 증가시키게 되면 고주파수의 해는 저주파수일 때 마치 동일한 두께의 각 층들이 (고주파수/저주파수=정수), n개 만큼 가상적으로 존재하는 경우와 물리적으로 같은 의미가 된다. 따라서 고주파수의 경우는 재차로 층매트릭스를 계산할 필요없이, 전 단계의 저주파수 때의 층매트릭스를 단순히 매트릭스적으로 n번 곱함으로써 분산방정식의 근의 범위를 결정하는데 있어 계산시간을 단축할 수 있다.

6. 개발된 컴퓨터 프로그램의 특성

전술한 바와 같이 델타 매트릭스 방법을 이용하여 동종의 초월함수 곱항을 해석적으로 제거하고 고주파수에서의 층매트릭스의 인수분해와 정규화 및 최적화된 연산논리를 적용하면, 원래의 TH이론의 직접적용이 내포하고 있는 층수와 층두께 및 계산가능한 주파수 상한계 제약이 해결된다. 따라서 일반적인 다층지반에서의 이론적 분산곡선을 구할 수 있으므로 특히 포장구조에서와 같이 물성이 하부자연지반과 현저하게 다르고 두께가 얇은 상부포장층의 물성추정을 위하여 짧은 파장의 고주파수에서의 실측 분산곡선을 역산할 수 있는 보다 정확한 표면파기법을 개발할 수 있게 된다.

본 연구에서 개발된 이론적 분산곡선의 산출을 위한 컴퓨터 프로그램의 유통도를 그림 2에 나타내었다.

7. 수치적 검증(Numerical Test)

본 연구에서 개발된 이론적 분산곡선결정을 위한 컴퓨터 프로그램의 타당성을 기존의 연구성과와 비교하기 위하여 표 3에 나타낸 Press 등[11]의 지반모델을 택하였다.

표 3. Press 등의 지반모델

층번호	두께 d(km)	압축파속도 α(km/sec)	전단파속도 β(km/sec)	밀도 ρ(gr/cm³)
1	22.000	6.030	3.530	2.780
2	15.000	6.700	3.800	3.000
3	13.000	7.960	4.600	3.370
4	25.000	7.850	4.500	3.390
5	25.000	7.850	4.410	3.420
6	5.000	5.000	2.000	3.240
7	20.000	7.850	4.410	3.420
8	75.000	8.000	4.410	3.450
9	50.000	8.200	4.500	3.470
10	100.000	8.400	4.600	3.500
11	100.000	9.000	4.950	3.630
12	100.000	9.630	5.310	3.890
13	100.000	10.170	5.630	4.130
14	100.000	10.535	5.915	4.330
15	100.000	10.955	6.140	4.490
16	100.000	11.275	6.285	4.600
18	반무한층	11.755	6.500	4.800

표 4에는 표 3의 지반모델에 있어 위상속도, $3.79 \leqq c \leqq 3.81$ km/sec에 대한 R파의 첫번째 모드해를 층감소기법을 적용한 Press등[11]의 결과와 본 연구의 결과를 비교하였다. 표 4에서 비교대상 항인 $kd_1 = \frac{2\pi f}{c}$ (22.0)는 각 파수(angular wave number)이고, NRE는 Press등[11]의 방법에서 감소된 층수로서 본 연구에서 고주파수인 경우 인수분해되는 층수, NFE는 이와 상

표 4. 첫번째 모드에 대한 본 연구와 Press등과의 결과 비교($3.79 \leqq c \leqq 3.81$ km/sec)

위상속도 c(km/sec)	주 파 수 f,(Hz)	무차원파수, kd_1 본 연 구 (Press등)	인수분해(감소)층수 본연구 NFE	Press등 NRE
3.81000	.1530288E−01	.5552016E+00 (.55520)	0	2
3.80800	.1557907E−01	.5655191E+00 (.56552)	0	2
3.80600	.1589016E−01	.5771145E+00 (.57712)	0	2
3.80400	.1624872E−01	.5904473E+00 (.59045)	0	2
3.80200	.1667638E−01	.6063066E+00 (.60631)	0	2
3.79990	.1724932E−01	.6274837E+00 (.63895)	0	2
3.79800	.1799257E−01	.6548483E+00 (.65485)	0	4
3.79600	.2780059E−01	.1012349E+01 (1.01235)	0	5
3.79400	.2884038E−01	.1050767E+01 (1.05076)	0	7
3.79200	.2960365E−01	.1079144E+01 (1.07915)	0	7
3.79000	.3022986E−01	.1102553E+01 (1.10255)	0	7

표 5. Haskell의 지반모델

층번호	두 께 d(km)	압축파속도 α(km/sec)	전단파속도 β(km/sec)	밀 도 ρ(gr/cm³)
1	13.600	6.140	3.390	2.700
2	11.850	5.500	3.180	2.700
3	반무한층	8.260	4.650	3.000

표 6. 각 모드별 본 연구와 Abo-Zena와의 결과 비교 (c=3.50 km/sec)

모드번호	주 파 수, f(Hz) 본 연 구	Abo-Zena	파 장 L_R,(km)	인수분해층수 NFE
1	.4403937E−01	0.04	.7947433E+02	0
2	.2318485E+00	0.23	.1509607E+02	0
3	.4320920E+00	0.43	.8100127E+01	0
4	.6298225E+00	0.63	.5557121E+01	0
5	.8178924E+00	0.82	.4279291E+01	0
6	.1023471E+01	1.02	.3419735E+01	0
7	.1211526E+01	1.21	.2888919E+01	0
8	.1409259E+01	1.41	.2483574E+01	0
9	.1609684E+01	1.61	.2174340E+01	0
10	.1796225E+01	1.80	.1948531E+01	0
11	.2001391E+01	2.00	.1748784E+01	0
12	.2191632E+01	2.19	.1596984E+01	0
13	.2386468E+01	2.38	.1466602E+01	0
14	.2589195E+01	2.59	.1351771E+01	0
15	.2775008E+01	2.77	.1261258E+01	0
16	.2978963E+01	2.98	.1174905E+01	0
17	.3171855E+01	3.17	.1103455E+01	0
18	.3363857E+01	3.36	.1040472E+01	0
19	.3568284E+01	3.57	.9808635E+00	0
20	.3754238E+01	3.75	.9322797E+00	0
21	.3956282E+01	3.96	.8846690E+00	0
22	.4152056E+01	4.15	.8429559E+00	0
23	.4341532E+01	4.34	.8061670E+00	1
24	.4546921E+01	4.55	.7697516E+00	1
25	.4733871E+01	4.73	.7393525E+00	1
26	.4933457E+01	4.93	.7094415E+00	1
27	.5132095E+01	5.13	.6819826E+00	2
28	.5319580E+01	5.31	.6579467E+00	2
29	.5525114E+01	5.52	.6334711E+00	2
30	.5713824E+01	5.71	.6125494E+00	2
31	.5910612E+01	5.91	.5921552E+00	2
32	.6111851E+01	6.11	.5726579E+00	2
33	.6298059E+01	6.30	.5557268E+00	2
34	.6502910E+01	6.50	.5382205E+00	2
35	.6693984E+01	6.69	.5228575E+00	2
36	.6887868E+01	6.88	.5081398E+00	2
37	.7091229E+01	7.09	.4935675E+00	2
38	.7276992E+01	7.28	.4809679E+00	2
39	.7480387E+01	7.48	.4678902E+00	2
40	.7674216E+01	7.67	.4560726E+00	2
41	.7865339E+01	7.86	.4449903E+00	2
42	.8070170E+01	8.07	.4336959E+00	2
43	.8256361E+01	8.26	.4239155E+00	2
44	.8457646E+01	8.46	.4138267E+00	2
45	.8654378E+01	8.65	.4044196E+00	2
46	.8843129E+01	8.84	.3957875E+00	2
47	.9048658E+01	9.05	.3867976E+00	2
48	.9236111E+01	9.27	.3789474E+00	2
49	.9434801E+01	9.43	.3709670E+00	2
50	.9634336E+01	9.63	.3632839E+00	2
51	.9821314E+01	9.82	.3563678E+00	2
52	.1002671E+02	9.98	.3490675E+00	2

응되는 의미를 갖는다.

표 4의 결과를 고찰하면 본 연구에서 개발된 방법은 한계수치초과를 방지하기 위하여 Press[11] 등과 같이 실제적으로 표층수를 감소시키지 않고서도 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

본 연구에서 개발된 방법이 실질적으로 주파수에 제약을 받지 않음을 예시하기 위하여 표 5

의 Haskell 지반모델[8]에 대한 위상속도 c=3.50 km/sec 에 있어 52개 모드해에 대한 본 연구의 결과와 Abo-Zena[21]의 결과를 표 6에 비교하여 나타내었다. 표 6의 주파수, f중 Abo-Zena[21]의 결과는 발표된 논문에 수록된 그래프 형태로 표현한 분산곡선에서 산출한 수치로서 수록된 논문의 좌표축척관계상 소숫점 이하 둘째자리까지 밖에 정확성을 기할 수 없는 제한이 있었다.

표 6의 결과를 고찰하면 52번째 모드해의 경우, R파의 파장, L_R=0.349 km 는 제 1층 두께의 약 1/39 크기임을 알 수 있는데 이는 전파속도 c=3.50 km/sec 인 R파의 52번째 모드 성분은 전에너지가 제 1층의 약 1/39 깊이내에 분포되는 매우 높은 주파수임을 의미한다. 또한 이때의 NFE=2는 층매트릭스가 모두 식(10)의 인수분해된 형태로 됨을 의미하는데 이때의 주파수 f=10.02 Hz는 표 6의 결과가 처리가능 수치한계, RMAX=1.7×10^{36}일 때의 주파수상한값 f_{max}=4.19 Hz 보다 큰 높은 주파수임을 알 수 있으며, 이와 같은 층매트릭스의 인수분해 알고리즘을 적용하면 주파수의 제약없이 근을 정확히 구할 수 있음을 알 수 있다.

근의 정확도는 층매트릭스 계산에 있어 인수분해된 형태의 사용여부를 결정하는 RMAX의 값에 따라 다소 변화할 수 있으나 본 연구의 수치실험 결과, 16 bit 컴퓨터의 4 byte 실변수(real floating point variable)의 처리가능 수치상한계값의 약 1/100인 10^{36} 이상의 RMAX 값에 대해 근의 변화는 거의 없었다. 본 프로그램은 RMAX를 입력데이터로 처리하여 컴퓨터 기종에 따라 수치한계초과 범위를 조절하고 근의 정확도를 비교할 수 있도록 하였다.

8. 결 론

본 연구에서는 다층탄성체에서 이론적 분산곡선을 주파수에 제약을 받지 않고 결정할 수 있는 새로운 해석적 방법을 개발하였다. 이는 표면파기법을 적용하여 자연지반 및 포장구조의 성층구조와 동적물성을 추정하는 역산기법의 근간이 된다. 본 연구에서 개발된 해석적 방법은 델타 매트릭스 기법을 활용하여 고주파수인 경우에 층매트릭스의 인수분해와 곱매트리스의 정규화를 가능하게 함으로써 종래에 적용해 오던 Thomson-Haskell 방법의 수치연산적 문제점을 극복하였다. 또한 가상토층기법, 주파수 무관항의 분리 및 분산방정식근 결정의 효율화 등을 통하여 계산시간을 단축할 수 있는 연산논리를 개발하여 이를 최적화된 형태로 전산화 하였다.

수치검증 결과, 본 연구에서 개발된 방법은 소숫점 이하 5자리까지 타 연구 결과와 일치하는 결과를 줌을 알 수 있었다. 본 연구에서 개발된 이론적 분산곡선의 결정방법은 자연지반은 물론, 특히 상부 포장층의 물성을 정확히 추정하기 위하여 고주파수에서의 분산곡선의 역산이 필요한 포장구조에 있어 보다 정확하고 효율적인 표면파 기법의 개발에 토대가 될 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Heuklom, W., and Foster, C.R., "Dynamic Testing of Pavement", *J. SMFE, ASCE*, Vol. 86, No. SMI, Part 1, pp. 1~28, 1960.
2. Szendrei, M.E., and Freeme, C.R., "Road Responses of Vibration Tests", *J. SMFE, ASCE*, Vol. 96, No. SM6, pp. 2094~2124, 1970.
3. Gazetas, A., "Vibrational Characteristics of Soil Deposits with Variable Wave Velocity", *Int. J. Num. Anal. Method Geom.*, Vol. 6, pp. 1~20, 1982.
4. Nazarian, S., Stokoe, K.H.II., and Hudson, W. R., "Use of Spectral of Surface Wave Method for Determination of Moduli and Thicknesses of Pavement Systems", In *Transp. Res. Rec. 930, TRB*, pp. 38~45, 1983.
5. 김수일, 이두희, 우제윤, "Rayleigh 파의 해석을 통한 다층토의 동적 물성 추정에 관한 연구", 연세대 산업기술연구소 논문집, 제17집, 제 2 권(23), pp. 237~245, 1985.
6. Nazarian, S., and Stokoe, K.H.II, "Nondestructive Testing of Pavements Using Surface Waves", *In Transp. Res. Rec. 993, TRB*, pp. 67~79, 1984.
7. Thomson, W.T., "Trasmission of Elastic Waves Through a Stratified Solid Medium", *J. Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 89~93, 1950.

8. Haskell, N.A., "The Dispersion of Surface Waves on Multi-Layered Media", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 43, pp. 17~34, 953.
9. 김수일, "지표면 진동에 의한 지반특성 분석", 연세대 산업기술연구소 논문집, 제17집, 제 1 권(22), pp. 59~66, 1985.
10. Dormann, J., Ewing, M., and Oliver, J., "Study of Shear-Velocity Distribution in the Upper Mantle by Mantle Rayleigh Waves," *Bull. Seism. Soc. Am*, Vol. 50, pp. 87~115, 1960.
11. Press, F., Harkrider. D., and Seafeldt, C.A., "A Fast, Comvenient Program for Computation of Surface Wave Dispersion Curves in Multilayered Media", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 51, pp. 495~502, 1961.
12. Knopoff, L., "A Matrix Method for Elastic Wave Problem," *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 54, pp. 431~438, 1964.
13. Dunkin, J., "Computation of Modal Solutions in Layered, Elastic Media at High Frequencies", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 55, pp. 335~358, 1965.
14. Thrower, E.N., "The omputation of the Dispersion of Elastic Waves in Layered Media," *J. Sound Vib.*, Vol. 2, pp. 210~226, 1965.
15. Gilbert, F., and Backus, G., "Propagator Matrices in Elastic Waves and Vibration Problems," *Geophysics*, Vol. 31, pp. 326~332, 1966.
16. Randall, M.J., "Fast Programs for Layered Half-Space Problem," *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 57, pp. 1299~1315, 1967.
17. Watson, T.H., "A Note on Fast Computation of Rayleigh Wave Dispersion in the Multilayered Halfspace", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 60, pp. 161, 1970.
18. Schwab, F. and Knopoff, L., "Surface Wave Dispersion Computation," *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 60, pp. 321~344, 1970.
19. Schwab, F., "Surface-Wave Dispersion Computation: Knopoff's Method," *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 60, pp. 1491~1520, 1970.
20. Schwab, F. and Knopoff, L., "Fast surface Wave and Free Mode Computation," in *Methods in Computational Physics*, Vol. 11, Bolt, B.A., Edit or, Academic Press, New York, pp. 87~180, 1972.
21. Abo-Zena, A.M., "Dispersion Funtion Computations for Unlimited Frequency Values," *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, Vol. 58, pp. 91~105, 1979.
22. Kind,R. and Odom, R.I., "Improvements to layer Matrix Methods," *J. Geophys*, Vol.53, pp. 127~130, 1983.
23. Schwab, F., Nakanishi, K., Cuscito, M., Panza, G.F., Liang, G., and Frez, J., "Surface-Wave Computations and the Synthesis of Theoretical Seismo grams at High Frequencies", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 74, pp. 1555~1578, 1984.
24. Pestel, E.C., and Leckie, F.A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGrow-Hill, NewYork, pp. 192~213, 1963.
25. IMSL, "ZBRENT", *Scientific Subroutine Package.*
26. FU, C.Y., "Study on Seismic Waves: II. Rayleigh Waves in a Superficial Layer," *Geophysics*, Vol. 11, pp. 10~23, 1946.
27. Pao, Y.H., "Elastic Waves in Solids," *Transactions of the ASME*, Vol. 50, pp. 1152~1164, 1983.
28. Rayleigh, L., *The Theory of Sound, Znd ed.* Vol. I and II, Dover, New York, 1926.
29. Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th. ed., Dover, New York, 1944.
30. Kolosky, H., *Stress Waves in Solids*, Oarendon Press, oxford, 1953.
31. Richart. F.E. Jr., Wood, R.D., and Hall, J.H. Jr., *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Englwood Cliffs, 1969.
32. Wiegel, R.L., *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Englwood Cliffs, 1970.
33. Prange, B. (Editor), *Dynamical Method in Soil and Rock Mechanics*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1978.
34. Prakash, S., *Soil Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1981.
35. Vardoulakis, I. and Dougalis, V., "on Surface Waves in a Gibson Half-Space", in *Proceedings of International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Rolla, Missouri, pp. 557~559, 1981.

(接受 : 1987. 4. 28)