

# 兩端힌지 正弦아치의 自由振動에 관한 研究

## Free Vibration Analysis of Hinged Ended Sinusoidal Arches

李 炳 求\*  
Lee, Byoung Koo

### Abstract

The governing differential equations for the free vibration of general arch are derived including the effect of rotary inertia in addition to the usual actions.

These differential equations are applied to the sinusoidal arch and the numerical methods are developed to analyze these equations. A trial eigenvalue method and the Runge-Kutta method are used to determine the natural frequencies and to perform the integration of the differential equations, respectively.

A detailed studies are made of the lowest three vibration frequencies for hinged arches with the span length equal to 10 m. The effect of the rotary inertia is analyzed. And as the numerical results the frequency versus the rise of arch and the radius of gyration are presented in figures.

### 要 旨

아치가 振動할 때 아치의 微小要素에 作用하는 合應力과 D'Alembert의 慣性力에 대한 平衡方程式을 利用하여 回轉慣性を 考慮한 一般아치의 自由振動을 支配하는 微分方程式을 誘導하였다.

이 微分方程式을 正弦아치에 適用시키고, 試行錯誤의 固有值問題와 Runge-Kutta method를 利用하여 正弦아치의 自由振動을 解析할 수 있는 알고리즘을 開發하였다.

本 研究의 妥當性を 檢證하기 위하여 本 研究의 數值解析 結果와 SAP IV의 結果가 잘 一致함을 보였다.

數值解析例에서는 兩端힌지 아치에 대하여 回轉慣성이 固有振動數에 미치는 影響, 固有振動數와 아치높이와의 關係, 固有振動數와 回轉半徑과의 關係를 考察하였다.

### 1. 序 論

아치는 構造的으로 매우 理想的일 뿐만 아니라 그 美的인 感覺 때문에 옛부터 橋梁等 各種 構造物에 많이 利用되었다<sup>(1)</sup>. 또한 20世紀初부

터 發展하기 始作한 鋼材의 壓延技術은 鋼構造 部材의 輕量化를 가져왔으며, 800 N/mm<sup>2</sup> 級의 高張力 鋼材의 出現은 支間이 긴 아치橋의 架設을 可能하게 하여 自然景觀과 調和를 이루는 아름다운 아치橋가 登場하게 되었다.

아치를 橋梁과 같이 動荷重이 作用하는 構造

\* 正會員·圓光大學校 工科大學 副教授, 土木工學科

물에 利用하는 境遇에는 振動이 아치의 舉動에 미치는 影響이 相當히 크기 때문에 拱構造의 振動에 대한 綜合的인 檢討가 必須的으로 要請되고 있다<sup>(2)</sup>. 특히 構造物의 固有한 特性中에 하나인 自由振動을 解析하는 것은 振動의 諸問題中에서도 가장 먼저 先行되어야 할 研究課題이다.

아치의 自由振動을 研究한 論文들은 많은 文獻들<sup>(3, 4, 5)</sup>에서 찾아 볼 수 있지만 大部分이 圓弧아치와 拋物線아치를 研究의 對象으로 하고 있으며 正弦아치에 대한 研究는 거의 찾아볼 수 없었다.

이러한 觀點에서 本 研究는 回轉慣性을 考慮한 兩端힌지 正弦아치의 自由振動 特性을 把握함으로서 아치의 振動에 대한 理論을 擴張하고, 나아가서 實際로 拱構造物의 設計時에 더욱 正確한 自由振動 特性을 考慮하도록 하는 데에 研究目的이 있다.

本 研究에서 使用한 基本假定은 다음과 같다.

- (1) 拱軸은 正弦이며, 拱頂을 基準으로 對稱이다.
- (2) 拱의 斷面積은 一定하다.
- (3) 自由振動解析에서 減衰效果는 考慮하지 않는다.
- (4) 拱의 應力解析은 彈性理論을 따른다.
- (5) 拱斷面은 變形을 일으킨 후에도 平面을 維持한다.

## 2. 基本理論

### 2.1. 合應力

아치가 自由振動하게 되면 拱軸上의 任意點  $S_0$ 의 位置는 一定한 週期를 갖고 變化한다. 이때, 그림 1과 같이  $S_0$ 의 接線方向의 最大變位 즉, 接線方向의 振幅을  $v$ , 曲率中心方向의 最大變位 즉, 曲率中心方向의 振幅을  $w$ 라 한다.  $S_0$ 에서 拱軸을 따라 微小增分  $ds$ 距離의 點을  $S_1$ 이라 하면 이 點의 變位는  $v+dv$ ,  $w+dw$ 가 된다.

拱軸上의 任意點  $S_0$ 가 變位를 일으키면 이 斷面에는 變位로 인한 合應力이 發生하게 된다. 拱의 面內振動만을 考慮하면 이 斷面에는 軸方向力  $N$ , 剪斷力  $V$  및 휨모멘트  $M$ 이 發生하며  $N$ 과  $M$ 은 다음 式과 같이 表示된다<sup>(6)</sup>.

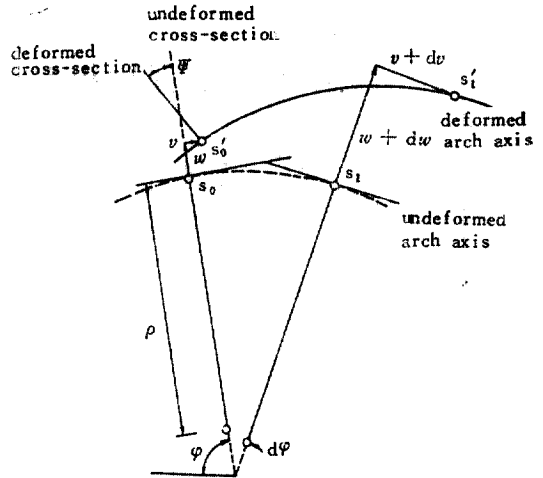


그림 1. 拱의 變位

$$N = \frac{EA}{\rho} \left[ \left( \frac{dv}{d\phi} + w \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2w}{d\phi^2} + w \right) \right] \quad (1)$$

$$M = -\frac{EA r^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2w}{d\phi^2} + w \right) \quad (2)$$

(1), (2)式에서  $E$ 는 彈性係數,  $A$ 는 斷面積,  $r$ 은 回轉半徑,  $\rho$ 는  $S_0$ 의 曲率半徑,  $\phi$ 는  $S_0$ 의 曲率中心方向과 水平軸이 이루는 radian으로 表示되는 角度이다.

拱軸이 變形을 일으키게 되면 拱斷面은 回轉하게 되고 이 回轉角  $\psi$ 는 다음 式으로 구할 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (3)$$

### 2.2 D'Alembert의 慣性力

拱의 自由振動은 다음 式들과 같이 調和振動을 한다고 假定한다<sup>(8)</sup>.

$$v(\phi, t) = v \sin \omega t \quad (4)$$

$$w(\phi, t) = w \sin \omega t \quad (5)$$

$$\psi(\phi, t) = \psi \sin \omega t \text{ 等} \quad (6)$$

윗 式들에서  $v(\phi, t)$ ,  $w(\phi, t)$ ,  $\psi(\phi, t)$ 는 任意時間  $t$ 일 때  $S_0$ 의 接線方向의 變位, 曲率中心方向의 變位, 斷面の 回轉角을 各各 나타낸다.  $v$ ,  $w$  및  $\psi$ 는 이들의 調和振動式에 對應하는 自由振動의 振幅을 나타내는 基準函數이며  $\phi$  단의 函數이다. 또  $\omega$ 는 rad/sec로 表示되는 固有角振動數이다.

아치가 振動하면  $v(\phi, t)$ 와  $w(\phi, t)$ 는 時間에

따라서 直線運動을 하며,  $\psi(\varphi, t)$ 는 回轉運動을 하게 된다. 따라서 質量을 갖는 아치의 微小要素에는 直線運動  $v(\varphi, t)$ 와  $w(\varphi, t)$ 에 의해서 D'Alembert의 移行慣性力이, 回轉運動  $\psi(\varphi, t)$ 에 의해서는 D'Alembert의 回轉慣性偶力이 發生하게 된다.  $v(\varphi, t)$ 에 의한 接線方向의 移行慣性力  $P_t(\varphi, t)$ 는 다음과 같이 調和振動式으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} P_t(\varphi, t) &= m \frac{\partial^2 v(\varphi, t)}{\partial t^2} \\ &= -m \omega^2 v \sin \omega t \\ &= -P_t \sin \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式에서 調和振動式  $P_t(\varphi, t)$ 의 振幅  $P_t$ 는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$P_t = m \omega^2 v \quad (8)$$

(8)式에서  $m$ 은 아치의 單位길이당 質量이며, 따라서  $P_t$ 도 單位길이당 移行慣性力이다.

마찬가지로  $w(\varphi, t)$ 에 의한 曲率中心方向의 移行慣性力  $P_r(\varphi, t)$ 의 振幅  $P_r$ 와  $\psi(\varphi, t)$ 에 의한 回轉慣性偶力  $T(\varphi, t)$ 의 振幅  $T$ 를 구하면 다음과 같다.

$$P_r = m \omega^2 w \quad (9)$$

$$T = m \omega^2 r^2 \psi = \frac{m \omega^2 r^2}{\rho} \left( \frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (10)$$

윗 式들에서  $P_r$ 와  $T$ 도 (8)式과 마찬가지로 各各 單位길이당 移行慣性力과 回轉慣性偶力을 나타낸다.

### 2.3 平衡方程式

그림 2와 같이 弧의 길이  $dS = \rho d\varphi$ 를 갖는 아치의 微小要素에 대한 平衡을 생각한다. 아치가 振動하면 前述한 바와 같이 아치의 斷面에는 變位에 의한 合應力  $N, V, M$ 과 아치의 微小要素에는 慣性에 의한 慣性力  $P_t, P_r, T$ 가 作用하게 된다. 이들 合應力과 慣性力에 대한 平衡方程式을 세우면 다음과 같다.

먼저 아치의 接線方向에 대한 힘의 平衡方程式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (N+dN) \cos \frac{d\varphi}{2} - N \cos \frac{d\varphi}{2} + (V+dV) \sin \frac{d\varphi}{2} + V \sin \frac{d\varphi}{2} + \rho d\varphi P_t &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

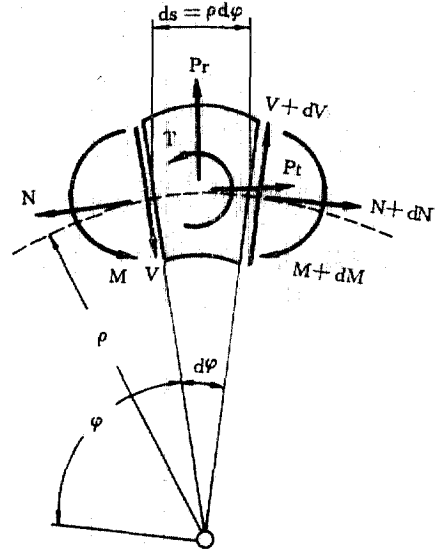


그림 2. 아치 微小要素에 作用하는 合應力 및 慣性力

$d\varphi$ 는 微小角이므로  $\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$ ,  $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ 를 (11)式에 代入하고 高次項  $dVd\varphi$ 를 無視하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\frac{dN}{d\varphi} + V + \rho P_t = 0 \quad (12)$$

마찬가지로 曲率中心方向의 힘에 대한 平衡方程式과 모멘트에 대한 平衡方程式을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{d\varphi} - N + \rho P_r = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\varphi} - V - T = 0 \quad (14)$$

## 3. 微分方程式의 誘導

### 3.1 微分方程式

平衡方程式 (12), (13), (14)式에 合應力  $N, M$ 과 慣性力  $P_t, P_r, T$ 를 代入하고 整理하면 아치의 自由振動을 支配하는 微分方程式을 誘導할 수 있다.

(1)式에서  $\frac{dN}{d\varphi}$ 을 구하고, (2)式에서  $\frac{dM}{d\varphi}$ 을 구하면 各各 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} &= EA \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{\rho^3} \left( \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \left( \frac{dv}{d\varphi} + w \right) \\ + r^2 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho^3} \right) \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) \quad (15)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = -EAr^2 \left[ \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) \right] \quad (16)$$

平衡方程式 (14) 式에 (16), (10) 式을 代入하고 剪斷力  $V$  에 대하여 整理하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$V = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\varphi} - RT \\ = -EAr^2 \left[ \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) \right] \\ - \frac{Rm\omega^2 r^2}{\rho} \left( \frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (17)$$

(17) 式에서  $T$  는 回轉慣性의 項이므로 回轉慣性의 考慮與否를 나타내는 回轉慣性指標  $R$  을 設하였고,  $R$  의 內容은 다음과 같다.

$$\text{回轉慣性을 考慮하는 境遇, } R=1 \quad (18)$$

$$\text{回轉慣性을 無視하는 境遇, } R=0 \quad (19)$$

(17) 式에서  $\frac{dV}{d\varphi}$  를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{d\varphi} = -EAr^2 \left\{ \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) \left( \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho^3} \right) \left( \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) \right] \right\} \\ - Rm\omega^2 r^2 \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{dv}{d\varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \left( \frac{dw}{d\varphi} - v \right) \right] \quad (20)$$

平衡方程式 (13) 式에 (20), (1), (9) 式을 代入하고  $\frac{d^4 w}{d\varphi^4}$  에 대하여 整理하면 (21) 式을 얻을 수 있고, 平衡方程式 (12) 式에 (15), (17), (8) 式을 代入하고  $\frac{d^2 v}{d\varphi^2}$  에 대하여 整理하면 (22) 式을 얻을 수 있다. (21), (22) 式에서 프라임(') 은  $\varphi$  에 대한 微分을 나타낸다.

$$w'''' = a_1 w'''' + (a_2 + Ra_3 F) w'' \\ + (a_1 - Ra_4 F) w' + (a_5 + a_6 F) w \\ + (1 - RF) a_7 v' + Ra_8 F v \quad (21)$$

$$v'' = a_7 w'' + (RF - 1) w' + a_8 w \\ + a_9 v' + (a_3 - R) F v \quad (22)$$

(21), (22) 式에서  $F$  는 (23) 式과 같이 表示되는 無次元振動數媒介變數이며  $R$  은 (18), (19) 式에서 說明한 바와 같다.

$$F = \frac{m\omega^2 r^2}{EA} \quad (23)$$

또  $a_1 \sim a_9$  는 (24) ~ (32) 式에 나타낸 것처럼  $\rho$ ,  $\frac{d\rho}{d\varphi}$  및  $\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2}$  로 表示되는 變數이다.

$$a_1 = \frac{5}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} \quad (24)$$

$$a_2 = -2 - \frac{8}{\rho^2} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \frac{2}{\rho} \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} \quad (25)$$

$$a_3 = -\frac{\rho^2}{r^2} \quad (26)$$

$$a_4 = -\frac{\rho}{r^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \quad (27)$$

$$a_5 = -1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{8}{\rho^2} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \frac{2}{\rho} \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} \quad (28)$$

$$a_6 = \frac{\rho^4}{r^4} \quad (29)$$

$$a_7 = \frac{r^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{d\varphi} \quad (30)$$

$$a_8 = \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right) \frac{d\rho}{d\varphi} \quad (31)$$

$$a_9 = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} \quad (32)$$

### 3.2 境界條件

아치의 左右兩端은 힌지이며, 힌지에서 變位  $v$ ,  $w$  와 휨모멘트  $M$  은 0 이므로 그 境界條件은 다음과 같다.

$$v=0 \quad (33)$$

$$w=0 \quad (34)$$

$$M=0 \quad (35)$$

(35) 式은 (2) 式과 (34) 式에 의하여 다음과 같이 된다.

$$w''=0 \quad (36)$$

以上の (33), (34), (36) 式이 힌지인 아치 左右 端의 境界條件이다.

#### 4. 數值解析 方法

##### 4.1 正弦아치의 方程式

그림 3과 같이 弦길이  $L$ , 마루높이  $H$ 인 正弦의 方程式은 直交座標系( $X, Y$ )에서 다음과 같이 表示된다.

$$Y = H \sin \frac{\pi X}{L} \quad (37)$$

本 研究에서는 (37)式的 正弦曲線上에 있는 아치의 支間길이  $l$ , 아치의 높이  $h$ 인 正弦아치를 생각하며, 그림 3에서 처럼  $L = (1+2\alpha)l$ 이며 따라서  $\alpha$ 는 다음과 같이 定義된다.

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{l} - 1 \right) \quad (38)$$

直交座標系( $X, Y$ )에서  $X = \alpha l$ ,  $Y = H - h$ 를 (37)式에 代入하고  $H$ 에 대하여 整理하면 다음 式과 같다.

$$H = \frac{h}{1 - \sin \frac{\pi \alpha}{1+2\alpha}} \quad (39)$$

따라서 아치의 支間길이  $l$ , 아치의 높이  $h$ 인 正弦아치의 方程式을 새로운 直交座標系( $x, y$ )에서 表示하면 다음과 같다.

$$y = H \sin(Bx + C) + h - H \quad (40)$$

(40)式에서  $B, C$ 는 다음과 같다.

$$B = \frac{\pi}{(1+2\alpha)l} \quad (41)$$

$$C = \frac{\pi \alpha}{1+2\alpha} \quad (42)$$

以上에서 本 研究에서 생각하는 支間길이  $l$ , 높이  $h$ 인 正弦아치의 方程式은 (40)式과 같다.

##### 4.2 數值解析 方法

###### (1) 數值積分法

微分方程式의 數值積分法에는 여러 가지 方法

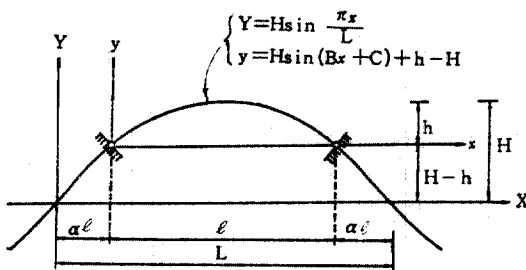


그림 3. 正弦曲線上의 아치

들이 있지만 다른 方法과 比較하여 精度가 높은 Runge-Kutta method<sup>(10)</sup>를 利用하여 數值解析한다.

이 때, 微分方程式 (21), (22)式에는 不確定量인  $F$ 의 項이 包含되어 있으므로 이  $F$ 값을 假定하여 微分方程式에 代入한 후에 數值積分을 施行한다.

Runge-kutta method는 初期值問題이므로 (33), (34), (36)式的 아치左端의 境界條件을 滿足하는 初期值를 利用하여 數值積分을 始作하고, 앞에서 假定한  $F$ 값이 自由振動의 固有值인지는 아치右端의 境界條件을 利用하여 判斷한다. 즉, 自由振動의 固有值  $F$ 값을 찾기 위하여 試行錯誤의 固有值問題를 利用한다.

위와 같은 數值解析 方法으로  $F$ 값을 찾으면 (23)式으로부터 固有振動數  $f$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{EAF}{m}} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{EF}{d}} \end{aligned} \quad (43)$$

(43)式에서  $d$ 는  $\frac{m}{A}$ 으로 아치材料의 單位體積當 質量이다.

實際의 數值適用例에서 아치材料의 機械的 性質은  $E = 2.058 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $d = 7,850 \text{ N-sec}^2/\text{m}^4$ 을 使用하였다.

###### (2) 變數 $a_1 \sim a_9$ 의 計算

微分方程式 (21), (22)式은  $\varphi$ 에 대한 微分方程式이므로 이 微分方程式을(40)式과 같은 直交座標系( $x, y$ )의 正弦아치에 適用시키기 위해서는 微分方程式의 變數  $a_1 \sim a_9$ 를  $x$ 의 函數로 나타내야 한다.

그림 4와 같이 正弦아치의 任意點  $S_0(x, y)$ 에서의  $\rho$ 와  $\varphi$ 는 다음과 같이  $x$ 의 函數로 表示할 수 있다.

$$\rho = \frac{(B^2 H^2 \xi_2^2 + 1)^{3/2}}{B^2 H \xi_1} \quad (44)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(BH \xi_2) \quad (45)$$

(44), (45)式에서  $\xi_1, \xi_2$ 는 다음과 같다.

### 4.3 數值解析 結果의 檢證

本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數值解析方法의 妥當性을 檢證하기 위하여 同一한 아치모뎀에 대하여 第3 모드(mode)까지 計算한 本 研究의 結果와 構造解析用 凡用프로그램인 SAPIV의 結果를 表 1에 比較하였다. 本 研究에서와 마찬가지로 SAP IV의 解析時에 剪斷變形效果를 考慮하지 않았다.

表 1에 보인 것과 같이 두 方法의 固有振動數는 아주 優秀하게 接近한 것을 알 수 있으며, 따라서 本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數值解析 方法의 妥當性을 立證할 수 있다.

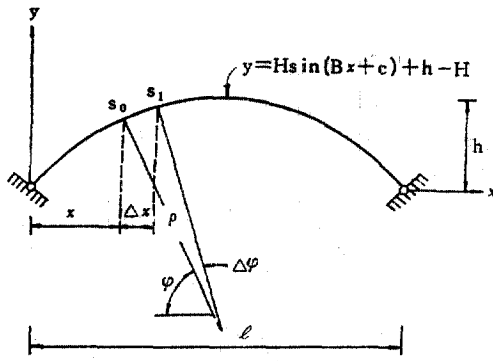


그림 4. 數值解析을 위한 正弦아치의 諸變數

$$\xi_1 = \sin(Bx + C) \quad (46)$$

$$\xi_2 = \cos(Bx + C) \quad (47)$$

(45)式을 微分하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$d\varphi = \frac{B^2 H \xi_1}{B^2 H^2 \xi_2^2 + 1} dx \quad (48)$$

(44), (48)式을 利用하여  $\frac{d\rho}{d\varphi}$ ,  $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$ 를  $x$ 의 函數로 表示하면 다음과 같다.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\xi_2(2B^2 H^2 \xi_2^2 - 3B^2 H^2 - 1)}{B^3 H^2 \xi_1^3} \times \frac{1}{(B^2 H^2 \xi_2^2 + 1)} \quad (49)$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{-(B^2 H^2 \xi_2^2 + 1)^{3/2}}{B^4 H^3 \xi_1^5} \{ (B^2 H^2 \xi_2^2 + 1)(2B^2 H^2 \xi_2^2 - 3B^2 H^2 - 1)(2\xi_2^2 + 1) + B^2 H^2 \xi_1^2 \xi_2^2 (10B^2 H^2 \xi_2^2 - 9B^2 H^2 + 1) \} \quad (50)$$

또 Runge-kutta method에서 段階길이(step size)<sup>(11)</sup>  $\Delta\varphi$ 는 (45)式을 利用하면  $x$ 의 段階길이  $\Delta x$ 로 表示할 수 있다(그림 4 參照).

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{s1} - \varphi_{s0} \\ &= \tan^{-1}\{BH\cos(Bx+C)\} \\ &\quad - \tan^{-1}\{BH\cos[B(x+\Delta x)+C]\} \quad (51) \end{aligned}$$

以上에서 微分方程式 (21), (22)式의 變數  $a_1 \sim a_9$ 는 (44), (49), (50)式을 利用하면  $x$ 의 函數로 구할 수 있고, 또 段階길이  $\Delta\varphi$ 도 (51)式과 같이  $x$ 의 函數로 구할 수 있다.

따라서  $\varphi$ 에 대한 微分方程式 (21), (22)式을  $x$ 의 函數로 變換하여 數值積分할 수 있다.

表 1. 本 研究과 SAP IV의 固有振動數 比較

( $l=10m$ ,  $\alpha=0.2$ ,  $r=0.1732m$ )

아치높이	모드	本 研究 ( $R=1.$ ) ( $f$ ; cps)	SAP IV ( $f$ ; cps)	誤差(%)
2m	1	45.00	44.41	-1.33
	2	96.69	97.56	0.89
	3	105.13	108.0	2.66
4m	1	27.26	26.55	-2.67
	2	69.18	69.24	0.09
	3	123.38	130.3	5.31
6m	1	16.61	16.15	-2.85
	2	45.30	43.22	-4.81
	3	80.34	83.66	3.97

註) 1. 誤差(%) =  $\frac{\text{SAPIV} - \text{本 研究}}{\text{SAP IV}} \times 100$

2. 本 研究 및 SAP IV; 剪斷變形不考慮

3. SAP IV 解析時 아치의 호를 100等分하여 解析하였음.

表 1을 보면 本 研究의 固有振動數의 一部는 SAP IV 보다 크고 一部는 작게 計算되고 있다. 이와 같은 事實은 本 研究에서 數值解의 收斂式을 適用하는 過程에서 發生한 것이라 思料된다. 本 研究에서 (23)式의  $F$  값을 찾기 위하여 試行錯誤의 固有值問題, 具體的으로는 Determinant Search Method를 利用하였다. 즉 境界條件 (33), (34), (36)式의 行列값  $D$ 가 0이 되는  $F$  값을 찾았다. 本 研究에서  $D-F$ 의 關係를 概略的으로 圖示하면 그림 5와 같다. 이 그림에서  $D=0$ 이 되는 참  $F$  값을  $\bullet$ 로 表示하였다.

試行錯誤의 固有值問題의 特性上 正確하게  $D$

表 2. 回轉慣성이 固有振動數에 미치는 影響  
( $l=10m, \alpha=0.2, r=0.1732m$ )

아치높이	모드	固有振動數(cps)		$\frac{B-A}{A} \times 100$
		$R=0. (A)$	$R=1. (B)$	
2m	1	45.18	45.00	-0.40
	2	96.88	96.69	-0.20
	3	106.10	105.13	-0.91
4m	1	27.31	27.26	-0.18
	2	69.59	69.18	-0.59
	3	124.80	123.38	-1.14
6m	1	16.63	16.61	-0.12
	2	45.45	45.30	-0.33
	3	80.91	80.34	-0.70
8m	1	10.74	10.74	0.00
	2	31.09	31.02	-0.23
	3	54.29	54.04	-0.46

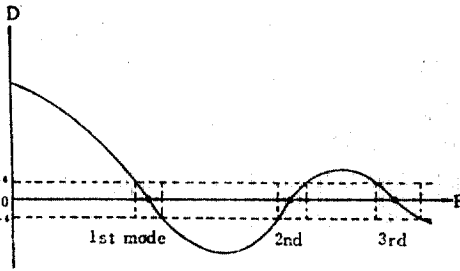


그림 5.  $D-F$ 의 개략적 관계

$=0$ 이 되는 •表의  $F$  값을 찾을 수 없기 때문에 數値解의 收斂基準式의 하나로  $-1.0 \times 10^{-4} < D < 1.0 \times 10^{-4}$ 을 定하여  $F$  값을 찾았다. 즉 本 研究에서 나타낸  $F$  값은 이 그림에서  $\leftarrow \rightarrow$  區間의 어느 값으로 出力되었을 것이다. 이 收斂式을 適用하는 過程에서 어떤 境遇에는 참  $F$  값보다 크게, 어떤 境遇에는 작게 計算될 것이라 豫見할 수 있다. 表 1에서 볼 수 있듯이 “+” 誤差가 5개, “-” 誤差가 4개로 計算되었는데 이것은 本 研究의 固有振動數가 SAP IV 보다 크게 또는 작게 計算될 確率이 各各 50% 程度라는 것을 示唆해 준다. 이는 本 研究의 數値解의 精度가 SAP IV의 精度와 같은 水準이라는 것을 나타내 준다고 思料된다.

### 5. 數値解析 結果

表 2는 回轉慣성이 固有振動數에 미치는 影響을 分析하기 위하여 回轉慣性을 無視( $R=0.$ )한 境遇와 回轉慣性을 考慮( $R=1.$ )한 境遇에 대하여 固有振動數를 比較한 것이다. 表 2에서 처럼 回轉慣性은 固有振動數를 減小시키는 效果를 갖고 있으나, 그 影響은 比較的 적은 것을 알 수 있다.

그림 6은  $l=10m$ 에 대하여 固有振動數  $f$ 와 아치높이  $h$ 의 關係를 나타낸 것이다.

正弦아치는 아치높이  $h$ 가 0으로 收斂하게 되면 直線보로 收斂하게 되므로 그림 6에서  $h=0$ 일 때 固有振動數는  $l=10m$ 인 兩端힌지 直線보의 固有振動數와 같아야 한다. (52)式은 兩端힌지 直線보의 固有角振動數<sup>(13)</sup>를 나타내는 式이며, 이 式에 보의 諸元( $l=10m, r=0.1732m$ ) 및 아치材料의 機械的 性質( $E=2.058 \times 10^{11}N/$

$m^2, d=7,850 N\text{-sec}^2/m^4$ )을 代入하면 兩端힌지 直線보의 固有角振動數를 計算할 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ &= \frac{n^2 \pi^2 r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{d}} \end{aligned} \quad (52)$$

(52)式을 利用하여 第3모드까지 固有角振動數  $\omega$ 를 計算하고 이에 의하여 固有振動數를 計算하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 87.53 \text{ rad/sec} : f_1 = 13.93 \text{ cps} \\ \omega_2 &= 350.10 \text{ rad/sec} : f_2 = 55.72 \text{ cps} \\ \omega_3 &= 787.73 \text{ rad/sec} : f_3 = 125.37 \text{ cps} \end{aligned}$$

以上에서 計算한 13.93 cps, 55.72 cps, 125.37 cps는 그림 6에서  $h=0$ 에서의 第 1, 2, 3모드의 固有振動數와 正確하게 一致하는 것을 알 수 있으며, 따라서 本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數値解析 方法의 妥當性을 다시 한번 立證하는 것이다.

그림 6을 보면 아치높이가 增加하면 一般的으로 固有振動數는 減小하는 傾向을 보이고 있다. 그러나 아치높이의 一定區間에서는 아치높이가 增加하면 固有振動數도 增加하는 境遇가 있는데, 이는 아치높이가 어느 程度 增加할 때 까지는 아치의 剛性이 커져서 固有振動數도 增加하지만 아치의 一定높이 以上에서는 오히려

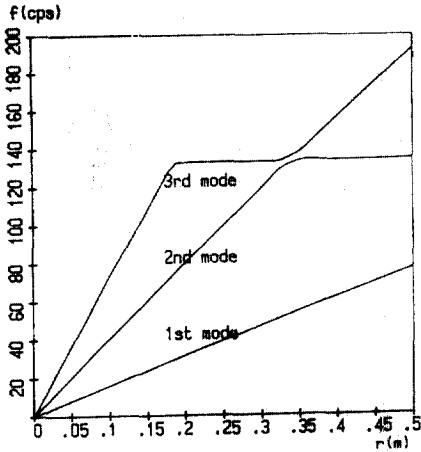


그림 6. 固有振動數와 아치높이의 關係曲線  
( $l=10m$ ,  $\alpha=0.2$ ,  $r=0.1732m$ ,  $R=1.$ )

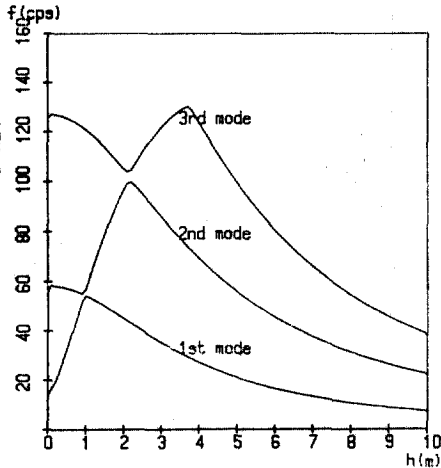


그림 7. 固有振動數와 回轉半徑의 關係曲線  
( $l=10m$ ,  $h=4m$ ,  $\alpha=0.2$ ,  $R=1.$ )

아치의 剛性を 잃게 되어서 固有振動數는 減小하기 때문에 思料된다.

그림 7은 固有振動數  $f$ 와 回轉半徑  $r$ 과의 關係를 考察하기 위하여 아치斷面의 回轉半徑을 變化시키면서 數值解析하고 그 結果를 그림에 나타낸 것이다.

그림 7을 보면 回轉半徑이 增加할 수록 固有振動數도 增加하는 傾向을 알 수 있다. 이는 回轉半徑이 커지면 細長比는 減小하게 되고 따라서 固有振動數는 增加하게 되는 構造物의 一般

的인 傾向을 잘 나타내 주고 있는 것이다.

또한 그림 7은 圓弧아치와 拋物線아치의 研究結果<sup>(14,15)</sup>와 아주 類似한 結果를 보이고 있다. 즉  $f-r$ 의 關係는 서로 比例하는 直線部分,  $r$ 軸과 平行한 直線部分 및 이들 2個의 直線을 緩慢하게 連結시켜주는 曲線部分으로 되어 있는 것을 알 수 있다.

## 6. 結 論

이 論文은 兩端힌지 正弦아치의 自由振動에 관한 研究로서 이 研究를 통하여 얻어진 結論은 다음과 같다.

(1) 아치의 微小要素에 作用하는 合應力과 慣性力에 대한 平衡方程式을 利用하여 一般아치의 自由振動에 대한 基準函數의 微分方程式과 兩端힌지의 境界條件을 誘導하였다.

(2) 위의 微分方程式을 正弦아치에 適用하고, 試行錯誤의 固有值問題와 Runge-kutta method를 利用하여 數值解析 알고리즘을 開發하였다.

(3) 實際의 數值適用例를 통하여 本 研究의 數值解析 結果와 SAP IV의 結果가 잘 一致함을 보여 本 研究의 妥當性を 確認하였다.

(4) 回轉慣性は 固有振動數를 減小시키는 要因이지만, 그 影響力은 工學的인 側面에서 無視할 수 있을 程度로 매우 작은 것을 알 수 있었다.

앞으로 더 많은 數值適用例를 통하여 더 廣範圍한 正弦아치의 自由振動 特性을 把握하고, 剪斷變形效果를 考慮한 微分方程式에 대해서는 繼續的인 研究가 進行되어야 할 것이다.

## 謝 辭

이 論文은 1986年度 文敎部 自由課題 學術研究助成費에 의하여 研究되었으며, 이에 文敎部 當局에 感謝드립니다.

## 參 考 文 獻

1. 黃鶴周, "水平橫荷重을 받는 補剛桁을 가진 圓弧아치에 대하여," 大韓土木學會誌, 第15卷 第3號, 1967, p. 23.
2. Yuichi Hikami, "Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Aerodynamic Stability Inves-



- tigation", *IHI Report*, Vol. 6, 1982, pp. 47~52.
3. Joseph A. Wolf Jr., "Natural Frequencies of Circular Arches", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, No. ST9, 1971, pp. 2337~2350.
  4. Walter J. Austin and Anestis S. Veletsos, "Free Vibration of Arches Flexible in Shear", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 99, No. EM14, 1973, pp. 735~753.
  5. 李炳求, 黃鶴周, "兩端힌지 拋物線아치의 自由振動에 관한 研究," *大韓土木學會論文集*, 第4卷 第1號, 1984, pp. 69~77.
  6. Shyr-jen Wung, "Vibration of Hinged Circular Arches", Thesis, Rice University, U.S.A, 1967, p. 9.
  7. Shyr-jen Wung, *ibid*, p. 7.
  8. Demeter G. Ferits, *Dynamics and Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, Inc., 1973, p. 3.
  9. S. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver Jr., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Son, Inc., 1974, pp. 364~365.
  10. Melvin J. Maron, *Numerical Analysis*, Macmillan Publishing Co., Inc., 1982, pp. 344~352.
  11. Melvin J. Maron, *ibid*.
  12. Klaus Jürgen Bathe, Edward L. Wilson and Fred E. Peterson, *SAP IV*, University of California, 1974.
  13. Mario Paz, *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980, p. 368.
  14. Shyr-jen Wung, *ibid*, pp. 71~72.
  15. 朱先萬, 朴光圭, 李炳求, 黃鶴周, "兩端固定拋物線아치의 自由振動解析," *大韓土木學會論文集*, 第5卷 第3號, 1985, p. 37.

(接受: 1987. 4. 15)