

# 평판구조물의 해석을 위한 개선된 유한요소모델의 개발

## Improved Finite Element Models for Analysis of Plate Structures

崔	楊	根*
Choi,	Chang	Koon
金	善	薰**
Kim,	Sun	Hoon

### Abstract

The applications of reduced integration technique, addition of nonconforming modes, and their coupling to the Mindlin plate elements to improve their basic behavior are reviewed and the establishment of a series of new plate elements by combined use of these schemes are presented in this paper. The element formulation is based upon quadratic Mindlin plate concept. The results obtained by new elements converged to the exact solutions very rapidly as the mesh is refined and showed reliable solutions even for severely distorted meshes. The new elements have the requisite numbers of zero eigenvalues associated with rigid body modes to avoid the spurious zero energy modes. These elements are shown to be applicable to the wide range of plate problems, giving a high accuracy for both thick and thin plates.

### 요 지

본 연구에서는 Mindlin 평판요소의 개선을 위하여 사용되고 있는 감차적분방법과 비적합 변위 형의 추가방법에 대한 재검토가 이루어졌으며, 이 두방법을 혼합 사용하여 개발한 새로운 평판 유한요소가 제시되었다. 요소는 2차 Mindlin 평판이론에 의하여 수식화되었다. 개발된 평판요소를 이용하여 구한 수치해석 결과는 이론치에 매우 빨리 수렴하며, 요소의 찌그러짐(distortion)에 관계없이 신뢰성 있는 결과를 보여주었다. 또한 개발된 요소들은 강제운동(rigid body motion)에 필요한 최소의 zero eigenvalue를 가지며, 두꺼운 평판은 물론 아주 얇은 평판의 해석에서도 항상 좋은 결과를 보여주었다.

### 1. 서 론

최근에 연구되고 있는 평판 유한요소모델의 대부분은 Mindlin<sup>(1)</sup> 이론에 근거를 둔 요소들

이다. 고전적인 Kirchhoff 이론에 의한 요소들은 수식화가 매우 복잡한데 비하여 Mindlin 이론에 의하여 요소를 수식화하는 경우 요소의 수직변위와 회전변위를 각각 독립적으로 근사화할 수 있으므로 사용하는 형상함수(shape function)는  $C^0$  연속성만을 만족하면 된다. 또한 전단변형의 영

\* 정희원 · 한국과학기술원 교수, 토목공학과  
\*\* 정희원 · 한국과학기술원 박사과정, 토목공학과

향이 고려되므로 두꺼운 평판의 해석이 용이하다. 그러나, Mindlin 이론에 의한 평면요소는 정상적분(normal integration)을 사용하여 강성행렬을 구하면 과도한 전단에너지가 발생하게 되며, 따라서 얇은 평판을 해석하는 경우에 정확한 해에 매우 느리게 수렴한다<sup>(1)</sup>.

더우기 전단강성의 계수는 휨강성의 계수에 비하여  $(L/t)^2$  배 이므로 평판의 두께가 매우 얇아짐에 따라 실제와는 다르게 전체 강성을 전단강성이 지배하게 되며, 결과적으로 수치해석 결과는 요소의 수에 관계없이 정확한 해에 수렴하지 못하게 된다. 이러한 현상의 개선을 위하여 감차적분방법(reduced integration technique)<sup>(18,21)</sup>, 비적합 변위형의 추가방법(addition of nonconforming modes)<sup>(3,6)</sup>, hybrid 또는 mixed 방법<sup>(13)</sup> 그리고 substitute shear strain 방법<sup>(9)</sup> 등이 제안되었다.

본 연구에서는 최근에 발표된 감차적분된 비적합 변위형 평판요소<sup>(4,5)</sup>들의 재검토가 수행되었으며, 이 요소들의 문제점을 보완한 새로운 평판요소를 제시하였다. 아울러 본 연구에서 개발된 평판요소의 효율성을 검증하기 위한 수치해석이 수행되었다.

## 2. 감차적분방법(Reduced Integration Technique)

요소의 강성행렬 계산시 감차적분의 사용은 과도한 전단에너지의 발생을 억제시키는 효과를 가져다 준다<sup>(21)</sup>. 그림 1에서 보듯이 2차요소(quadratic element)의 정상적분점인  $\xi = \pm\sqrt{0.6}$ 에서 평가되는 전단 변형을  $\gamma_{xy}$ 는 과도한 반면에, 감차적분점인  $\xi = \pm\sqrt{1/3}$ 에서는 올바른 전단 변형율의 평가가 가능하다<sup>(18)</sup>. 따라서 평판의 두께가 얇아짐에 따라 해석결과가 정확한 해에 수렴하지 못하는 shear locking 현상을 감차적

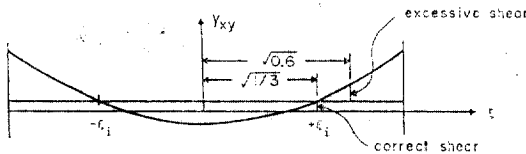


그림 1. Shear strain distribution in quadratic element under linear moment condition.

분방법의 사용으로 일부 해결하였다<sup>(6,18)</sup>.

이와같이 감차적분의 사용은 요소의 정확도를 증가시키면서 강성행렬의 계산시간을 줄이는 두 가지 효과를 가져다 준다<sup>(22)</sup>. 그러나 감차적분 방법을 사용한 평판요소는 또다른 문제점을 발생시킨다. 8절점요소의 경우에는 감차적분의 사용에도 불구하고 shear locking 현상이 여전히 발생한다<sup>(6,18)</sup>. 또한 4절점요소와 9절점요소에서는 감차적분의 사용으로 인하여 spurious zero energy mode가 발생되어 해석결과를 무용화시킬 위험성을 초래한다<sup>(15,17)</sup>.

따라서 spurious zero energy mode의 발생을 제거하기 위하여 일률적인 감차적분 대신에 선택적인 적분을 사용하는 방법이 제안되었다<sup>(10,12)</sup>. 즉 전단강성의 계산은 감차적분을 사용하고, 휨강성의 계산은 정상적분을 사용하는 방법으로써 특히 4절점과 9절점요소에서 이 방법의 많은 적용이 시도되었다<sup>(10,12)</sup>. 그러나 선택적인 적분 방법도 spurious zero energy mode의 발생을 완전히 해결하지 못하였다<sup>(11,17)</sup>.

Cook<sup>(7)</sup>, Hughes<sup>(11)</sup>, Prathap<sup>(17)</sup>, Belytschko<sup>(2)</sup> 등은 감차적분방법이나 선택적인 적분방법에 많은 변형을 추가하여 평판요소에서 발생하는 이러한 문제점들의 해결을 위한 많은 연구논문들을 발표하였다.

## 3. 비적합 변위형의 추가(Addition of Nonconforming Modes)

요소에 발생하는 과도의 전단변형에너지를 제거하는 또다른 방법으로 비적합 변위형의 추가 방법이 Wilson<sup>(20)</sup> 등에 의해 처음 제안되었다. 그림 2와 같이 과도한 전단에너지의 발생으로 휨거동이 억제된 요소에 비적합 변위형을 추가시켜 요소의 억제된 거동을 유연하게 해 주는 것이 이 방법의 기본개념이다.

Choi와 Schnobrich<sup>(6)</sup>는 이 개념을 등매개변수 쉘요소(degenerated shell element)에 적용하여 원래 요소의 거동을 개선시켰으며, 8절점요소에 추가적용이 가능한 다음과 같은 비적합 변위형상함수를 제안하였다(그림 3 참조).

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \\ \bar{N}_3 &= \xi\eta(1-\xi^2) \end{aligned} \quad (1)$$

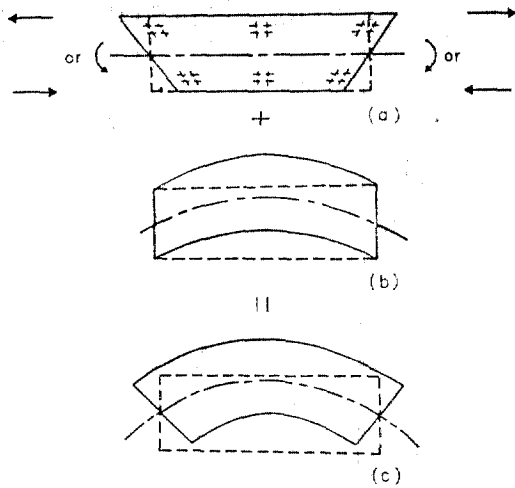


그림 2. Restoring the actual behavior of element. (a) Constrained deformation under pure bending. (b) Addition of nonconforming mode. (c) Combined mode.

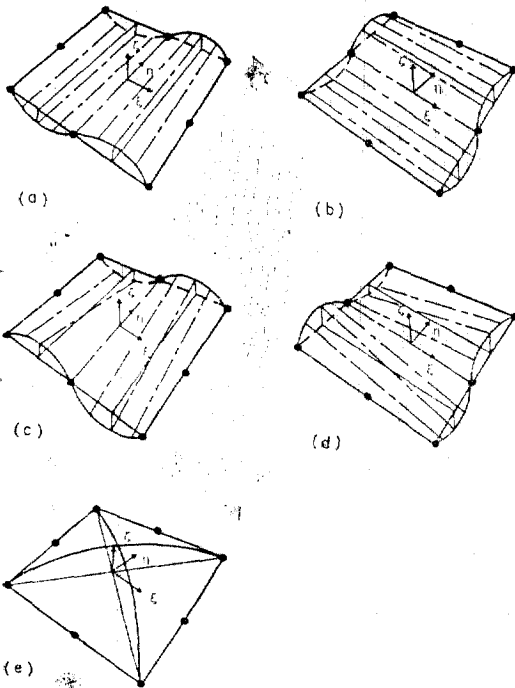


그림 3. Nonconforming displacement modes in quadratic element.

$$N_4 = \xi\eta(1-\eta^2), N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2).$$

식(1)의 비적합 변위형을 원래의 Mindlin 평판 요소의 변위에 추가하면 요소의 변위장(displacement field)은 다음과 같다.

$$\begin{cases} W = \sum N_i W_i + \sum N_j \bar{W}_j \\ \theta_x = \sum N_i \theta_{xi} + \sum N_j \theta_{xj} \\ \theta_y = \sum N_i \theta_{yi} + \sum N_j \theta_{yj} \end{cases} \quad (2)$$

식(2)는 조밀한 형태(Compact form)로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[U] = \sum N_i U_i + \sum N_j \bar{U}_j \quad (3)$$

식(3)에서  $\bar{U}_j$ 는 추가된 비적합 변위형의 자유도로서 외력이 가해질수 없는 변위이다. 비적합 변위형의 추가로 원래의 평판의 힘-변위 관계식은 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \bar{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

비적합 변위형의 추가로 확장된 강성행렬은 static condensation 기법을 사용하면 원래의 평판요소와 같은 차수로 줄어들게 된다.

$$K'U = R \quad (5)$$

$$\text{여기서 } K' = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \quad (5.a)$$

비적합 변위형의 추가는 원래의 평판요소를 개선시키지만 추가적인 계산시간을 필요로 하게 된다. 따라서 요소의 정확도를 크게 떨어뜨리지 않는 한도내에서 비적합 변위형의 추가를 최소화하는 것이 바람직하다. Choi<sup>(9)</sup>는 수직변위에만 비적합 변위형을 추가하는 것이 바람직함을 발표하였다. 그러므로 비적합 변위형이 추가된 Mindlin 평판요소의 변위벡터는 다음과 같이 간략화 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z\theta_x \\ -Z\theta_y \\ W \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} -Z\theta_{xi} \\ -Z\theta_{yi} \\ W_i \end{bmatrix} + \sum N_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{W}_j \end{bmatrix} \quad (6)$$

본 연구에서 개발한 평판요소들의 변위벡터는 식(6)을 바탕으로 하여 근사화하였다.

#### 4. 감차적분방법과 비적합변위형의 추가방법의 혼합사용

##### 4-1. 감차적분된 비적합변위형 요소

앞의 주장에서 언급한 것처럼 감차적분방법과 비적합변위형 방법은 원래의 Mindlin 평판요소의 정확도를 개선시킨다. 본 연구에서는 두 방

법을 혼합사용하여 보다 개선된 평판요소를 개발하고자 하는 것이다. 이와 같이 두 방법의 혼합사용 가능성은 Choi<sup>(4)</sup>에 의해 처음으로 시도되었다.

Choi<sup>(4)</sup>는 식(1)에 나타난 5개의 비적합변위형을 추가하여 강성행렬의 계산시 감차적분을 시도하였다. 그러나 일률적인 감차적분은 singular 행렬을 유발시켰다. 따라서 식(4)에 나타난 부강성행렬들 중에서  $K_{22}$ 에 대해서는 정상적분을 사용하고 나머지 부행렬에 대해서 감차적분을 사용하는 변형된 적분차수를 제안하였다. 그 결과 NC8-4.1과 NC8-5.1로 표시되는 2개의 평판요소가 개발되었다. 이 요소들은 개선된 결과를 보여주었지만, 여전히 아주 얇은 평판문제에서 shear locking 현상을 나타내었다.

비적합변위형중에서  $N_1$ 과  $N_2$ 는  $\xi$ 와  $\eta$ 에 대하여 그 미분치가 모두 감차적분점에서 zero가 되므로 이 두개의 비적합변위형은 감차적분의 적용이 불가능함이 뒤이어 발표되었다<sup>(5)</sup>. 따라서 5개의 비적합변위형중에서  $N_1$ 과  $N_2$ 는 제외시키고,  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$ 의 3개만을 적용한 새로운 평판요소가 발표되었다<sup>(5)</sup>. NC8-A 요소는  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$ 가 추가되었고, NC8-B 요소는  $N_5$ 만이 추가되었으며, 일률적인 감차적분이 사용되었다. NC8-A와 NC8-B 요소는 많은 개선이 이루어졌고, shear locking 현상도 제거되었으나, spurious zero energy mode를 완전히 제거시키지는 못하였다(표 2 참조).

#### 4-2. 선택적분된 비적합변위형 요소

앞에서 검토한 바와 같이 감차적분된 비적합변위형 요소는 shear locking 현상 또는 spurious zero energy mode의 발생이라는 문제점을 여전히 지니고 있음이 발견되었다. 이러한 문제점의 완전한 제거를 위해서 본 연구에서는 일률적인 감차적분 대신 선택적분방법을 비적합변위형 요소에 사용하였다. 즉 Mindlin 평판요소의 전단강성에 관련된 수직변위에만 비적합변위형을 추가하고, spurious zero energy mode의 발생을 방지하기 위하여 전단강성의 계산에는 정상적분을 사용하였다. 그리고 휨강성의 계산은 감차적분을 사용하였다. 따라서 본 연구에서 제시한 평판요소의 변형을 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} B_{bi} \\ B_{si} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} + \sum \begin{bmatrix} O \\ B_{sj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W}_j \\ O \\ O \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서

$$[\varepsilon_b] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7. a)$$

$$[\varepsilon_s] = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (7. b)$$

$$[B_{bi}] = \begin{bmatrix} O & -N_{i,x} & O \\ O & O & -N_{i,y} \\ O & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (7. c)$$

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & -N_i & O \\ N_{i,y} & O & -N_i \end{bmatrix} \quad (7. d)$$

$$[\bar{B}_{sj}] = \begin{bmatrix} \bar{N}_{j,x} & O & O \\ \bar{N}_{j,y} & O & O \end{bmatrix} \quad (7. e)$$

요소의 강성행렬은 다음과 같이 계산한다(괄호안의 수치는 적분차수를 의미한다.)

$$K^e = K^e_{b(2 \times 2)} + K^e_{s(3 \times 3)} \quad (8)$$

여기서

$$K^e_{b(2 \times 2)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_b^T D_b B_b' |J| d\xi d\eta \quad (8. a)$$

$$K^e_{s(3 \times 3)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_s^T D_s B_s' |J| d\xi d\eta \quad (8. b)$$

$$B_b' = [B_b O] \quad (8. c)$$

$$B_s' = [B_s \bar{B}_s] \quad (8. d)$$

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (8. e)$$

$$D_s = \frac{Et}{2\alpha(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8. f)$$

식(7)로 부터 새로운 평판요소가 제시되었다.  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$ 의 3개의 비적합변위형이 추가된 NC8-AS 요소,  $N_5$  변위형이 추가된 NC8-BS 요소,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_5$  변위형이 추가된 NC8-CS 요소, 그리고  $N_1$ - $N_5$ 의 5개의 비적합변위형이 추가된 NC8-DS 요소 등 모두 4개의 요소가 개발되었다. 본 연구에서 개발된 요소들의 효율성과 정확성을 검증하기 위한 몇 가지 수치해석이 수행되었다.

#### 5. 수치해석

수치해석에서 사용되는 몇가지 약어 다음과

표 1. Number of zero eigenvalues for a single unconstrained Mindlin plate element.

Element Name	Number of total zero-eigenvalue	Number of spurious zero-energy mode
QSR	4	1
QLS	4	1
NC8-A	7	4
NC8-B	5	2
NC8-AS	3	0
NC8-BS	3	0
NC8-CS	3	0
NC8-DS	3	0

\* Not communicable in a mesh of two or more elements

같다.

- SS1, SS2 : 단순지지 경계조건
- CL : 고정지지 경계조건
- C, U : 집중하중과 분포하중
- NEL : 요소의 개수

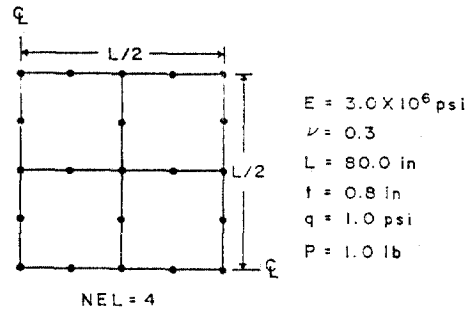


그림 4. Square plate mesh (NEL=4).

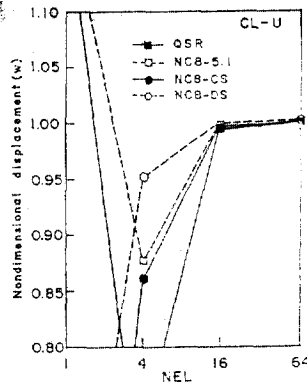
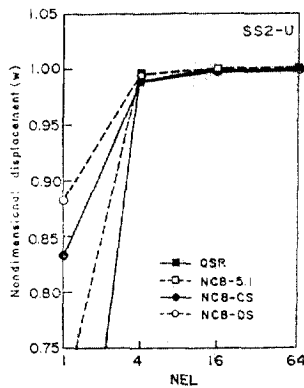


그림 5. Results of the convergence test for thin square plates ( $t/L=10^{-2}$ ).

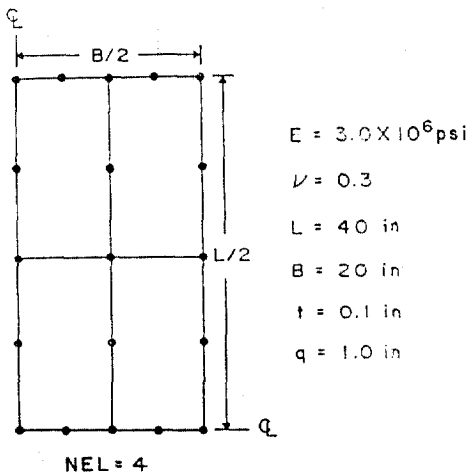


그림 6. Rectangular plate mesh (NEL=4).

### 5-1. 고유치 해석

개발된 평판요소들의 spurious zero energy mode의 유무를 판별하기 위하여 고유치 해석을 수행하였다. 표 1에서 나타난 것처럼 본 연구에서 개발된 4개의 요소들(NC8-AS, NC8-BS, NC8-CS, NC8-DS)은 요소의 강제운동과 관련된 3개의 zero energy mode만을 가지며, 따라서 spurious zero energy mode는 갖고 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 선택적분된 9절점 요소인 QLS<sup>(11,12)</sup>나 감차적분된 8절점요소인 QSR<sup>(18)</sup>, 그리고 일률적인 감차적분이 사용된 비적합변위형 요소인 NC8-A, NC8-B<sup>(5)</sup> 등은 spurious zero energy mode를 가지고 있다.

### 5-2. 수렴도 해석

개발된 요소의 수렴도를 검증하기 위하여 단

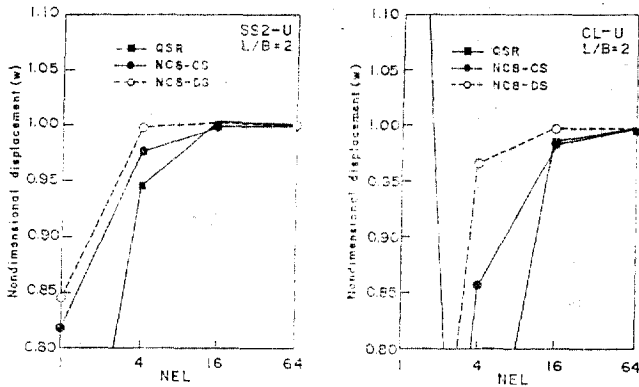


그림 7. Results of the convergence test for thin rectangular plates ( $L/B=2$ ).

### 5-3. 요소의 찌그러짐 Test

요소의 찌그러짐에 대한 민감도를 test 하기 위하여 그림 10 과 같이 단순지지 경계조건을 갖고 분포하중이 재하된 정사각형 평판을 4 개의 요소로 모형화하고  $\theta$  값의 변화에 따른 수치해석을 수행하였다. 표 2 에서 볼수 있듯이 두꺼운 평판의 경우에는 모든 요소들의 해석결과가  $\theta$  값에 큰 영향을 받지 않음을 알수있다. 그러나 얇은 평판의 경우에는 QSR 요소는  $\theta$  값에 상당히 민감한 반면에 본 연구에서 개발된 요소들은 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

### 5-4. Locking test

분포하중이 재하되고 고정지지 경계조건을 갖는 정사각형 평판을 64 개의 요소로 모형화하여 평판의 두께를 변화시켜가면서 수치해석을 수행하였다. 그림 11 에서 나타난 바와 같이 QSR 요소는 두께와 길이의 비가  $10^{-3}$  이하인 경우에는

순지지와 고정지지 경계조건을 갖는 정사각형 평판, 직사각형 평판, 그리고 원형 평판에 대해서 각각 수치해석을 수행하였다. 그림 4 에서 그림 9 까지 해석에 사용된 평판의 형상, 재료 특성, 하중 등이 표시되었으며, 그 해석결과를 보여주고 있다. 해석결과로부터 본 연구에서 개발된 요소들은 평판의 형상이나 경계조건에 관계없이 다른 요소에 비하여 정확한 해<sup>(19)</sup>에 빠르게 수렴하며, 상향 수렴(upper bound convergence)하는 특성을 보여주었다.

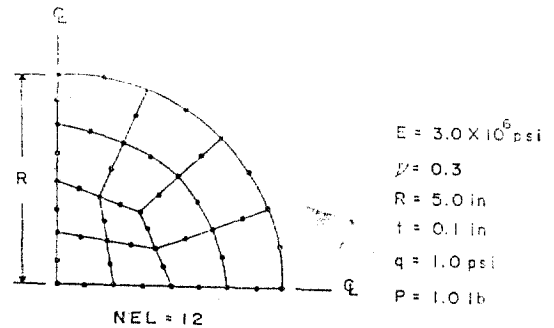


그림 8. Circular plate mesh (NEL=12).

shear locking 이 발생하여 해석결과가 정확한 해로부터 이탈(diverge)하는 반면에 본 연구에서 개발된 요소들의 해석결과는 매우 얇은 평판에 대해서도 shear locking 현상이 발생하지 않음을 알 수 있다.

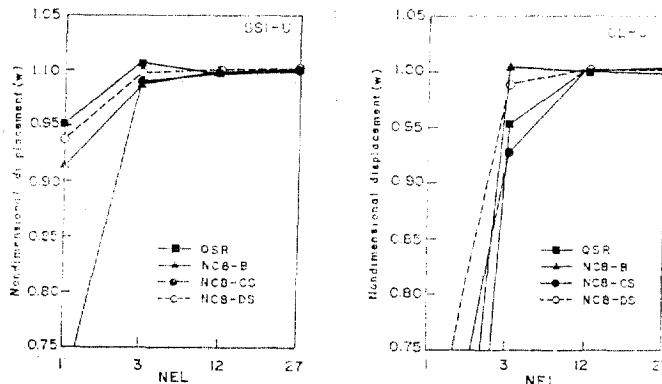


그림 9. Results of the convergence test for thin circular plates ( $R/t=50$ ).

표 2 Central deflections of plate for distortion test.

Case	Thick ( $t/L=10^{-1}$ )				Thin ( $t/L=10^{-2}$ )				
	$\theta$	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°	30°
QSR		1.2435	1.2434	1.2387	1.2312	1.1708	1.1646	1.1112	0.9930
NC8-AS		1.2261	1.2266	1.2250	1.2200	1.1574	1.1560	1.1446	1.1216
NC8-BS		1.2261	1.2263	1.2240	1.2179	1.1574	1.1557	1.1426	1.1137
NC8-CS		1.2325	1.2319	1.2302	1.2261	1.1655	1.1629	1.1503	1.1214
NC8-DS		1.2325	1.2322	1.2314	1.2293	1.1756	1.1735	1.1685	1.1557
Exact[19]		1.2434				1.1830			

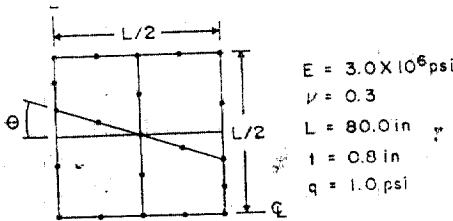


그림 10. Distorted mesh in square plate (NEL=4).

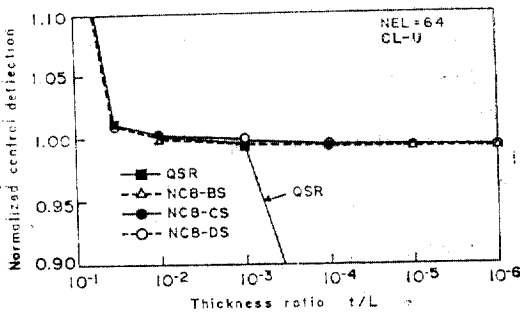


그림 11. Results for locking test.

## 6. 결 론

평판요소의 개선을 위하여 감차적분방법과 비적합변위형의 추가방법을 상호 보완적으로 혼합 사용한 2차의 Mindlin 평판 유한요소가 개발되었다.

개발된 평판요소는 전단강성에 관련된 수직변위에만 비적합변위형을 추가하였고, 전단강성형질의 계산에는 spurious zero energy mode를 피하기 위하여 정상적분을 사용하였으며 휨강성의 계산에는 감차적분을 사용하였다.

본 연구에서 제시된 평판요소들은 수치해석을 통하여 다음과 같은 특징을 보여주었다.

- 1) 다른 요소에 비하여 정확한 해에 비교적 빨리 수렴한다.
- 2) 요소의 수를 증가시키에 따라 이론치에 상향 수렴하는 안정된 해석결과를 보여준다.
- 3) 요소의 강체운동에 필요한 최소의 zero energy mode 만을 가지고 있으므로 spurious zero energy mode는 보여주지 않는다.
- 4) shear locking 현상이 발생되지 않으므로 두꺼운 평판은 물론 아주 얇은 평판의 해석이 가능하다.

## 참 고 문 헌

1. Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 2, pp. 419~451 (1970).
2. Belytschko, T., Tsay, C.S., and Liu, W.K., "A stabilization matrix for the bilinear Mindlin plate element", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 29, pp. 313~327, (1981).
3. Choi, C.K., "A conoidal shell analysis by modified isoparametric element," *Computers and Structures*, Vol. 18, pp. 921~924, (1984).
4. Choi, C.K., "Reduced integrated nonconforming plate element," *J. Eng. Mech.*, Vol. 112, ASCE, pp. 370~385, (1986).
5. Choi, C.K. and Kim, S.H., "Reduced integration, nonconforming modes, and their coupling in finite elements," *Proc. Conf. ICCM86-TOKYO*, (1986).

6. Choi, C.K. and Schnobrich, W.C., "Use of nonconforming modes in finite element analysis of plates and shells," *Civil Eng. Studies, Str. Res. Series*, No. 401, Univ. of Illinois, Urbana, (1973).
7. Cook, R.D., "More on reduced integration and isoparametric elements," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 5, pp. 141~142, (1972).
8. Fezans, G. and Verchery, G., "Some results on the behaviour of degenerated shell (D.S.) elements", *Nuc. Eng. Des.*, Vol. 70, pp. 27~35, (1982).
9. Hinton, E. and Huang, H.C., "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields," *Computers and Structures*, Vol. 23, pp. 409~431, (1986).
10. Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., and Kanoknuchulchai, W., "A simple and efficient finite element for plate bending," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 1529~1543, (1977).
11. Hughes T.J.R. and Cohen, M., "The 'heterosis' finite element for plate bending," *Computers and Structures*, Vol. 9, pp. 445~450, (1978).
12. Hughes, T.J.R., Cohn, M., and Haroun, M., "Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates," *Nuc. Eng. Des.*, Vol. 46, pp. 203~222, (1978).
13. Lee, S.W. and Pian, T.H.H., "Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations," *AIAA J.*, Vol. 16, pp. 29~34, (1978).
14. Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 31~38, (1951).
15. Pawsey, S.F., "Discussion of papers by O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.M. Too and S.F. Pawsey and R.W. Clough," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 4, pp. 449~450, (1972).
16. Pawsey, S.F. and Clough, R.W., "Improved numerical integration of thick shell finite element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 3, pp. 575~586, (1971).
17. Parthap, G. and Viswanath, S., "An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp. 831~840, (1983).
18. Pugh, E.D.L., Hinton, E., and Zienkiewicz, O.C., "A study of quadrilateral plate bending elements with 'reduced' integration," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 12, pp. 1059~1079, (1978).
19. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells," 2nd edition, McGraw-Hill, New York, (1959).
20. Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., and Ghaboussi, J., "Incompatible displacement modes," *ONR Symposium on Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Univ. of Illinois, Urbana, (1971).
21. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., and Too, J. M., "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 3, pp. 275~290, (1971).

(接受: 1987. 8. 27)