

# 水平靜止水域으로 流入되는 陰浮力흐름

## Negative Buoyant Flow into Rectangular Ponds

尹 泰 勳\*  
Yoon, Tae Hoon  
全 時 永\*\*  
Chun, Si Young

### Abstract

A two dimensional negatively buoyant flow from a shallow channel into rectangular ponds is analysed numerically by a finite difference scheme in a stretched coordinate system.

In rectangular ponds, the configuration of plunge flow largely depends on the densimetric Froude number,  $Fr_p$ , of the inflow. The velocity of front of the plunging flow increases with increasing negative buoyancy (decrease of  $Fr_p$ ). The location of stable plunge point and maximum travel distance of plunge point are found to be a function of dimensionless time and densimetric Froude number. Large vortices develop on the both sides of negative buoyant flow or plunge flow.

### 要 旨

陰浮력을 갖는 유체가 水平靜止水域으로 流入되어 일어나는 密度流의 거동이 유한차분기법에 의하여 數值的으로 해석된다. 정지수역에서 plunge 흐름의 모양은 流入密度 Froude 數  $Fr_p$  에 크게 영향을 받으며 密度流前面速度는 陰浮力の 증가 즉  $Fr_p$  의 감소에 따라 증가한다. plunge point 의 最大旅行距離와 安定 plunge point 는 뚜렷하게 무차원시간  $T$  와  $Fr_p$  의 함수로 나타난다. 음부력흐름(또는 plunge point)의 좌우에 渦가 큰 규모로 발달된다.

### 1. 序 論

相異한 密度 또는 溫度를 갖는 유체가 水平靜止 또는 흐름水域으로 유입하여 일어나는 흐름은 密度流(density current)로 정의되며 유입되는 유체와 정지 또는 흐름水域流體와의 밀도차이에 따라 바닥밀도류(underflow), 표면밀도류(overflow) 및 중간밀도류(interflow)로 구분할

수 있다.

정지수역으로 유입되는 유체는 정지수역의 유체를 下流방향으로 계속 밀면서 힘의 평형이 이루어 질 때까지 이동하게 된다. 이러한 힘의 평형은 계속 유입되는 유체에 의하여 깨어지면서 plunge 현상이 발생한다. plunge 현상의 예로 여름에 貯水池의 깊은 곳에 있는 차가운 물이 下流의 하천이나 調整池로 유입되는 경우, 호수로 인하여 생기는 流砂를 포함하는 물이 貯水池로 유입되는 탁류의 경우 및 겨울에 저수지로

\* 正會員 · 漢陽大學校 工科大学 教授, 土木工學科

\*\* 正會員 · 檀國大學校 理工大學 講師, 土木工學科

유입되는 하천수의 경우를 들 수 있다. 이러한 흐름현상은 농작물과 生態系에 冷害와 流入口부근의 堆砂로 인하여 저수지의 有効수명을 감소시킨다. (9) 이와같이 야기되는 문제점을 제거 내지 최소로 하고 특히 우리나라와 같이 댐으로부터 용수를 放流하는 경우 選別放流(selective withdrawal)를 채용하지 않고 調整池로 온도조절을 피하는 경우 조정지의 유입구와 조정지의 규모의 설계에는 plunge 현상에 관한 지식이 요구된다. plunge 현상을 설명하기 위해서는 유입유체의 水理學의特性和 정지수역의 幾何學의特性에 따라 정지수역에서 밀도류전면의 흐름특성, 밀도 또는 속도변화를 예측하는 것이 필요하다.

本 研究에서는 이러한 정보를 얻기 위하여 밀도류의 거동을 설명하는 기본방정식에 유한차분기법을 이용하여 수치적인 해석이 시도된다. 본 연구에서 취급되는 밀도류는 밀도 또는 온도차이에 의하여 발생하는 2次元바닥밀도류로 국한되며 수치실험에서 밀도차이를 설명하는 流入密度 Froude 數  $Fr_e$ 는 plume 과 운동량지배현상이 나타날 수 있도록 넓은 범위  $0.120 \leq Fr_e \leq 5.993$ 에 있다.

본 연구에서는 유입유체의 상이한 조건과 정지수역의 幾何學의인 조건에 따라 밀도류의 거동 즉 밀도류가 형성되는 과정에서의 밀도류영역의 기하학적인 사항을 제시하고자 한다.

## 2. 基本方程式과 境界條件

정지수역유체의 밀도( $\rho_0$ ) 보다 밀도가 큰( $\rho_e$ ) 유체가 정지수역으로 유입되는 경우 plunge 현상에 의한 수용유체의 운동과 유입유체의 거동에 관한 해석이 기술되며 다음과 같은 가정을 전제로 한다. 유입흐름은 2次元, 非壓縮性 및 層流이고 유입구에서 유체는 水平方向으로만 유입한다. 또한 自由水面은 연직변화가 없으며, 추적물확산계수는 수평과 연직방향이 같으며, 정지수역의 밀도는 일정하다. 중력항을 포함하지 않은 작은 밀도차이에는 Boussinesq 가정이 적용된다.

### 2.1 基本方程式

앞의 가정하에서 2차원 기본방정식은 다음과 같다.

### 連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

### 運動量保存式

水平方向(x-方向)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

鉛直方向(z-方向)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P^*}{\partial z} - g \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

### 追跡物保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) &= k \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $u$ 와  $w$ 는 수평과 연직방향의 속도이고  $P^*$ 는 정수압( $P$ )조건으로부터 偏奇되는 평균 동수압  $P^* = P/\rho_e - g \int_0^z \rho/\rho_e dx$ ,  $k$ 는 추적물확산계수,  $g$ 는 중력가속도,  $t$ 는 시간,  $\nu$ 는 동점성계수,  $\rho$ 는 국부밀도이다.

2次元흐름에서 渦度  $\omega$ 와 流函數  $\phi$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = u \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -w \quad (7)$$

식(6)과 (7)은 자동적으로 연속방정식 (1)을 만족한다. Poisson 방정식인 流函數-渦度式은 식(6)과 (7)을 식(5)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \omega \quad (8)$$

식(2)와 (3)에서 압력항을 소거하기 위하여 식(2)와 (3)을 교차미분한 후 전자에서 후자를 빼면 다음과 같은 渦度保存式을 얻는다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\omega) + \frac{\partial}{\partial z} (w\omega)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

식(9)는渦度  $\omega$ 의 수송성질이 보존되기 때문에渦度輸送式의 보존형으로 언급된다<sup>(7)</sup>. 비록 보존성은 해의 정확도를 뜻하는 것은 아니지만 경험에 의하면保存方程式에 의하여 얻은 결과가 좀 더 정확한 것으로 알려졌다<sup>(1)</sup>.

식(5)~(9)에서 어떤 항의 값은 상대적으로 작기 때문에 이 작은 항들을 결정할 수 있을 뿐만 아니라 흐름현상을 쉽게 해석하기 위하여 도입되는無次元變數는 다음과 같다.

$$X = \frac{x}{d}, \quad Z = \frac{z}{d}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad W = \frac{w}{U_0}$$

$$T = \frac{tU_0}{d}, \quad \psi = \frac{\varphi}{U_0 d}, \quad \Omega = \frac{\omega d}{U_0}$$

여기서  $d$ 는特性길이로서 정지수역의 수심이고  $U_0 (=q/d)$ 는特性速度로서 정지수역下流에서의 속도이다.

앞의 무차원변수를 기본방정식 식(8), (9) 및(4)에 도입하여 얻은無次元流函數-渦度式, 渦度保存式 및 追跡物保存式은 다음과 같다.

流函數-渦度式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = \Omega \quad (10)$$

渦度保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial T} + \left[ \frac{\partial}{\partial X} (U\Omega) + \frac{\partial}{\partial Z} (W\Omega) \right] \\ = \frac{1}{F^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

追跡物保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial T} + \left[ \frac{\partial}{\partial X} (U\Gamma) + \frac{\partial}{\partial Z} (W\Gamma) \right] \\ = \frac{1}{ScRe} \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial Z^2} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\Gamma = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ 는無次元密度차이, 無次元媒介變數는 Reynolds數  $Re = U_0 d/\nu$ , Froude數  $F = U_0/(gd)^{1/2}$  및 Schmidt數  $Sc = \nu/k$ 이다.

식(11)에서 왼쪽과 오른쪽항의 괄호안의 항들은 각각移送과擴散輸送項이고 식(12)에서는移送과追跡物輸送項이다. 또 식(11)에서 Froude數  $F$ 를 포함하는 항은浮力에 의한渦度輸送을 나타낸다.

流入口부근에서의 흐름特性은流入密度 Froude數  $Fr_s$ 에 의하여 지배되며 다음과 같이 정의된다<sup>(4)</sup>.

$$Fr_s = \frac{U_s}{\left( \frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0} g d_s \right)^{1/2}} \quad (13)$$

식(11)에서 Froude數는 다음과 같은 관계식  $Fr_s = (d/d_s)^{3/2} (\Gamma_s)^{1/2} F$ 에 의하여  $Fr_s$ 의 함으로 표현된다.

狀態方程式으로부터 밀도와 온도사이의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\beta(\theta - \theta_0) \\ \text{또는 } \Gamma = -\beta(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\beta$ 는 열팽창계수, 수온이 4~15°C 범위에서  $1 \times 10^{-4} \text{ C}^{-1}$  정도의 값을 가지므로 상수로 가정할 수 있고  $\theta$ 는局部溫度이다.

## 2.2 境界條件

수평정지수역으로 유입되는密度流의解析에는 다음과 같은 5가지 경우의 境界조건이 적용되고 이들 境界는 그림 1에 보인 바와 같다.

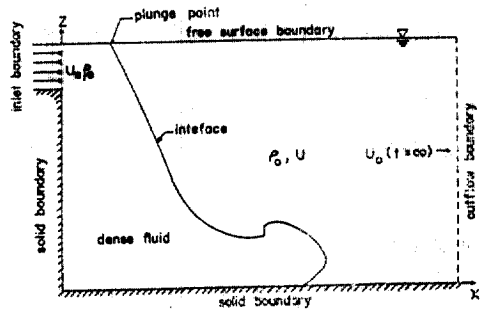


그림 1. 수평정지수역의 境界조건

固體面 바닥에서

$$\psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2}$$

自由水面에서

$$\psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} = 0, \quad \Omega = 0$$

流入口에서

$$\psi = \psi_s(Z), \quad \Gamma = \Gamma_s, \quad \Omega = 0$$

靜止水域 上流壁面에서

$$\psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial X} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}$$

靜止水域 下流에서

$$\psi = \psi_{\infty}(Z), \Gamma = 0, \Omega = 0$$

流函數  $\psi$ 의 경계조건은 두 개의 고체벽면, 정지수역의 상류벽면과 바닥에 대하여 이러한 경계면을 가로질러서 어떤 유체의 흐름로 존재하지 않는 사실에서 얻을 수 있고, 流入口에서  $\psi$ 는 水平方向의 흐름속도만 존재하므로 선형적으로 변화되어야 하며, 자유수면은 연속변화가 없이 一定하게 가정되었고 주변에서 유량공급이 없으므로  $\psi$ 는 일정한 값을 가지며, 정지수역 下流에서  $\psi$ 는 흐름이 완전히 발달된 지점을 택하면 유입구에서와 같이 선형적으로 변화한다.

密度차이  $\Gamma$ 의 경계조건은 정지수역 上流壁面 바닥 및 자유수면에 대하여 각 면이 斷熱性이란 가정하에서 얻어진다. 유입구에서 유입유체와 정지수역유체 사이의 밀도차이  $\Gamma$ 이고 정지수역 下流에서 밀도차이는 흐름이 완전히 발달되어 주변유체의 밀도와 같아지므로 零이 된다.

渦度  $\Omega$ 의 경계조건은 고체면에서의 속도분포를 이용하여 渦度の 정의로부터 얻을 수 있으나 고체면에서 속도구배는 얻기가 어려우므로 유함수를 Taylor 급수로 전개하여 유함수의 항으로 나타낸다. 자유수면에서의 渦度は 자유수면과 대기압사이의 마찰이 무시될 만큼 작으므로 零으로 가정할 수 있다. 유입구와 정지수역 下流에서의 흐름은 等流로 가정되므로 즉 非回轉性흐름이므로 渦度は 零이 된다.

### 3. 數值實驗方法

속도  $U$ 와  $W$ , 유함수  $\psi$ , 밀도차이  $\Gamma$  및 渦度  $\Omega$ 는 동일한 격점에서 정의된다.

#### 3.1 座標變換過程

$X$  방향의 하류경계에서 차분방정식의 계산과정에 필요한 변수인 속도, 유함수, 와도 및 밀도차이(또는 온도차이)에 관한 경계조건 설정시 어떤 下流지점을 경계로 선택해야 할 것이며 또한 선택된다 하더라도 그 지점에서 변수들의 값을 모르기 때문에 많은 어려움이 따른다. 이러한 어려움은  $X$  방향에 stretched<sup>(4,5,8)</sup> 좌표계를 도입하여 좌표를 변환함으로써  $X$  방향의 무한경계가 1이 되게 하므로써 해결될 수 있다.

$X$  방향의 좌표변환식은 다음과 같고  $Z$  방향

의 좌표는 변환되지 않는다.

$$X = 1 - e^{-\alpha X} \quad (15)$$

식(15)에서  $X$ 의 영역은 零에서  $\infty$ 까지이고 변환된 좌표  $X$ 의 영역은 零에서 1까지이며  $\alpha$ 는 임의의 상수이다. Sill<sup>(6)</sup>은 식(15)에 의한 좌표변환외에도 다른 형태의 좌표변환을 제안하여 경계층문제등 여러 문제에 적용하여 좋은 결과를 얻은 바 있다.

식(15)로 주어진 변환을 기본방정식 식(10)~(12)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 변환된 두차원 기본방정식을 얻는다.

流函數—渦度式

$$-a^2(1-X) \frac{\partial \psi}{\partial X} + a^2(1-X)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = \Omega \quad (16)$$

渦度保存式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + a(1-X) \frac{\partial}{\partial X} (U\Omega) + a(1-X) \frac{\partial}{\partial Z} (W_1\Omega) = \frac{a(1-X)}{F^2} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ -a^2(1-X) \frac{\partial \Omega}{\partial X} + a^2(1-X)^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right] \quad (17)$$

追跡物保存式

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} + a(1-X) \frac{\partial (U\Gamma)}{\partial X} + a(1-X) \frac{\partial (W_1\Gamma)}{\partial Z} = \frac{1}{ScRe} \left[ -a^2(1-X) \frac{\partial \Gamma}{\partial X} + a^2(1-X)^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial Z^2} \right] \quad (18)$$

여기서  $W_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial X}$

#### 3.2 差分化過程 및 數值計算方法

非線型項을 제외한 차분방정식은 공간에는 중앙차분, 시간에 전방차분, 비선형항에는 변수의 부호에 따라 표현되는 three-point noncentral difference scheme<sup>(10)</sup>이 이용되었다. 이들을 이용한 식(16), (17) 및 (18)의 差分化표현은 다음과 같다.

流函數—渦度式

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{2 \left\{ \frac{a^2 [1 - (i-1)\Delta X]^2}{(\Delta X)^2} + \frac{1}{(\Delta Z)^2} \right\}}$$

$$\left\{ \left( -\frac{a^2(1-(i-1)\Delta X)}{2\Delta X} + \frac{a^2(1-(i-1)\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} \right) \Psi_{i+1,j} + \left( \frac{a^2(1-(i-1)\Delta X)}{2\Delta X} + \frac{a^2(1-(i-1)\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} \right) \Psi_{i-1,j} + \frac{1}{(\Delta Z)^2} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) - \Omega_{i,j} \right\} \quad (19)$$

渦度保存式

$$\begin{aligned} & \{ a(1-(i-1)\Delta X) (\bar{U}_{i,j} + |\bar{U}_{i,j}| - \bar{U}_{i-1,j} + |\bar{U}_{i-1,j}|) / 2\Delta X + (\bar{W}_{i,j} + |\bar{W}_{i,j}| - \bar{W}_{i,j-1} + |\bar{W}_{i,j-1}|) / 2\Delta Z + [2a^2(1-(i-1)\Delta X)^2 / (\Delta X)^2 + 2 / (\Delta Z)^2] / Re + 1 / \Delta T \} \Omega_{i,j}^{t+1} \\ & = \{ -a(1-(i-1)\Delta X) (\bar{U}_{i,j} - |\bar{U}_{i,j}|) / 2\Delta X + a^2[(1-(i-1)\Delta X)^2 / (\Delta X)^2 - (1-(i-1)\Delta X) / 2\Delta X] / Re \} \Omega_{i,j}^{t+1}, j + \{ a(1-(i-1)\Delta X) (\bar{U}_{i-1,j} + |\bar{U}_{i-1,j}|) / 2\Delta X + a^2[(1-(i-1)\Delta X)^2 / (\Delta X)^2 + (1-(i-1)\Delta X) / 2\Delta X] / Re \} \Omega_{i,j}^{t+1}, j + \{ -(\bar{W}_{i,j} - |\bar{W}_{i,j}|) / 2\Delta Z + 1 / [(\Delta Z)^2 Re] \} \Omega_{i,j}^{t+1}, j + 1 + \{ (\bar{W}_{i,j-1} + |\bar{W}_{i,j-1}|) / 2\Delta Z + 1 / [(\Delta Z)^2 Re] \} \Omega_{i,j}^{t+1}, j-1 + a[(1-(i-1)\Delta X) / F^2 (\Gamma_{i+1,j} - \Gamma_{i-1,j}) / 2\Delta X + \Omega_{i,j}^{t+1} / \Delta T \quad (20) \end{aligned}$$

追跡物保存式

$$\begin{aligned} & \{ a(1-(i-1)\Delta X) (\bar{U}_{i,j} + |\bar{U}_{i,j}| - \bar{U}_{i-1,j} + |\bar{U}_{i-1,j}|) / 2\Delta X + (\bar{W}_{i,j} + |\bar{W}_{i,j}| - \bar{W}_{i,j-1} + |\bar{W}_{i,j-1}|) / 2\Delta Z + [2a^2(1-(i-1)\Delta X)^2 / (\Delta X)^2 + 2 / (\Delta Z)^2] / (ScRe) + 1 / \Delta T \} \Gamma_{i,j}^{t+1} \\ & = \{ -a(1-(i-1)\Delta X) (\bar{U}_{i,j} - |\bar{U}_{i,j}|) / 2\Delta X + a^2[(1-(i-1)\Delta X)^2 / (\Delta X)^2 - (1-(i-1)\Delta X) / 2\Delta X] / (ScRe) \} \Gamma_{i,j}^{t+1}, j + \{ a(1-(i-1)\Delta X) (\bar{U}_{i-1,j} + |\bar{U}_{i-1,j}|) / 2\Delta X + a^2[(1-(i-1)\Delta X)^2 / (\Delta X)^2 + (1-(i-1)\Delta X) / 2\Delta X] / (ScRe) \} \Gamma_{i,j}^{t+1}, j + \{ -(\bar{W}_{i,j} - |\bar{W}_{i,j}|) / 2\Delta Z + 1 / [(\Delta Z)^2 ScRe] \} \Gamma_{i,j}^{t+1}, j + 1 + \{ (\bar{W}_{i,j-1} + |\bar{W}_{i,j-1}|) / 2\Delta Z + 1 / [(\Delta Z)^2 ScRe] \} \Gamma_{i,j}^{t+1}, j-1 + \{ \bar{W}_{i,j-1} \end{aligned}$$

$$+ |\bar{W}_{i,j-1}|) / 2\Delta Z + 1 / [(\Delta Z)^2 ScRe] \} \Gamma_{i,j}^{t+1}, j-1 + \Gamma_{i,j}^{t+1} / \Delta T \quad (21)$$

여기서  $U_{i,j} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i,j})$

$\bar{W}_{i,j} = \frac{1}{2} (\bar{W}_{i,j+1} + \bar{W}_{i,j})$  이고  $L$  은 각 시간단계이다.

식(20)과 (21)에 나타난 속도성분  $U_{i,j}$  와  $W_{i,j}$  는 내부격점에서 다음과 같은 유함수의 값으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$U_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Z} \quad (22)$$

$$W_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta X} \quad (23)$$

數値實驗의 安定性을 보존하기 위하여 식(20)과 (21)에서 나타난 非線型項은  $U_{i,j}$  와  $U_{i-1,j}$  의 부호에 따라 upstream differencing scheme<sup>(8,7)</sup>을 이용하여 차분방정식으로 표현되었다. 이러한 비선형항에 관하여 광범위하게 다룬 연구는 Torrance<sup>(10)</sup>에 의하여 주어졌으며 많은 수치 실험의 保存性質, 安定性比較 및 切斷誤差에 관하여 다루었다.

$m(\Delta X) \times n(\Delta Z)$ 의 격자망을 갖는 水域에 대하여 고체면 바닥의 격점( $i, 1$ )에서 밀도차이  $\Gamma$ 의 경계조건에 대한 차분방정식은 polynomial fitting을 이용하여 정리하면 다음 같이 얻는다.<sup>(8,7)</sup>

$$\Gamma_{i,j} = \frac{4\Gamma_{i,2} - \Gamma_{i,3}}{3} \quad (24)$$

나머지 경계에서 밀도차이  $\Gamma$ 의 경계조건도 같은 방법으로 구할 수 있다.

고체면바닥의 격점( $i, 1$ )에서 渦度  $\Omega$ 의 경계조건에 대한 차분방정식은 고체면에서 속도구배를 얻기가 어려우므로 유함수를 Taylor 급수로 전개하여 다음과 같은 유함수의 항으로 표현된다.

$$\Omega_{i,1} = \frac{2(\Psi_{i,2} - \Psi_{i,1})}{(\Delta Z)^2} \quad (25)$$

1차식으로 표현된 식(25)의 渦度는 사용하기 안전할 뿐만 아니라 고차식으로 표현하는 것보다. 좋은 결과<sup>(7)</sup>를 주거나 거의 같은 결과를 준다<sup>(6)</sup>. 나머지 경계조건에서의 渦度는 같은 방법으로 구할 수 있다.

流函數의 계산과정은 relaxation 방법중 relaxation 계수  $r$ 가 1 과 2사이인 successive over relaxation(SOR)방법을 이용하였으며 SOR 은 다른 방법보다 수렴성이 좋은 Gauss-Seidel 반복법에 의하여 수행되었고, 渦度保存式과 追跡物保存式도 陰解法(implicit difference scheme)으로 전개하여 얻은 식(20)과 (21)에 Gauss-Seidel 반복법을 도입하여 解를 얻었다. 초기조건으로서 cold start가 적용되었으며 유함수는 식(19)에 relaxation factor  $r$ 를 도입하여 정리한 식으로부터 얻어진다. 얻어진 유함수로부터 속도  $U$ 와  $W$ 는 식(22)와 (23)으로부터 계산된다. 계산된  $U$ 와  $W$ 로부터 밀도차이는 식(21)로부터 구한 뒤 식(20)으로부터 渦度는 얻어진다.

앞의 계산과정에서 수렴조건은 다음과 같다.

$$\frac{\text{Max}\{C_{i,j}^{(S+1)} - C_{i,j}^{(S)}\}}{\text{Max}\{C_{i,j}^{(S)}\}} < 5 \times 10^{-5}$$

앞 식에서 왼쪽항은 한 단계 계산결과로서  $C$ 가 유함수인 경우에  $S$ 는 반복회수를 나타내고  $C$ 가 밀도차이나 渦度인 경우에  $S$ 는 시간단계를 나타낸다.

#### 4. 數值實驗結果

수치실험이 적용된 密度流는 堰下流에 있는 調整池로 水平流入되는 경우이다. 그림 1과 같은 수평정지수역으로 유입되는 유체는 受容流體의 수온(15°C)보다 10~2°C 낮고 이에 따른  $Fr_c$ 의 범위는 0.120~5.993 이다.

##### 4.1 流入된 流體의 흐름特性

$Fr_c$ 가 5.993인 경우 유입초기에 유입유체는 陰浮力보다 유체의 운동량의 변화에 의한 dynamic force가 크기 때문에 자유수면과 평행한 방향으로 대부분 이동하며 이동하는 과정에서 일부는 重力(陰浮力)에 의하여 가라 앉는다. 계속 유입되는 유체의 운동량의 변화에 의한 dynamic force 때문에 힘의 평형이 되는 지점까지 수평 흐름이 지속된다. [그림 2(a, b),  $T=0.4$ ] 이러한 수평흐름과 경계를 갖는 수평흐름 아래 水域은 두 흐름 사이의 剪斷에 의하여 순환이 형성되기 시작한다. 이 순환의 중심보다 위에 있는 유체는 주로 유입유체의 운동량의 변화에 의하여, 우측에 있는 유체는 유입운동량이 소멸하여 가라앉은 유체의 음부력에 의한 剪斷의 영향때

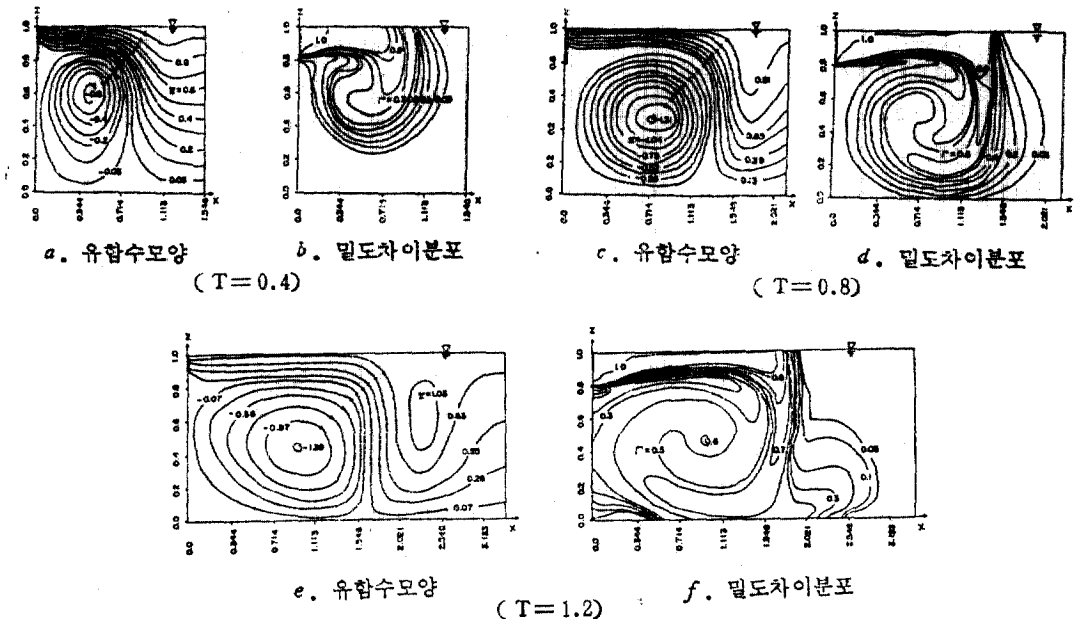


그림 2. 시간의 변화에 따른 유함수모양과 밀도차이분포( $Fr_c=5.993$ )

문이다. 밀도차이분포에서 가장 밖의 등密度線은  $T_0$ 의 5%를 취하였고 모든 계산에서도 이를 기준하였다. 유입흐름이 계속 됨에 따라 유함수 모양과 밀도차이분포는 더 발전하여 plunge point를 중심으로 좌측의 渦가 더 커지게 되고 [그림 2(c),  $T=0.8$ ] 이 때 유함수의 값은  $-1.31$ 이다. (一) 부호는 유체의 흐름방향이 유입유체의 흐름과 반대방향을 의미한다. 또 유선이 plunge point 우측에서 아래쪽으로 만곡되는데 이러한 현상은 다음과 같이 유체의 밀도차이분포에 의하여 설명될 수 있다. 유입유체의 下流방향의 운동량성분은 감소하여 하류방향의 흐름은 감소 내지 약화되는 반면, 유입유체가 계속 유입됨에 따라 plunge point 좌우측에 형성된 渦를 구분하여 생각할 때 밀도가 큰(또는 차가운) 유체가 축적되기 시작하면서 유체의 밀도차이에 의한 중량이 아래(바닥면)로 만곡되기 시작한다. 정지수역내에서 密度流는 혼합과 誘入에 의한 밀도차이가 작아지면서 바닥면에 도달하게 된다. [그림 2(d),  $T=0.8$ ] 흐름이 진행됨에 따라 축적되는 물이 계속 증가하여 이에 따라 유선의 만곡은 [그림 2(e),  $T=1.2$ ]에서와 같이 현저하게 된다.

밀도차이가 증가하여  $Fr_0$ 가 5.993에서 2.119로 감소하면 유입유체는 자유수면과 평행한 下流방향으로 이동하는 것보다 바닥면으로 많이 가라앉으며 이러한 현상에 의하여 流函數모양 [그림 3(a),  $T=0.4$ ]은 plunge point를 기준으로 좌측 上流壁面 부근에서의 순환은  $Fr_0=5.993$

에 비하여 작고 우측에는 좌측보다 큰 규모로 발생하며 밀도차이분포도 예상했던 바와 같이 바닥으로 많이 퍼진 모양을 하고 있다. [그림 3(b),  $T=0.4$ ] 시간이 경과함 [그림 3(c),  $T=1.0$ ]에 따라 渦의 모양은  $Fr_0=5.993$ 인 경우보다 유입되는 유체의 運動量이 작기 때문에 plunge point를 기준으로 좌측보다 우측이 크게 발달되었으며 이 때의 유함수의 값은 1.69이다. 이 값은  $Fr_0=5.993$ 인 경우와 달리 陽의 값이므로 유입유체와 정지수역유체 사이의 剪斷에 의하여 발생하는 흐름이 반시계 방향으로, 회전함을 의미할 뿐만 아니라 유함수값의 증가도 의미한다. 이러한 현상은  $Fr_0=5.993$ 인 경우와 비교했을 때 대조적임을 알 수 있고 밀도차이분포도 下流방향과 바닥으로 많이 퍼진 모양을 나타낸다.

$Fr_0$ 가 0.576인 경우에 유입유체에 의한 운동량은 앞의 두 경우보다 상당히 작고 상대적으로 陰浮力은 크기 때문에 유입유체는 자유수면과 평행한 방향으로 이동하는 것보다 바닥면으로 많이 가라 앉는다. 渦의 형상도 앞의 두 경우와 달리 上流壁面 앞 부근에서만 형성되었고 이 때의 흐름은 거의 sinking plume과 같아 유입초기에 유체가 퍼지는 모양은 重力의 영향이 커서 바닥으로 더 퍼진 형상을 하고 있다. [그림 4(a),  $T=0.2$ ] 유입유체의 밀도차이가 크기 때문에 앞의 두 경우보다 빠른 시간에 head의 형상 [그림 4(b),  $T=0.2$ ]이 나타났고 또 安定 plunge point도 짧은 거리, 유입구에서 수중의

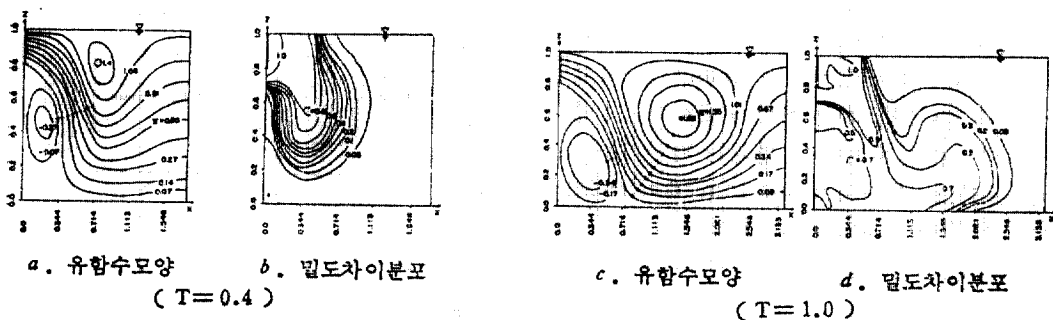


그림 3. 시간변화에 따른 유함수모양과 밀도차이분포( $Fr_0=2.119$ )

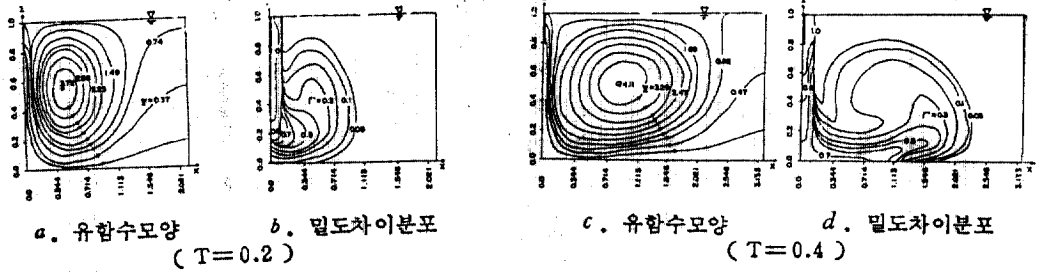


그림 4. 시간변화에 따른 유함수모양과 밀도차이분포( $Fr_e=0.576$ )

0.067 배 되는 지점에서 형성되었다. 시간이 경과함에 따라 유함수의 모양[그림 4(c),  $T=0.4$ ]은 下流방향으로 많이 발달되었고 head 이 높이는 거의 일정하게 유지하면서[그림 4(d),  $T=0.4$ ] 密度流 head의 前面만 下流방향으로 이동한다.

#### 4.2 Plunge point의 最大旅行距離와 前面速度

정지수역으로 유입된 유체의 거동을 유입유체와 정지수역유체의 경계인 자유수면에서 plunge point의 향으로 살펴보면 그림 5에서와 같이  $Fr_e$ 의 크기에 따라 plunge point는 下流로 最大距離[본 연구에서 최대여행거리(maximum travel distance)라 칭함]까지 이동했다가 다시 上流로 돌아와 流入口로부터 일정한 거리에서 유입유체와 정지수역유체 사이에 힘의 평형이 이루어지면서 형성되는 이른바 安定 plunge point에 안주하게 된다. 최대여행거리는  $Fr_e$ 의 증가에 따라 증가함이 나타났으며 이러한 현상은 그림 2, 3, 4에 나타난 plunge point를 기준으로 형성된 유선의 방향과 渦의 위치로 설명될 수 있고 또  $T$ 에 대한 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리( $X_p/d$ )의 변화가 체계적임이 주목된다. 이와같은 체계적인 변화는 다른 3단계 영역인 運動量支配領域(momentum dominated region), 遷移領域(transitional region) 및 浮力支配領域(buoyancy dominated region)으로 구분될 수 있다.

그림 6은 경과된 시간  $T$ 와 流入口에서 密度流前面까지의 무차원거리  $X_f/d$ 의 관계를 표시

한 것이다. 이 때 온도차이는  $5^{\circ}\text{C}$ 로 일정하며  $Fr_e$ 는 1.441, 1.153, 0.865 및 0.576 이고 이에 따른  $q$ 는 총류흐름의 한계유량인  $0.0025\text{m}^3/\text{sec}/\text{m}$ 에서  $0.0005\text{m}^3/\text{sec}/\text{m}$ 씩 감소된다. 그림 6에서 기울기는 밀도류전면의 무차원속도를 나타내며  $Fr_e$ 가 증가할수록 감소함이 나타난다. 즉 밀도나 온도차이가 커짐에 따라 밀도류전면의 속도가 증가하는 것으로 해석될 수 있다. 이 결

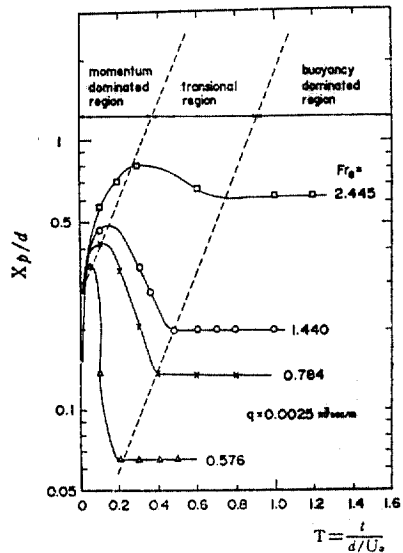


그림 5. 상이한  $Fr_e$ 에 대한 무차원시간( $T = \frac{t}{d/U_0}$ )와 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리( $X_p/d$ )와의 관계



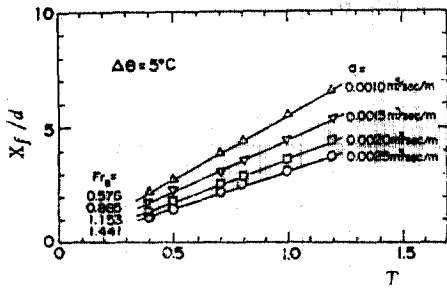


그림 6. 상이한  $Fr_c$ (또는 단위폭당의 유량)에 대한 무차원시간( $T = \frac{t}{d/U_0}$ )와 유입구에서 밀도류전면까지의 무차원거리( $X_f/d$ )와의 관계

과는 浮力流入量(buoyancy flux,  $g'q$ )이 증가함에 따라 密度流前面速度는 감소함을 의미하며 Britter와 Simpson<sup>(3)</sup>이 얻은 실험결과와 일치한다.

그림 7은 일정한 유량  $q=0.0025\text{m}^3/\text{sec}/\text{m}$ 인 경우  $T$ 와  $X_f/d$ 의 관계를 표시한 것으로 온도 차이는  $2^\circ\text{C}$ ,  $5^\circ\text{C}$  및  $10^\circ\text{C}$ 이고 이에 따른  $Fr_c$ 는 5.993, 4.076 및 3.395이다. 그림 5.8에서도 온도(또는 밀도) 차이가 증가( $Fr_c$ 는 감소)하면 밀도류전면속도는 증가함을 알 수 있다.

그림 8은  $Fr_c$ 의 변화에 따른 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리  $X_p/d$ 를 표시한 것

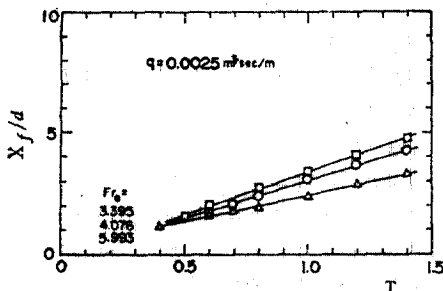


그림 7. 상이한  $Fr_c$ 에 대한 무차원시간( $T = \frac{t}{d/U_0}$ )와 유입구에서 밀도류전면까지의 무차원거리( $X_f/d$ )와의 관계

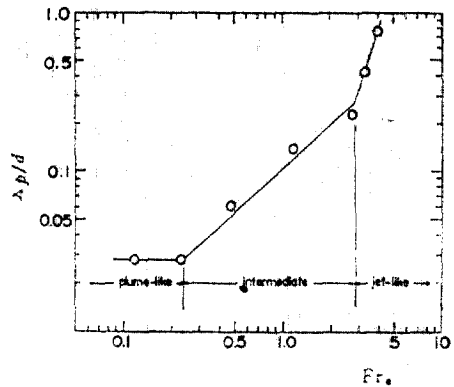
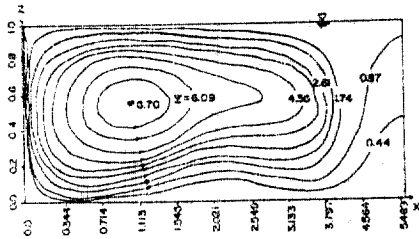


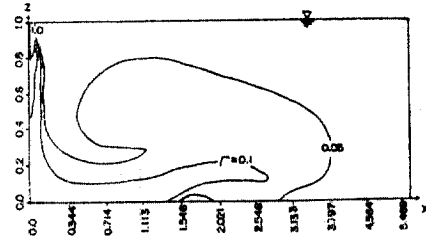
그림 8.  $Fr_c$ 와 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리( $X_p/d$ )와의 관계

이다. 그림 8에서 3가지 흐름구분인 plume-like, intermediate 및 jet-like의 구분은 두 개의 변화는 점과 그림 2, 3 및 8에 나타난 흐름 특성에 의하여 구분한 것이며  $Fr_c=5.993$ 에 대하여  $X_p/d$ 가 표시되지 않은 것은 밀도(또는 온도) 차이가 작기 때문에 시간이 경과하여도 plunge point는 계속 下流로 이동하므로 이에 해당하는  $X_p/d$ 는  $Fr_c=4.083$ 에서 점근선으로 연결하는 것이 타당하다고 사료된다.

밀도(또는 온도)차이가 비교적 큰  $Fr_c=0.12$ 인 경우에는 유입유체에 의한 운동량의 크기는 상당히 작아서 유입유체의 흐름은 자유수면과 평행한 방향보다는 上流壁面을 따라서 발달되면서 바닥면에 이른다. [그림 9(a, b)] 계속 유입되는 유체의 하강되는 흐름에 의한 剪斷으로 유입된 유체는 下流방향으로 이동하며 plunge point를 기준으로 후측에는 상당히 큰 渦가 형성되었고 밀도차이분포는 유입유체와 정지수역유체 사이의 밀도차이가 크나 流入量이 작기 때문에 수용유체와 많이 희석된 상태가 나타난다.  $Fr_c$ 가 증가하여  $Fr_c=2.119$ 나  $5.993$ 인 경우에는 앞의 4.1절에서 나타난 그림 2(a, b),  $T=0.4$ ]와 그림 3[(a, b),  $T=0.4$ ] 또 이에 관하여 기술한 내용과 그림 9에 나타난 것을 기초로 해서 흐름은  $Fr_c \leq 0.24$ 이면 plume-like,  $0.24 < Fr_c < 2.90$ 이면 intermediate 및  $Fr_c \geq 2.9$ 이면 jet-like로 구분할 수 있다.



a. 유함수모양



b. 밀도차이분포

그림 9. 주어진 무차원시간에서  $Fr_c$ 에 대한 유함수모양과 밀도차이분포( $T=0.4$ ,  $Fr_c=0.12$ )

## 5. 結 論

水平靜止水域으로 流入되는 陰浮力흐름으로 인한 密度流의 거동이 數值的으로 解析되었으며 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

수평정지수역에서 plunge 흐름의 모양은 유입 유체와 유입밀도 Froude 수  $Fr_c$ 에 크게 영향을 받는다. 즉  $Fr_c \leq 0.24$ 의 범위에서는 유입구를 떠나면서 즉시 하강하여 陰浮力만이 작용하는 sinking plume 처럼 거동하고  $0.24 < Fr_c < 2.9$ 의 범위에서는 운동량과 음부력이 모두 작용하는 부력줄과 같이  $Fr_c \geq 2.9$ 의 범위에서는 운동량만이 작용하는 질처럼 거동한다.

密度流前面의 속도는  $Fr_c$ 의 감소 즉 陰浮력이 커짐에 따라 증가를 나타낸다. plunge point의 위치는  $Fr_c$ 의 함수이다. 安定 plunge point의 발달과정은 음부력의 유체가 유입됨에 따라 plunge point는 下流로 이동하며 最大旅行距離에 도달하면 다시 上流로 이동하여 安定된 위치에 안주한다. 최대여행거리와 安定 plunge point는 시간과  $Fr_c$ 의 뚜렷한 함수로 주어진다. 음부력을 갖는 유체가 계속 유입됨에 따라 음부력 흐름(또는 plunge point) 좌우에渦가 발달된다.

## 參 考 文 獻

1. Allen, J.D., "Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equation for the Laminar Near Wake in Supersonic Flows", Princeton University, Ph. D. Dissertation, Princeton,

New Jersey, 1968.

2. Anderson, D.A., Tannehill, J.C. and Pletcher, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, 1984.
3. Britter, R.E. and Simpson J.E., Experiment on the Dynamics of a Gravity Current Head, *J. Fluid Mech.*, Vol. 88, Part 2, 1978, pp. 223~240.
4. Kao, T.W., Park, C. and Pao, H.P., Inflow, Density Currents and Fronts., *Physics of Fluids*, 21(11), 1978, pp. 1912~1922.
5. Pao, H.P. and Kao, T.W., Dynamics of Establishment of Selective Withdrawal of a Stratified Fluid, from a Line Sink, Part I, Theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, Part 4, 1974, pp. 657~688.
6. Person, C.E., Computational Method for Viscous Flow Problems *J. Fluid Mech.*, Vol. 21, Part 4, 1965, pp. 612~622.
7. Roache, P.J., "Computational Fluid Dynamics", Hormosa Publishers, 1976.
8. Sills, J.A., Transformations for Infinite Regions and Their Application to Flow Problems, *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 1, Jan., 1969, pp. 117~123.
9. Singh, B. and Shah, C.R., "Plunging Phenomenon of Density Currents in Reservoirs", *LA HOUILLE BLANCHE*, No. 1, 1971, pp. 59~64.
10. Torrance, K.E., "Comparison of Finite-Difference Computations of Natural Convection", *J. Re.N.B.S.B. Math. Sci.* 72-B, 1968, pp. 281~301.

(接受: 1987. 8. 11)