

# 部材의 破壞確率을 考慮한 트러스 構造物의 形狀最適化

The Shape Optimization of Plane Truss Structures with  
Constraints based on the Failure Probability of Member

李 奎 遠\*  
Lee, Gyu Won  
林 秉 龍\*\*  
Lim, Byeong Yong

---

## Abstract

The algorithm proposed utilizes the tow-levels technique.

In the first level which consists of teatment only the applied load and design stress as the random variables whose parent distribution has the normal distribution, the cross-sectional areas of the truss members such that the their probabilities of failure have the prescribed failure probabilities are optimized by transforming the nonlinear problem into SUMT, and solving it utilizing modfied Newton-Raphson method.

In the second level, the geometric shape of truss structure is optimized by utilizing the unidirectional search technique of Powell method which makes it possible to minimize only the objective function.

The algorithm proposed is numerically tested for the several truss structures with various shapes and loading conditions.

The numerical analysis shows that the rate of decreasing the weight of truss structures is dependent on the prescribed failure probability of the each member of truss structure and the covariance of the applied load and design stress.

---

## 要 旨

本 研究에서는 全最適化 過程을 two-Levels 로 나누었다.

Level-1 에서는 作用荷重 및 設計應力을 正規分布로 하는 確率變數로 하여 各部材가 許容破壞 確率을 超過하지 않도록 斷面 最適化 하고 Level-2 에서는 트러스의 節點座標를 變數로 하여 形狀 最適化한 것이다.

Level-1 에서는 誘導된 非線型計劃問題를 SUMT 問題로 交換시켜 Modified Newton-Raphson Method 에 의한 SUMT 法을 採擇하고 Level-2 에서는 Powell Method 의 一方向 探查法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 하는 技法을 導入하여 形狀 最適化를 하였다.

---

\* 正會員·全北大學校 工科大學 教授, 土木工學科

\*\* 正會員·群山水產專門大學 副教授, 海洋土木科

提示된 알고리즘을 트리스의 形態, 載荷條件 등을 變化시켜 가며 數種의 트리스에 適用하여 數值計算을 실시하고 그 結果를 檢討하였다. 研究 結果 許容破壞確率 및 變動係數에 따라 重量이 減少한다는 事實이 확인되었다.

## 1. 序 論

構造物 最適設計는 1950 年代에 塑性理論에 의한 線型計劃問題(Linear programming problem) 1960 年代 이후에는 彈性理論에 依한 非線型計劃問題(Nonlinear programming problem)가 中心이 되어 주로 幾何學的 形狀이 固定된 鋼構造物의 最適化만 다루어 왔다. 그러나 幾何學的 形狀을 考慮한 最適設計가 形狀이 固定될 경우의 最適設計보다 重量 또는 體積 및 經費를 相當히 減少시킬 수 있다는 事實을 지금까지의 研究結果로 알 수 있다.

幾何學的 形狀을 考慮한 形狀最適化問題에서 節點座標를 設計變數로 取扱하므로 幾何學的 形狀이 固定된 最適化보다 設計變數가 增加하며 最適化 過程에서 形狀의 設計變數가 變함에 따라 部材의 斷面積도 敏感하게 變하여 最適化 技法의 適用이 곤란하기 때문에 幾何學的 形狀을 考慮한 鋼構造物 最適化에 對한 文獻은 極히 稀薄에 지나지 않으며 그나마도 70 年代에 들어와서 發表된 것을 보면 幾何學的 形狀을 考慮한 鋼構造物의 最適設計는 아직도 研究段階에 있음을 알 수 있다. 따라서 幾何學的 形狀을 考慮한 最適化가 切實히 要請되고 있다. 그러나 幾何學的 形狀을 考慮한 最適化에서 斷面과 幾何學的 形狀을 同時에 最適化는 根本的으로 收斂技法이 다른 두 種類의 變數로 設計空間을 形成하여 最適解를 求하기가 困難할 뿐만 아니라 設計變數 및 制約條件式이 增加 하므로써 最適化 過程도 複雜 해진다. 따라서 大部分의 研究者들은 設計變數間의 關係附屬(design variable linking) 즉 同一 設計變數組 形成 및 構造物의 對稱性を 導入하여 設計 空間의 次元을 줄이거나 最適化 過程에서 critical 한 制約條件式만을 考慮하여 制約條件式의 數를 縮小하는 方法을 택하고 있으며 또한 Dantzig-wolf<sup>(1)</sup>는 最適化 問題를 分割處理 하므로써 設計 空間 및 制約條件式의 數를

縮小할 수 있는 原理를 紹介하였다. Vander plants<sup>(2)</sup>는 立體 트리스를 斷面과 形狀을 分離하여 two-levels로 分割 最適化 하므로써 分割되지 않는 最適化에서 所要된 時間의 절반 정도만 所要됨을 發見 하였다. Urikirsch<sup>(3)</sup>는 goal coordination 및 model coordination method의 適用으로 最適化 問題를 分割하여 分割 最適化를 試圖하므로써 設計 變數 및 制約條件式의 數를 縮小하였으며 이 方法중 model coordination method는 반드시 最適解에 收斂함을 보이고 있다. 따라서 本研究에서도 文獻<sup>(3)</sup>과 같이 斷面의 最適化와 幾何學的 形狀을 考慮한 形狀 最適化를 獨立的으로 遂行함으로써 收斂方法이 다른 두 種類의 設計變數를 分離하여 트리스 構造物의 最適化에 效率的인 數學的 計劃法의 適用으로 他的 形狀最適化와 달리 트리스 構造物의 效率的인 形狀 最適化를 試圖코저 한다.

本研究의 形狀 最適化의 첫段階인 Level 1에서는 文獻<sup>(4)</sup>에서 提示한 部材의 破壞確率을 考慮한 斷面 最適化를 試圖하고 두번째 段階인 Level 2에서는 形狀 最適化를 遂行한다. 따라서 本研究는 文獻<sup>(3)</sup>과 文獻<sup>(4)</sup>을 結合한 最適化 方法이라 할 수 있다. 그러나 破壞確率을 考慮한 形狀 最適化는 形狀이 變함에 따라 斷面이 變하며 또한 斷面の 變함에 따라 各部材 破壞確率도 變하므로 形狀이 固定된 경우보다도 最適化 過程이 相當히 複雜해진다. 그러나 本研究는 收斂 過程이 다른 設計變數중 2個의 group으로 分離한 two-levels 形狀 最適化를 試圖함으로써 形狀最適化의 어려움을 克服하는 한편 文獻<sup>(4)</sup>에서 適用한 바와 같이 部材의 破壞確率을 制約條件으로 考慮한다. 따라서 各部材가 一定水準의 破壞確率을 갖도록 最適化를 遂行하며 構造物의 形態에 制限을 받지 않고 形狀最適化를 遂行할 수 있게 한다. 또한 文獻<sup>(5)</sup>의 研究는 制限條件이 2개일 경우의 靜定構造物에만 適用할 수 있으며 文獻<sup>(4)</sup>의 研究는 單一制限條件인 경우의

部材破壞確률을考慮한最適化이다. 그러나本研究에서는 이를擴張하여多載荷重條件下에서部材破壞確률制約에對한最適化를試圖하므로써트리스構造物의形態, 載荷條件 등의制限을 받지 않은效率의인 트리스構造物의形狀最適化 알고리즘을提示하고部材의許容破壞確률 및變動係數를變化시켜 이들이最適解에 미치는 영향을比較分析하여經濟的인 트리스構造物設計를試圖하는데目的을두고있다.作用荷重의大部分은極值分布를따르나本研究에서는文獻<sup>(5)</sup>의研究結果와比較分析을하기 위하여文獻<sup>(4)</sup> 및文獻<sup>(6)</sup>와같이部材의抵抗強度 및作用荷重을 서로獨立된確率變數로取하고 이들 모두正規分布에 따르는 것으로하였다.

本研究와關連된研究文獻을要約紹介하면 다음과 같다.

1962年 Schmit, L.A 와 Kicher, T.P<sup>(6)</sup>는簡單한3部材트리스構造物의最適形狀 및最適材料를 Gradient Method 로誘導한以來80年初까지의形狀最適化에關한研究動向은1983年 Topping, B.H.V<sup>(7)</sup>에 상세히紹介하고있다.그 이후의本研究와關連된文獻을略述하면 다음과 같다.

1983年 U. Kirsch 와 G. Toledano<sup>(8)</sup>는形狀의變化가斷面의變化보다도構造應答에 큰 영향을 주므로形狀이變함에 따라 미치는 영향을近似化하여最適化할 수 있는技法을提示하고있다. 1985年 U. Kirsch<sup>(9)</sup>는分割最適化技法에 의하여大型構造物의最適設計에 관심을 갖게 되었다. 또한信賴性理論에 의한構造物安全性解析의發展과 더불어形狀이固定된 경우의最適設計에도 많은研究가發表되었으나本研究와關連된文獻을要約하면 다음과 같다. 1960年 Hilton 과 Feigen<sup>(10)</sup>에 의해서構造物의最適化에信賴性理論이導入된 이래 1964年 Switzky<sup>(11)</sup>는 Hilton 과 Feigen의研究를보다擴張하여設計變數들이正規分布를한다는假定下에서全體構造物의信賴性이許容信賴性和같도록制約條件式을誘導하여構造物의重量을減少시켰다. 또한 1966年 Ghista<sup>(5)</sup>는連續적이고代替 가능한荷重系를 받는一般構造系의破壞確률이許容破壞確률以下가 되도록制約條件

을誘導하여 SUMT 法으로 트리스構造物의重量을最小化하였다.

1967年 Moses 와 Kinser<sup>(12)</sup>는破壞確률制約條件을가지는多荷重, 多部材構造物의重量을最少化하였다.

1974年 Vitiello 와 Pister<sup>(13)</sup>는信賴性理論을導入하여鋼띠대構造物의損害經費를逐次線型計劃法을使用하여最小化하였다. 1974年 Yasuichi Okada A, T.S 와 H.U<sup>(14)</sup>는信賴性制約下에서의構造物의最適設計에 대한基本的인研究를하였으며 1975年 Rao<sup>(15)</sup>는簡單한鐵筋콘크리트 보다 기둥의信賴性制約條件式을誘導하여建設經費를最小化하였다.

1977年 Davidso, Felton 및 Hart<sup>(16)</sup>는動荷重을 받는2層1徑間鋼띠대構造의破壞確률制約條件式을誘導하여最小重量設計를發表하였다.

國內에서는 1979年鐵筋콘크리트橋上部構造의確률理論의解析<sup>(17)</sup>을發表, 1981年 R.C. 쾨部材의 LRFD信賴性設計基準에關한研究<sup>(18)</sup>가發表되었다.

1986年確률理論에基礎한鐵筋콘크리트許容應力設計規準<sup>(19)</sup>이發表되었다. 幾何學的形狀의研究로는 1980년에最初로設計變數를確定值로 하여 two-phases 알고리즘에 의한 트리스構造物의形狀最適化에關한研究<sup>(20)</sup>를發表한以來 1983년에는信賴性을考慮한 트리스構造物의形狀最適化<sup>(21)</sup>와幾何學的計劃法 및 Powell 方法에 의한鋼材 트리스構造物形狀最適化<sup>(22)</sup>, 1985年 두設計空間에依한아치構造의形狀最適化<sup>(23)</sup>, 1987年分割最適化技法에依한 트리스構造物의形狀最適化<sup>(24)</sup>研究가發表되었다.

## 2. 非線型最適化問題

### 2.1 最適化問題 제형 型式

構造物最適設計를 위한問題形成一般型式 (general format)을數式化하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize : } M(X) \quad (2-1)$$

$$\text{Subject to : } \left. \begin{aligned} H_i(X) &= 0 \\ G_i(X) &= 0 \end{aligned} \right) \quad (2-2)$$

여기서  $i=1, \dots, L$

$$j=1, \dots, m, \quad m \leq n$$

$\bar{X}$  = 設計變數 벡터

$$= (x_1, \dots, x_n)$$

$M(\bar{X})$  = 目的函數

$G_j(\bar{X})$  = 制約條件式

$H_i(\bar{X})$  = 解析 制約條件式

最適設計에서는 目的函數가 式(2-1)으로  $m$  個의 制約 條件式(2-2)로 주어질 때  $M(\bar{X})$ 가 最小로 되도록 設計 變數  $\bar{X}$  를 決定하는 것이다.

### 2-2 形狀 最適化問題 形式

本 研究에서 트러스 構造物의 最適 形狀을 效率的으로 얻기 위해서 式(2-1) 및 (2-2)을 收斂 方法이 同一한 2 個의 獨立的인 設計 變數組로 分離한 分割 最適化 問題 形式은 다음과 같다.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize : } W = W(\bar{X}, \bar{Y}) \\ \text{Subject to : } H_i(\bar{X}, \bar{Y}) = 0 \\ G_j(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2-3)$$

여기서  $\bar{X}$  = 部材 斷面積 벡터

$$= X_1, X_2, \dots, X_m$$

$\bar{Y}$  = 節點 座標 벡터

1) 分割 最適化 問題의 첫 段階에서는 幾何學的 形狀을 固定시키고 最適化 하기 때문에 이때의 設計變數는 서로 收斂 方法이 同一한 部材의 斷面積이 된다. 本 研究에서는 이 段階를 Level 1 이라고 하며 이 경우 制約條件式으로는 破壞 確率을 考慮한 制約條件式으로 하는 最適化 型式은 다음과 같다.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize : } W = W(\bar{X}, \bar{Y}_0) \\ \text{Subject to : } H_i(\bar{X}, \bar{Y}_0) = 0 \\ G_j(\bar{X}, \bar{Y}_0) \leq \alpha \end{array} \right\} \quad (2-4)$$

2) 여기서 分割 最適化의 두번째 段階인 Level 2에서는 Powell method의 일方向 탐사에 의해 節點의 座標값을 수정하여 最適 形狀을 얻는다. 收斂 方法이 同一한 節點座標만을 設計變數로 하는 Level 2의 最適化 問題 型式은 다음과 같다.

$$\text{Minimize : } W = W(\bar{X}_0, \bar{Y}) \quad (2-5)$$

여기서  $\bar{X}_0$  = Level 1에서의 最適化 벡터

$$= (X_{10}, \dots, X_{m0})$$

## 3. 最適化 모델

### 3-1. 目的函數

$m$  個의 部材로 이루어진 構造物의 重量을 最小化 하기 위하여 目的函數를 matrix 形態로 表

現하면 다음과 같다.

$$M(A) = \text{Weight} = \{A\} \{e\} \{L\} \quad (3-1)$$

여기서  $M(A)$  : 目的函數

$\{A\} = (A_1, A_2, \dots, A_m)^T$  : 部材의 斷面積 매트릭스

$$\{e\} = \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline \vdots \\ \hline e_m \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{: 單位重量} \\ \text{매트릭스} \end{array}$$

$\{L\} = (L_1, L_2, \dots, L_m)^T$  : 部材길이 매트릭스

$i$  部材의 길이  $L_i$ 는 주어진 構造物의 基準座標系에 따라 節點座標로 다음과 같이 定義한다.

$$L_i = \left[ \sum_{r=1}^{NDS} (X_r - X_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-2)$$

여기서  $N, D, S = 2$  (平面 트러스의 경우)

$NDS = 3$  (立體 트러스의 경우)

$X_r$  :  $i$  部材의 첫 節點의  $X, Y, Z$  座標值

$X_i$  :  $i$  部材의 둘째 節點의  $X, Y, Z$ 의 座標值

Level 1에서는 部材의 斷面積을 設計變數로 取하므로 目的函數는 非線型 計劃 問題로 된다. 各 部材의 材料的 性質이 同一하면 目的函數  $M(A)$ 는 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$M(A) = \{A\}^T \{L\} \quad (3-3)$$

### 3-2. 部材破壞確率 制約條件式 誘導

#### (1) 構造解析

載荷條件式數가  $J$ , 部材數  $m$ , 自由度  $n$ 인 트러스를 變位法으로 解析할 경우의 彈性 構造解析 方程式은 다음과 같다.

#### ① 平衡方程式(equilibrium equation)

構造物이 平衡狀態를 維持하려면 各 節點에서 部材力의 합이 各 節點에 加해진 節點荷重과 같아야 한다. 이를 매트릭스 形態로 表示하면

$$[\beta]^T \{F^J\} = \{Q^J\} \quad (3-4)$$

여기서  $[\beta]$  :  $(m \times n)$ 의 位相連結 매트릭스

$\{F^J\}$  :  $(m \times 1)$ 의 部材力의 平均值 매트릭스

$\{Q^J\}$  :  $(n \times 1)$ 의 節點荷重 平均值 매트릭스

#### ② 幾何學的 條件(geometry condition)

또는 適合方程式(compatibility equation)

節點에서 部材의 變形은 그 節點에서의 變位

와 같아야 한다. 이를 매트릭스 形態로 表示하면

$$\{U\} = [\beta] \{\bar{q}\} \quad (3-5)$$

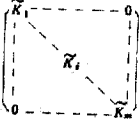
여기서  $\{U\}$  :  $(m \times 1)$ 의 部材 變形的 平均值 매트릭스

$\{\bar{q}\}$  :  $(n \times 1)$ 의 節點 變位的 平均值 매트릭스

### ③ Hooke의 法則

Hooke의 法則은 部材力과 部材 變形的 關係式으로 이를 매트릭스 形態로 表示하면

$$\{F\} = [\bar{K}] \{U\} \quad (3-6)$$

여기서  $[\bar{K}] =$   :  $(m \times n)$ 의 部材 剛性 매트릭스

但,  $\bar{K}_i = A_i E_i / L_i$

$A_i$  :  $i$  部材의 斷面積

$E_i$  :  $i$  部材의 彈性係數

$L_i$  :  $i$  部材의 길이

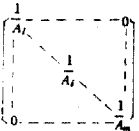
式(3-4), (3-5), (3-6)을 간결한 形態로 表示하면

$$\begin{bmatrix} [\beta]^T & [O] & [O] \\ -[I] & [\bar{K}] & [O] \\ [O] & -[I] & [\beta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{U\} \\ \{\bar{q}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{Q}\} \\ [O] \\ [O] \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

$\{F\}$ ,  $\{U\}$  및  $\{\bar{q}\}$ 는 式(3-7)로부터 直接 얻을 수 있지만 式(3-4), (3-5), (3-9)의 關係로부터 求하는 것이 보다 便利하며 이때의 값들은 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{q}\} &= ([\beta]^T [\bar{K}] [\beta])^{-1} \{\bar{Q}\} \\ \{U\} &= [\beta] ([\beta]^T [\bar{K}] [\beta])^{-1} \{\bar{Q}\} \\ \{F\} &= [\bar{K}] [\beta] ([\beta]^T [\bar{K}] [\beta])^{-1} \{\bar{Q}\} \\ \{\bar{f}\} &= [D] \{F\} \end{aligned} \right\} (3-8)$$

但,  $\{\bar{f}\} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_i, \dots, \bar{f}_m)^T$  : 部材 實應力的 平均值 매트릭스

$[D] =$   : 部材 斷面積의 逆數 매트릭스

$\{F\} = (F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)^T$  : 部材力의 平均值 매트릭스

式(3-8)에서  $[\bar{K}] [\beta] ([\beta]^T [\bar{K}] [\beta])^{-1} = [M]_{m \times n}$ 라 하면

$$\bar{F}_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \bar{Q}_j \quad (3-9)$$

로 表示할 수 있다.

따라서

$$\bar{f}_i = \bar{F}_i / A_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot \bar{Q}_j / A_i \quad (3-10)$$

로 表示할 수 있다.

### (2) 部材의 破壞確率 算定

$n$ 個의 部材로 이루어지고  $J$ 個의 載荷條件을 갖는 一般的인 트리스 構造物의 部材破壞確率は 다음과 같이 計算된다.

作用荷重의 大部分은 極值分布를 따르나 本研究에서는 文獻<sup>(5)</sup>의 研究結果와 比較分析 하기 위해서 文獻<sup>(4)</sup>와 文獻<sup>(5)</sup>에서의 길이 作用荷重  $Q$ 는 獨立된 確率變數로 平均值가  $\bar{Q}$ , 標準偏差가  $\sigma_Q$ 를 가지는 正規分布로 하며 또한 設計應力도 平均值  $H$ 를 標準偏差  $\sigma_H$ 를 가지는 正規分布로 한다.

部材破壞 確率의 決定을 容易하게 하기 위하여 斷面積, 彈性係數는 確率變數가 아닌 常數로 取하면  $J$ 個의 載荷條件에 대한 任意 部材의 破壞確率  $P_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P(\bar{f}_i > H_i) = P(\bar{F}_i / A_i > H_i) \\ &= P(H_i - \bar{F}_i / A_i < 0) \end{aligned} \quad (3-11)$$

여기서  $J$ 番載荷條件에 對한  $i$ 部材의 安全마진(Safety Margin)을  $g_{ij}$ 라고 하면

$$g_{ij} = H_i - \bar{F}_i / A_i \quad (3-12)$$

式(3-13)은 式(3-10)으로부터 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$g_{ij} = H_i - \sum_{j=1}^J M_{ij} \cdot \bar{Q}_j / A_i \quad (3-13)$$

여기서  $l_j$  :  $J$ 番載荷條件下에서 作用荷重數

$H_i$  :  $i$ 部材의 設計應力

$A_i$  :  $i$ 番載荷條件의 斷面積

$\bar{f}_i$  :  $i$ 番載荷條件의  $J$ 番載荷條件에 對한 應力

$\bar{F}_i$  :  $J$ 番載荷重이 作用할 때  $i$ 番載荷條件의 部材力

그러면  $J$ 番載荷條件에 對한  $i$ 部材의 破壞確率( $P_{ij}$ )는 다음과 같다.

$$P_{ij} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{g_{ij}}} e^{-\frac{(g_{ij} - \bar{g}_{ij})^2}{2\sigma_{g_{ij}}^2}} \cdot d\bar{g}_{ij}$$

$$\bar{g}_{ij} = \bar{H}_i - \sum_{j=1}^{I_j} M_{ij} \cdot \bar{Q}_j / A_i$$

$$\sigma_{g_{ij}} = \{\sigma_H^2 + \sum_{j=1}^{I_j} M_{ij} \cdot \sigma_{Q_j}^2 / A_i\}^{1/2}$$

$\bar{g}_{ij}$ 는 設計變數  $A_i$  만이 未知量이고 다른 값들은 주어지는 設計條件에서 求할 수 있는 量들이므로  $\bar{g}_{ij}$ 는  $A_i$ 의 函數이며 따라서 破壞確率  $P_{ij}$ 도  $A_i$ 만의 函數이므로 結局 部材의 破壞確率  $P_{ij}$ 는 設計變數 벡터  $\{A\}$ 의 函數로 된다. 따라서 部材는 許容破壞確率 ( $\alpha$ ) 값을 超過하지 않아야 하므로 構造物의  $J$ 個의 載荷條件에 對한 各部材의 破壞確率 制約條件式  $P_{ij}$ 는 다음과 같이 誘導된다.

$$P_{ij} = P(g_{ij} \geq 0) \leq \alpha \quad i=1, \dots, m \quad (3-14)$$

$$j=1, \dots, J$$

따라서 各部材의 破壞確率을 行列 形態로 表現하면 다음과 같다.

$$P(\{[U]^T [H] - [T] [V] \{\beta\}\} \leq \{0\}) \geq \{\alpha\} \quad (3-15)$$

여기서  $[U]^T = (1, \dots, 1)_{(1 \times (J \times m))}$   
 $\{H\}^T = ((S_1) \dots (S_i) \dots (S_m))_{(1 \times (J \times m))}$   
 但  $(S_i) = H_i(1, 1)$

$$[T] = \begin{pmatrix} (T_{11}) \dots (O) \dots (O) \\ \vdots \\ (O) \dots (T_{ij}) \dots (O) \\ \vdots \\ (O) \dots \dots \dots (T_{NN}) \end{pmatrix}_{(m \times J) \times (m \times J)}$$

但  $N = m \times J$   
 $(T_{ij}) = (M_{i1}, \dots, M_{ij})$   
 $\{V\}^T = ((V_1) \dots (V_i) \dots (V_N))_{(m \times n) \times 1}$   
 $(V_i) = (A_i^1, \dots, A_i^j)$   
 $\{\beta\}^T = ((\beta_1) \dots (\beta_i) \dots (\beta_N))_{(1 \times (m \times J))}$   
 $(\beta_i) = \frac{1}{A_i} (1, \dots, 1)_{1 \times (m \times J)}$

### (3) 綜合的인 最適化 問題

앞에서 誘導된 目的函數와 各部材의 破壞確率 制約條件式을 綜合하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize : } W = \{\rho\} [A]^T \{L\}$$

$$\text{Subject to : } P(\{[U]^T [H] - [T] [V] \{\beta\}\} \leq \{0\}) \leq \{\alpha\} \quad (3-16)$$

## 4. 最適化 알고리즘 概要

本研究에서는 效率的인 形狀最適化을 위해 收斂方法이 同一한 獨立된 2개의 設計變數組(group of design variable)로 分割 最適化하는 技法이

다. 各各의 設計變數組에 適用된 SUMT法 및 Powell method로 破壞確率을 考慮한 平面 트리스 構造物의 形狀을 最適化하는 綜合的인 알고리즘은 다음과 같다.

Step 1: 斷面積의 初期值  $\{X_0\}$  부여

Step 2: 斷面積의 初期值 또는 反復試行中 얻은 斷面積이 實行 可能 領域에 있는지를 檢査한다. 反復試行中 얻은 斷面積이 實行 可能 領域에 있으면 다음 段階로 進行하나 그렇지 않으면 實行 可能 領域의 設計點으로 變換한다.

Step 3: 다음 設計點  $\{X^{r+1}\}$ 을 찾기 위한 modified Newton method의 反復試行  $\{X^{r+1}\} = \{X^r\} - \{\beta^r\}$ 로부터 收斂值를 求한다.

Step 4: 앞 過程의 收斂限界值를 代入한 目的 函數만 가지고 Powell method의 一方向 探查法에 의해 目的函數값이 最小가 되도록 座標를 修正해 나간다. 目的函數값이 收斂하거나 許容反復回數에 도달하면 정지하나 그렇지 않으면 Step 2로 되돌아가  $k=1$ 로 하여 上記 過程을 反復試行한다. 이상의 過程에 관한 flow chart는 그림 4-1과 같다.

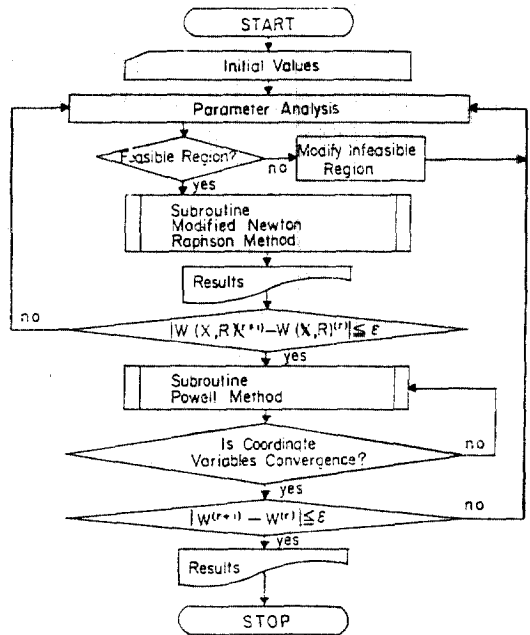


그림 4-1. SUMT法을 利用한 形狀最適化 흐름도

## 5. 數值例 및 結果分析

### 5-1. 文獻(5) 및 本 研究의 結果

本 研究는 部材破壞確率 制約條件式을 考慮한 形狀最適化이나 이에 關한 研究는 없기 때문에 形狀이 固定된 경우의 文獻(5)와 比較하여 本 研究의 妥當性을 分析한다. 文獻(5)에서 適用한 2部材 트러스의 設計條件은 表 5-1, 表 5-2 이고 文獻(5) 및 本 研究의 結果比較는 表 5-3 이다. 變動係數의 變化에 따라 本 研究 方法에 의한 結果를 部材破壞確率值  $\alpha$  값에 따른 目的函數을 圖示하면 그림 5-1, 5-2 와 같다.

2部材 트러스 構造物의 形狀最適化 結果值中  $V_f=0.1$   $V_0=0.1$  일 경우만 圖示하면 그림 5-3 과 같다.

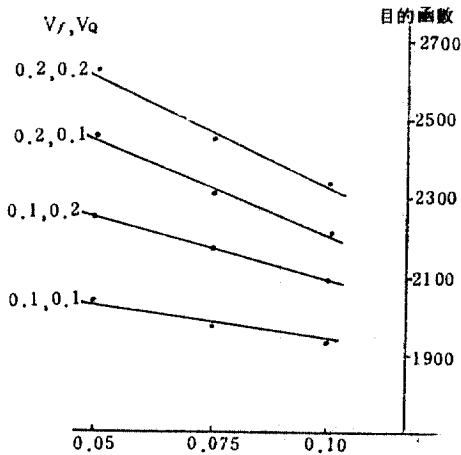


그림 5-1. 2部材 트러스의 部材破壞確率에 따른 目的函數值(形狀固定)

### 5-2. 7部材 트러스

7部材 트러스의 設計條件은 表 5-4 에 收錄되어 있고 本 研究 方法에 따른 結果를 部材破壞確率值  $\alpha$  값에 따라 目的函數值를 圖示하면 그림

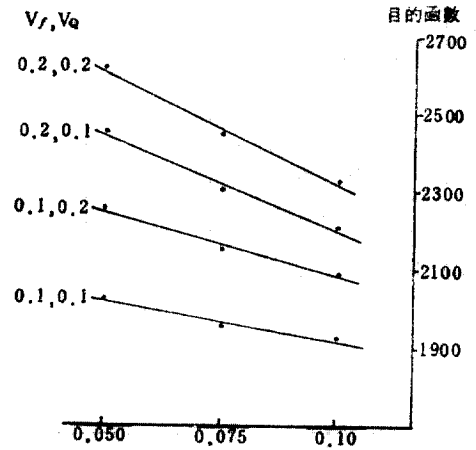


그림 5-2. 2部材 트러스의 部材破壞確率에 따른 目的函數值(形狀最適化)

表 5-1. 2部材 Truss 의 設計條件

條件의 種類	節點	x 方向荷重	y 方向荷重
第一 載荷 條件(1b)	2		30,000
第二 載荷 條件(1b)	2	30,000	
第一第二荷重의 標準偏差(1b)		1,000	
許容應力의 平均値(1b/m <sup>2</sup> )		15,000	
許容應力의 標準偏差		500	
破壞 確 率 ( $\alpha$ )			0.005

表 5-2. 2部材 Truss 의 設計條件

條件의 種類	節點		x 方向荷重				y 方向荷重					
第一 載荷 條件(1b)	2						30,000					
第二 載荷 條件(1b)	2		30,000									
第一第二荷重의 標準偏差(1b)	3,000	6,000	3,000	6,000	3,000	6,000	3,000	6,000	3,000	6,000	3,000	6,000
設計應力의 平均値(1b/m <sup>2</sup> )			15,000		15,000		15,000				15,000	
設計應力의 標準偏差	3,000	1,500	3,000	1,500	3,000	1,500	3,000	1,500	3,000	1,500	3,000	1,500
破壞 確 率 ( $\alpha$ )			0.05		0.075		0.1					
適 用 例 의 分 類			case 1		case 2		case 3					

表 5-3. 本研究 및 文獻<sup>(4)</sup>의 研究結果(部材의 斷面積)

構造形態	許容破壞確率	本 研 究	文獻 <sup>(4)</sup> 의 研究
2 部材 트러스	0.01	1.602	1.615
	0.2	1.507	1.524

表 5-4. 7 部材 Truss 의 設計條件

條件의 種類	節點		x 荷重 方向				y 方向 荷重					
第一 載荷 條件(1b)	2						700,000					
第二 載荷 條件(1b)	4						700,000					
第一第二荷重의 標準偏差(1b)	7,000	14,000	7,000	14,000	7,000	14,000	7,000	14,000	7,000	14,000	7,000	14,000
設計應力의 平均値(1b/m <sup>2</sup> )	2,000				2,000				2,000			
設計應力의 標準偏差	200	400	200	400	200	400	200	400	200	400	200	400
破壞 確率 ( $\alpha$ )	0.014				0.021				0.028			
適用例의 分類	case 1				case 2				case 3			

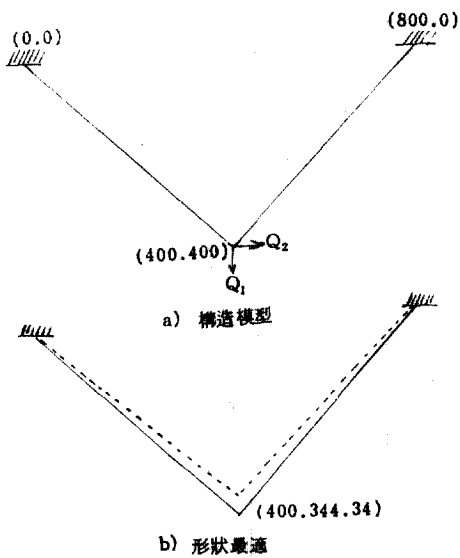


그림 5-3. 2 部材 트러스 變動係數에 따른 最適形狀

5-4, 5-5 와 같다.

또한 部材의 部材破壞確率 및 變動係數에 따른 構造形狀은 그림 5-6, 5-7, 5-8 과 같다.

5-3. 14 部材 트러스

14 部材 트러스의 計設條件은 表 5-5 에 收錄되어 있고 本 研究 方法에 따라 結果를 部材破壞確率限界值  $\alpha$  값에 따른 目的函數值를 圖示하면 그림 5-9, 5-10 과 같다.

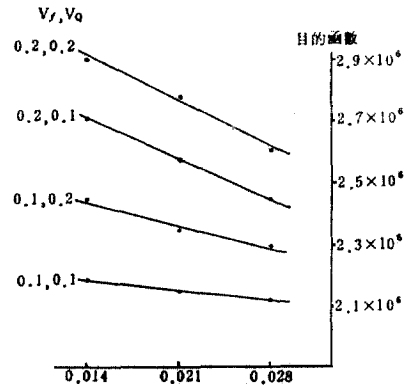


그림 5-4. 7 部材 트러스의 部材 破壞確率에 따른 目的函數值(形狀固定)

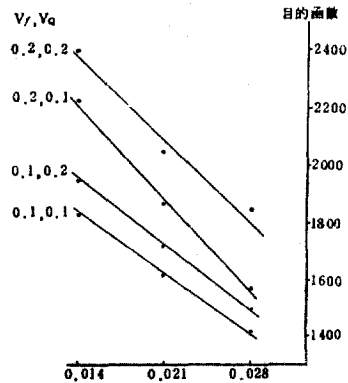


그림 5-5. 7 部材 트러스의 部材 破壞確率에 따른 目的函數值(形狀最適化)



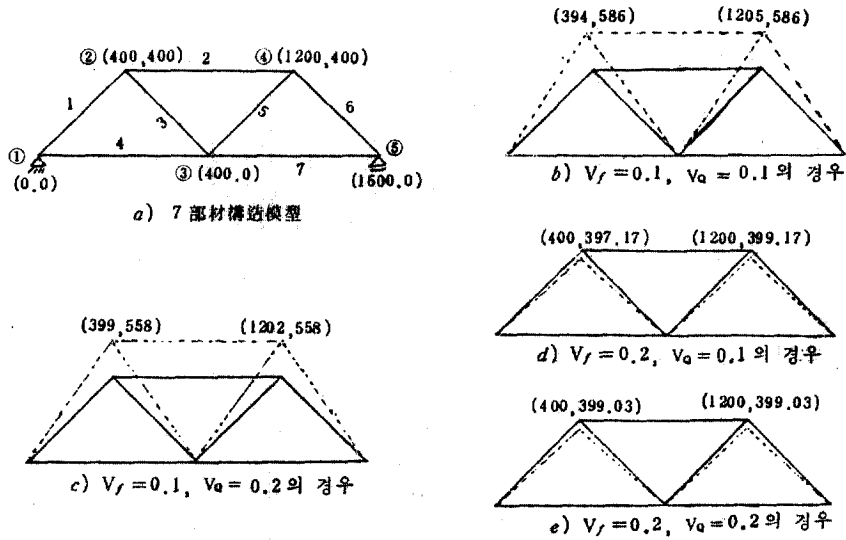


그림 5-6. 7 部材 트러스 變動係數에 따르는 最適形狀(部材破壞確率 0.014)

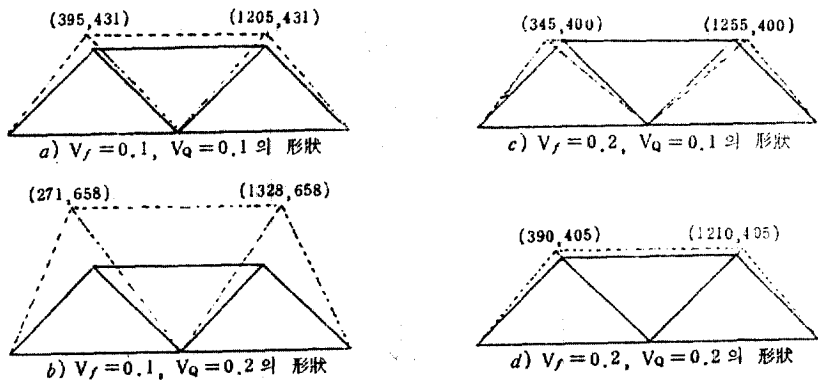


그림 5-7. 7 部材 트러스 變動係數에 따르는 最適形狀(部材破壞確率 0.021)

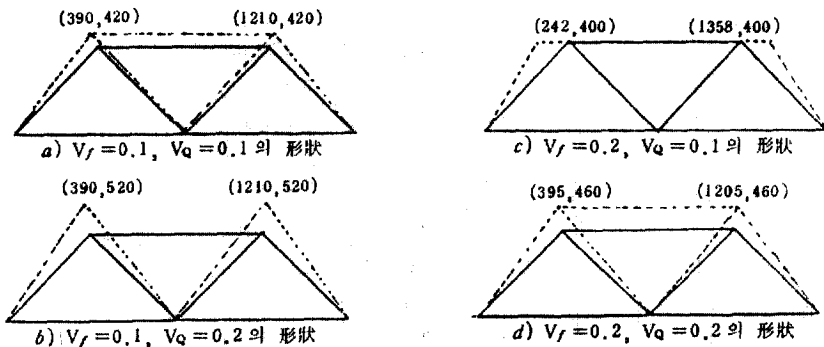


그림 5-8. 7 部材 트러스 變動係數에 따르는 最適形狀(部材破壞確率 0.028)

表 5-5. 14 部材 Truss 의 設計條件

條件의 種類	節 點	x 方 向 荷 重	y 方 向 荷 重	重
第一載荷條件(1b)	3		300,000	
第二載荷條件(1b)	5		300,000	
第一標準荷重의 偏差(1b)	30,000	60,000	60,000	30,000
第二標準荷重의 偏差(1b)	30,000	30,000	30,000	60,000
設計應力의 平均 值(1b/m <sup>2</sup> )		15,000	15,000	15,000
設計應力의 標準偏差	3,000	3,000	1,500	1,500
破壞 確 率( $\alpha$ )		0.007	0.011	0.014
適 用 例 的 分 類		case 1	case 2	case 3

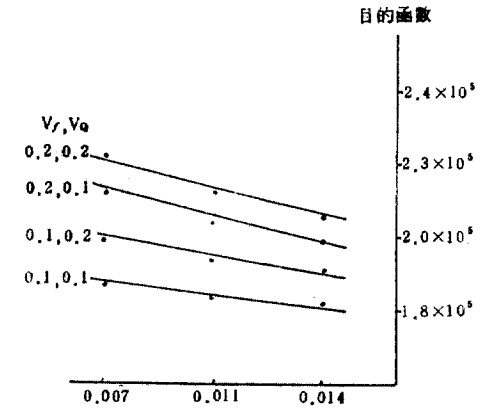


그림 5-9. 14 部材 트러스의 部材破壞確率에 따른 目的函數值(形狀固定)

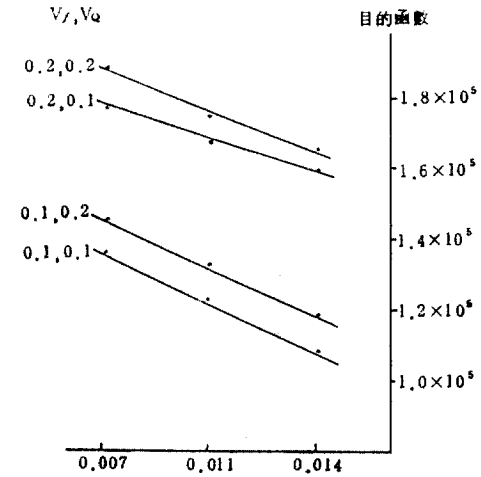


그림 5-10. 14 部材 트러스의 部材破壞確率에 따른 目的函數值(形狀最適化)

또한 部材破壞確率 및 變動係數에 따른 構造 形狀을 圖示하면 그림 5-11, 5-12, 5-13 과 같다.

#### 5-4. 結果分析

部材의 破壞確率을 考慮한 트러스 構造物의 形狀最適化를 容易하게 하기 위해 本 研究에서 提示된 分割最適化技法을 實際 트러스의 構造物에 適用된 結果를 바탕으로 分析하면 다음과 같다.

1) 同一한 設計條件下에서 트러스의 幾何學的 形態를 固定시키고 斷面만을 最適化한 경우보다

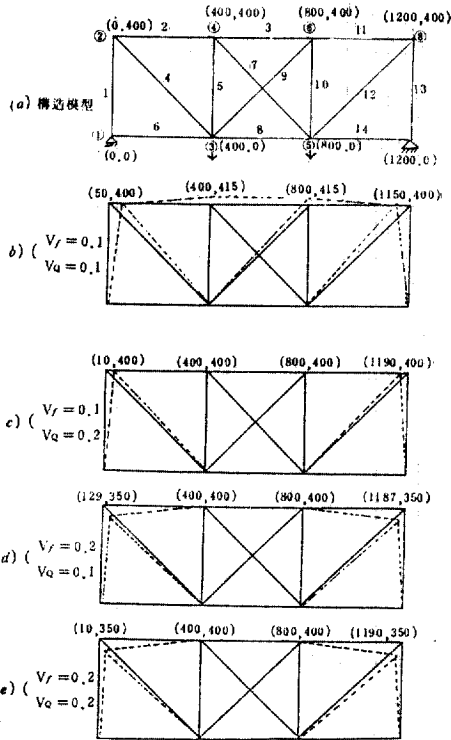


그림 5-11. 14部材 트러스 變動係數에 따른 最適形狀(部材破壞確率 0.007)

트러스의 形狀까지도 最適化한 경우는 本數值例를 基準으로 할 때 表 5-6, 5-7, 5-8과 같이 대략 0.09~38.4%程度로 重量이 減少한다는 事實을 알았으므로 트러스의 形狀最適化는 트러스의 構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

2) 許容 破壞確率值가 減少함에 따라 形狀이 固定된 경우의 目的函數값이 一定比率로 增加함을 그림 5-1로부터 알 수 있다.

3) 許容破壞確率值가 減少함에 따라 形狀最適化의 경우도 目的函數值가 一定한 比率로 增加함을 그림 5-2, 5-5, 5-10으로부터 알 수 있다.

4) 設計應力의 變動係數가 增加함에 따라 形狀이 固定된 경우 目的函數值가 增加함을 그림 5-1, 5-4, 5-9로부터 알 수 있다.

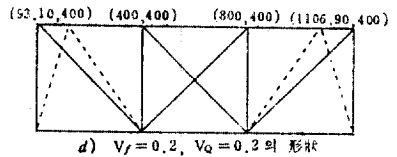
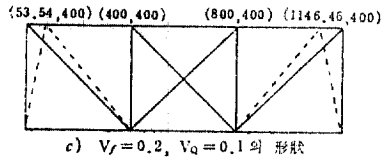
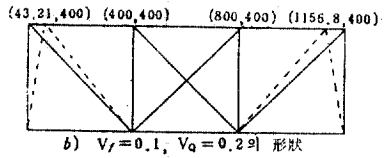
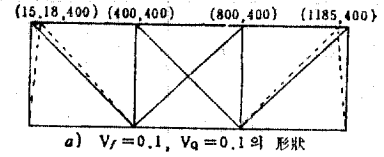


그림 5-12. 14部材 트러스 變動係數에 따른 最適形狀(部材破壞確率 0.011)

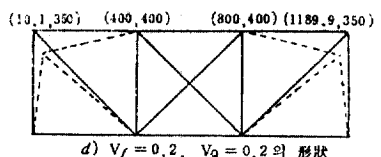
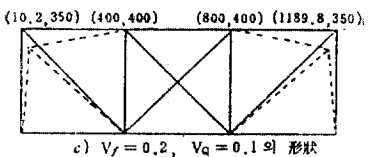
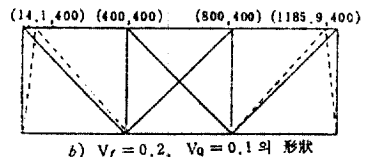
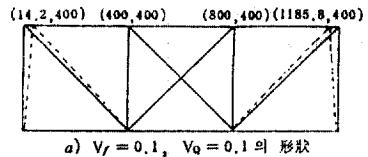


그림 5-13. 14部材 트러스 變動係數에 따른 最適形狀(部材破壞確率 0.014)

表 5-6.

構造模型	變動係數	破壞確率		形狀固定	形狀最適化	重量減少率(%)
		$V_f$	$V_o$			
2部材트러스	0.05	0.1	0.1	2,300.34	2,027.88	0.12
			0.2	2,248.75	2,246.22	0.11
		0.2	0.1	2,452.93	2,450.34	0.10
			0.2	2,611.97	2,609.41	0.09
	0.075	0.1	0.1	1,970.66	1,968.22	0.12
			0.2	2,161.37	2,158.89	0.11
		0.2	0.1	2,307.46	2,304.94	0.109
			0.2	2,446.04	2,443.56	0.10
	0.10	0.1	0.1	1,926.22	1,923.80	0.12
			0.2	2,095.76	2,093.30	0.17
		0.2	0.1	2,205.98	2,203.49	0.12
			0.2	2,329.01	2,326.43	0.11

表 5-7.

構造模型	破壞確率	最適係數		形狀固定	形狀最適化	重量減少率(%)
		$V_f$	$V_o$			
7部材트러스	0.014	0.1	0.1	2,185,874	1,870,839	14.41
			0.2	2,430,353	1,963,843	21.34
		0.2	0.1	2,709,181	2,237,296	17.41
			0.2	2,898,109	2,412,607	16.75
	0.021	0.1	0.1	2,151,340	1,621,403	24.63
			0.2	2,346,506	1,737,311	25.96
		0.2	0.1	2,572,165	1,876,885	27.03
			0.2	2,769,225	2,039,742	26.34
	0.028	0.1	0.1	2,126,494	1,426,816	32.90
			0.2	2,297,849	1,509,550	34.30
		0.2	0.1	2,449,582	1,668,713	31.87
			0.2	2,613,850	1,875,852	28.23

表 5-8.

構造模型	破壞確率	變動係數		形狀固數	形狀最適化	重量減少 (%)
		$V_r$	$V_o$			
14部材트리스	0.007	0.1	0.1	187,443	137,262	26.8
			0.2	199,817	144,063	27.9
		0.2	0.1	213,159	177,884	16.5
			0.2	222,893	188,716	15.3
	0.011	0.1	0.1	184,061	122,429	33.5
			0.2	194,865	132,334	32.1
		0.2	0.1	203,957	168,996	17.1
			0.2	212,194	174,439	17.8
	0.014	0.1	0.1	181,544	170,046	6.3
			0.2	191,150	117,724	38.4
		0.2	0.1	198,691	162,393	18.2
			0.2	206,322	163,680	20.6

5) 設計應力の變動係數가 增加함에 따라 形狀最適化의 경우도 目的函數가 增加함을 그림 5-2, 5-5, 5-10에서 알 수 있다.

6) 文獻<sup>(5)</sup>의 研究結果와 本 研究의 結果值를 比較하면 서로 거의 同一한 값에 收斂함을 表 5-3에서 알 수 있다.

6. 結 論

本 研究에서 提示된 알고리즘을 여러 트리스 構造模型에 適用하여 얻어진 研究 結果를 要約 하면 다음과 같다.

1. 形狀最適化로 重量이 相當히 減少되었으므로 트리스 構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

2. 形狀이 固定된 경우 및 形狀最適化에 있어서 許容 破壞確率이 增加함에 따라 一定한 比率로 重量이 減少함을 알았다.

3. 作用荷重의 變動係數보다 設計應力の 變動係數가 目的函數值에 큰 影響을 주었다.

本 研究에서는 作用荷重 및 設計 應力の 分布를 正規分布로 假定하고 있으나 實際와는 相當한 差異가 있을 것으로 思料된다. 따라서 實際

構造物設計에 適用하기는 不充分하나 經驗上 使用해 왔던 安全率 概念을 數值的으로 合理化한 것으로 思料된다.

參 考 文 獻

1. G.B. Gantzig, "A Decomposition Principle for Linear Program," Princeton University Press, 1963.
2. Vander Plants, C.N., "Automated Design of Elastic Trusses for Optimum Geometry," Report No. 45. School of Engineering, Case Western Reserve Univ., June. 1971.
3. Uri Kirsch., "Optimum Structural Design," McGraw-Hill Company, 1968.
4. Palle Thoft-Christensen: "Application of Structural Systems Reliability Theory with 179 Figures," Springer-Verlay Berlin Heidelberg, New Tokyo, 1986.
5. Chiata, D.N., "Structural Optimization with Probability of Failure Constraints," NASA, TN D-3777, NASA, 1966.
6. Lucien A. Schmit, Thomas P. Kicher, "Synthesis of Material and Configuration Selection," J. of

- Structural Division, ASCE, Proc.* Vol. 88, No. 3T3, June 1962, pp. 79~102.
7. Topping, B.H.Y., "Shape Optimization on Skeletal Structures: A review," *J. of the Structural Division, ASCE*, Vol. 109, No. 8.
  8. U. Kirsch and G. Toledano., "Approximate Reanalysis for Modifications or Structural Geometry," *J. of Computers and Structures*, Vol. 16, No. 1~4, 1983, pp. 269~277.
  9. U. Kirsch, "An Improved Multilevel synthod." *J. of Structural Mechanics*, 13(2), 1985, pp. 123~144.
  10. Hilton, H.H., and Feigen, M., Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability," *J. of the Aerospace Sciences*, Vol. 27, No. 9, 160.
  11. Switzky, H., "Minimum Weight Design with Structural Reliability," *Proc. AIAA 5th Annual Str. and Mat. Conf.*, 1964.
  12. Moses, F., Kinser, D.E., "Optimum Structural Design with Failure Probability Constraints," *AIAA*. Vol. 5, No. 6, 1967.
  13. Vitiello, E., and Pister, K.S., "Applications of Reliability Based Global Cost Optimization to Design of Earthquake-Resistant Structures," *Report No. EERC 74-10*, University of California. Aug. 1974, pp. 1~101.
  14. Yasuichi OKADA, Tsutomu SAWADY and Hidehiko UTSUNOMIYA. "Fundamental Investigations on Optimum Design of Structures Depending on the Reliability Constraint," *Bulletin of Faculty of Engineering Tokushima University*, Vol. 10, No. 1&2, 1974.
  15. Rao, S.S., Reliability Analysis and Optimum Design of Concrete Structural Members," *Build Internationals*, Vol. 8, 1975. pp. 369~380.
  16. Davidson, J.W., Felton, L.P., and Hart, G.C., "Reliability-Based Optimization for Dynamic Loads." *J. of the Structural Division, ASCE*, Vol. 103, No. ST10. Oct. 1977, pp. 2021~2036.
  17. 李春植, 黃鶴周, 金秀一, "鐵筋콘크리트橋上部構造의 確率論的 解析", *大韓土木學會誌*, 第27卷 第5號, 1979. 10, pp. 129~139.
  18. 趙孝男, "R.C. 部材의 L.R.F.D. 信賴性設計基準에 관한 研究", *大韓土木學會論文集* 第1卷 第1號, 1981年 12月, pp. 21~32.
  19. 趙孝男, 全載用, 申裁誌, "確率理論에 基礎한 鐵筋콘크리트許容應力設計規準", *大韓土木學會論文集* 第6卷 第4號 1986年 12月.
  20. 李奎遠: "平面트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 研究", *延世大學校 大學院(博士學位論文)*, 1980.
  21. 배주성: "信賴性制約을 考慮한 平面트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 研究", *全北大學校 大學院(博士學位論文)*, 1983.
  22. 정해준: "幾何的 計劃法 및 Powell方法에 의한 鋼材트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 研究", *全北大學校 大學院(博士學位論文)*, 1983.
  23. 한상은 "두 設計空間에 依한 아치 構造의 形狀最適化", *延世大學校 大學院(博士學位論文)*, 1985
  24. 金成完, "分割最適化 技法에 의한 Truss 構造物의 形狀最適化에 관한 研究", *全北大學校 大學院(博士學位論文)*, 1987.

(接受: 1987. 5. 23)