

突出誤差의 檢出과 測地網의 信賴度

Outliers Identification and Reliabilities in Geodetic Networks

| | | |
|------|-------|------|
| 李 | 石 | 贊* |
| Lee, | Suck | Chan |
| 高 | 英 | 豪** |
| Kho, | Young | Ho |
| 李 | 榮 | 鎮*** |
| Lee, | Young | Jin |

Abstract

This paper is mainly concerned with the analysis of post-adjustment techniques for the outliers identification and reliabilities in geodetic networks. The proposed strategy which easily attached to a least squares adjustment program, is successfully used in a test network. It shows that their application can considerably improve the quality of the results, but the main advantage appears when their reliability is considered.

要 旨

이 論文은 調整結果의 解析을 통한 突出誤差의 檢出과 測地網의 信賴度에 대한 것으로서 기존의 最小二乗調整 프로그램에 추가되는 方法이 제시되었다. 실제로 테스트망에 적용한 結果로부터 信賴度를 고려해야 하는 문제에 효과적으로 活用할 수 있음을 보여주고 있다.

1. 序 論

誤差의 調整에 관한 지금까지의 연구에서는 過大誤差(gross error)와 定誤差를 調整에 앞서 소거해야 한다^(1,3,26)는 기본 가정이 필요하였으며 대부분 偶然誤差의 處理를 중심으로 다루어 왔다.

實測과 컴퓨터 프로그램에 의한 데이터 處理에서는 경험적인 방법에 의하여 檢査가 가능하

지만 야장정리의 誤記와 편치실수 등은 過大誤差의 원인이 되므로 檢出이 곤란하다. 특히 데이터의 收集과 處理가 자동적으로 이루어 지는 경우에는 測量技術者가 확인할 수 없으므로 突出誤差(outliers)의 포함 가능성을 항상 갖고 있다.

測地網에서의 突出誤差는 크게 측정과정의 過大誤差, 모델식의 부정확에 따른 誤差, 重量의 부정확한 평가에 따른 誤差 등으로 구분되며, 調整結果에는 모든 誤差의 영향이 결합되어 나타나므로 보통 過大誤差의 영향을 중심으로 다루고 있다^(4,5,11). 또한, 測地網의 質은 측량과 관

* 正會員·漢陽大學校 工科大學 教授, 土木工學科

** 正會員·慶南大學校 工科大學 助教授, 土木工學科

*** 正會員·漢陽大學校 大學院 博士課程 土木工學科

리비용에 대한 經濟性, 偶然誤差의 영향을 나타내는 精密度, 그리고 網에서 어떤 크기의 오차가 나타날 확률인 信賴度에 의해 나타낼 수 있다^(17, 21). 여기서 오차타원에 의한 精密度는 구속조건(constraints)에 따라 변화하므로 突出誤差의 檢出과 밀접한 관계에 있는 信賴度에 의한 測地網의 평가방법이 필요하다.

이와 같은 測地網의 質과 突出誤差의 檢出에 대한 연구는 1968년 Baarda가 경험적인 방법으로 시작한 이래, 最小제곱법, 最小分散法, 최소절대법, 변형해석법 등에 의한 연구가 진행되어 왔으며 현재까지는 BLUE(best linear unbiased estimator)인 最小제곱법이 가장 보편적으로 사용되고 있다^(10, 11, 14, 19). 그러나 最小제곱법 자체가 偶然誤差는 물론이고 過大誤差를 포함한 모든 誤差를 분배시키는 방법이므로 突出誤差의 추적이 쉽지 않으며 아직까지도 여러 문제점을 갖고 있다.

이 論文에서는 最小제곱법에 의해 調整計算한 結果를 이용하여 突出誤差를 檢出하고 測地網의 信賴度를 평가하는 한 방법을 제시하고자 한다.

2. 線形모델과 最小제곱법

측지분야에서는 측정값: $l_i (i=1, 2, \dots, n)$ 가 연속 확률벡터인 L 과 다변량 正規分布를 이룬다는 가정하에서 線形모델인 觀測方程式을 다음과 같이 나타내는 것이 보통이다^(13, 17).

$$V + AX = L \quad (1a)$$

$$L \sim N(E\{L\}, \sigma_0^2 Q_1) \quad (1b)$$

여기서 $\sigma_0^2 Q_1$ 은 L 의 分散-共分散행렬, σ_0^2 은 基準分散(reference variance)을 나타내며 측정값의 수 n 이 미지수의 수 u 와 $n \geq u$ 의 관계에 있을 경우에 $E\{L\} = AX$ 가 성립된다.

그러나 過大誤差와 같은 추가의 미지수 X_2 를 포함하는 경우에는 자유도 $r-c$ (r : 식(1a)의 자유도, c : X_2 의 수)인 다음 식(2)로 나타나며, 구속조건이 있을 경우에는 식(3)으로 된다^(4, 12).

$$V + AX_1 + BX_2 = L \quad (2)$$

$$V_c + AX_1 + BX_2 = L \quad (3a)$$

$$C_1^T X_1 + C_2^T X_2 = L_c \quad (3b)$$

이때 식(3)의 구속조건을 $C_1^T = 0$, $C_2^T = I_c = (\delta_i, \delta_j, \dots)$, $L_c = 0$ 로 선택할 수 있으며, 이 식에 의한 조정은 식(1)에 여분의 X_2 를 더하고 다시 그 값들을 구속하게 되므로 자유도 $(r-c)+c=r$ 이 된다. 결국 식(1)의 기본식과 동일한 결과를 갖는다. 여기서 δ_i 는 i 번째의 단위벡터를 말하며, 여러 문헌에서 식(1)의 결과는 다음 값들이 성립함을 보여 준다^(4, 5, 13, 18).

$$\hat{V} = \{I - A(A^T W A)^{-1} A^T W\} L \quad (4)$$

$$Q_V = W^{-1} - A(A^T W A)^{-1} A^T \quad (5)$$

$$Q_L = A(A^T W A)^{-1} A^T = W^{-1} - Q_V \quad (6)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\hat{V}^T W \hat{V}}{r} \quad (7)$$

$$Q_{\hat{V}} = W Q_V W \\ = W - W(A^T W A)^{-1} A^T W \quad (8)$$

$$\bar{V} = W V \quad (9)$$

또한 相關係數(Lagrange correlates)나 幾何解析(geometric interpretation)으로부터 다음 값이 주어진다^(13, 17).

$$V_c^T W V_c - V^T W V = (B^T \bar{V})^T \\ (B^T Q_{\hat{V}} B)^{-1} (B^T \bar{V}) \quad (10)$$

식(5)의 Q_V 는 測地網의 기하학적인 形狀에 관계되는 A 와 측정값의 標準誤差 σ_i 에 관계되는 W 로 구성되어 있으므로 調整過程에서는 변화되지 않음을 알 수 있다⁽¹⁾. 한편 측정값에 偶然誤差와 過大誤差가 함께 포함된 참오차 e 의 영향을 검토하기 위하여 식(4)의 L 대신 $AX_T + e$ 를 대입하면,

$$\hat{V} = \{I - A(A^T W A)^{-1} A^T W\} \{AX_T + e\} \\ = \{I - A(A^T W A)^{-1} A^T W\} e$$

가 되므로 두 誤差를 구분하기가 곤란하며 식(4)의 계수가 singular(附錄 I 참조)이므로 e 를 직접 구할 수 없다. 그러므로 過大誤差를 추적하기 위해서는 殘差의 分布를 이용하여 假說檢定을 실시해야 한다⁽³⁾.

3. 모델分布 및 假說檢定

過大誤差 νl_i 를 포함하고 있는 측정값에는 $\bar{l}_i + \nu l_i$ 를 평균으로 正規分布를 이루고 있다는 가정이 필요하며 다음과 같은 假說을 세울 수 있다.

$$H_0: l_i = \bar{l}_i + e_{ri} \quad (11a)$$

$$H_A: l_i = \bar{l}_i + e_{ri} + \nu l_i \quad (11b)$$

여기서 e_{ri} 는 偶然誤差를 나타내고 있다. 이러한 假說을 檢定하기 위해서는 통계량과 分布가 필요하므로 線形모델에 관한 다음을 적용할 수 있다^(8, 9, 15).

$$E_o = V^T W V \sim \chi_r^2 \cdot \sigma_o^2 \quad (12a)$$

$$E_h = E_c - E_o = (V_c^T W V_c - V^T W V) \sim \chi_c^2 \cdot \sigma_o^2 \quad (12b)$$

여기서 E_o 와 E_h 는 서로 독립이므로 F -분포를 사용하여 다음과 같은 통계량을 나타낼 수 있다. 이때 $f=r-c$ 로서 식 (2)의 자유도이다.

$$T_1 = \frac{E_h}{c \cdot \sigma_o^2} \sim \frac{1}{c} \cdot \chi_c^2 \equiv F_{c, \infty} \quad (13)$$

$$T_2 = \frac{E_h}{c \cdot \sigma_o^2} = \frac{E_h/c}{E_o/f} \sim \frac{\chi_c^2/c}{\chi_f^2/f} \equiv F_{c, f} \quad (14)$$

그러나, 식 (14)의 분모에 $E_c = V_c^T W V_c$ 를 사용할 경우에는 E_c 와 E_h 가 서로 독립이 아니므로 특별한 TAU-분포를 이룬다는 것이 1982년 Pope에 의해 밝혀졌다^(6, 11, 12).

$$T_3 = \frac{E_h/c}{E_c/r} \sim T_{c, r}^2 = \frac{r \cdot F_{c, f}}{f + c \cdot F_{c, f}} \quad (15)$$

식 (13)은 σ_o^2 를 사용하며, 식 (14)와 식 (15)는 $\hat{\sigma}_o^2$ 가 사용되는 점에 큰 차이가 있다. 또 식 (3a)의 B 의 rank가 假說檢定の次元(dimension)을 결정하므로 대립가설 H_A 에서 동시에 여러개의 過大誤差가 내포되어 있는 1次元 假說檢定에서는 B 대신에 열벡터인 b 로 나타낼 수 있다. 이때,

$$\textcircled{1} F_{1, \infty} = \chi_1^2 = N^2(0, 1)$$

$$\textcircled{2} F_{1, r-1} = t_{r-1}^2$$

$$\textcircled{3} T_{1, r}^2 = \tau_r^2$$

의 세 성질을 이용하면 식 (13)~(15)는 다음과 같이 쓸 수 있다^(3, 8, 9, 18, 15).

$$t_1 = \frac{b^T V}{\sigma_o (b^T Q_V b)^{1/2}} \sim N(0, 1) \quad (16)$$

$$t_2 = \frac{(b^T Q_V b)^{1/2} b^T V}{\{V^T W V - V^T b (b^T Q_V b)^{-1} b^T V\}^{1/2}} \cdot (r-1) \sim t_{r-1} \quad (17)$$

$$t_3 = \frac{b^T V}{\hat{\sigma}_o (b^T Q_V b)^{1/2}} \sim \tau_r \quad (18)$$

또한 1次元 檢定에서도 1개의 過大誤差만을 포함하고 있는 경우를 判용적인 檢정(conventional test)이라고 부르며 b 를 $b_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0,$

$\dots, 0)^T$ 로 나타낼 수 있으므로 윗 식 (16)~(18)의 b 를 소거할 수가 있다. 이때 이 방법을 모든 측정값에 반복적으로 적용할 수 있으며 이를 데이터 검색방법(data snooping strategy)이라고 말한다. 그러나 이 식들은 측정값간의 相關關係와 상대적인 重畳을 알아야 사용할 수 있다.

만일 判용적인 檢정하에서 독립측정이 실시되었다고 가정하면 식 (8)과 식 (9)의 Q_V, V 를 식 (16)에 대입하면,

$$t_1 = \frac{b_i^T (W V)}{\sigma_o (b_i^T W Q_V W b_i)^{1/2}} = \frac{V_i}{\sigma_o \cdot \sqrt{Q_{Vi}}} = \frac{V_i}{\sigma_{Vi}} \sim N(0, 1) \quad (19)$$

가 되므로 다음의 조건이 성립된다면 식 (11)의 귀무가설 H_0 가 기각되어야 한다(그림 1. 참조).

$$W_i = \left| \frac{V_i}{\sigma_{Vi}} \right| > \sqrt{F_{1-\alpha_0, 1, \infty}} \equiv N_{1-\alpha_0, 2} \quad (20)$$

이 때의 임계값은 $\alpha_0=0.001$ 에서 3.29, $\alpha_0=0.01$ 에서 2.58, $\alpha_0=0.05$ 에서 1.96이다.

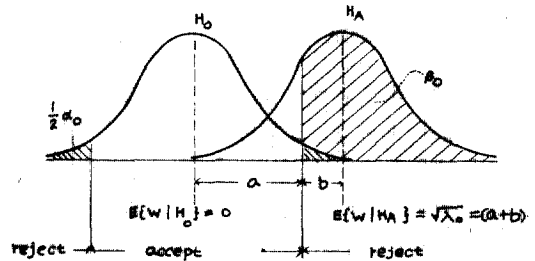


그림 1.

식 (20)을 사용하기 위해서는 σ_o 가 기지여야 하므로 $E\{\sigma_o^2\}=1$ 이라는 사실(증명: 附錄 II 참조)로부터 다음이 만족되면 $\hat{\sigma}_o^2=1$ 의 귀무가설을 채택할 수 있다.

$$F = \hat{\sigma}_o^2 < F_{r, \infty} (\hat{\sigma}_o > 1 \text{의 경우}) \quad (21a)$$

$$F = 1/\hat{\sigma}_o^2 < F_{\infty, r} (\hat{\sigma}_o < 1 \text{의 경우}) \quad (21b)$$

1次元 檢定에서 두 개 이상의 測定값을 기각해야 하는 경우에는 한 개의 過大誤差가 여러殘差에 영향을 미치는 예가 많으므로 Q_V 의 상 判행렬을 구하고 다음이 성립하면 귀무가설 $\hat{\rho}_{ij}=0$ 을 기각한다⁽¹³⁾.

$$|t^*| = \left| \frac{\sqrt{(n-2)} \cdot \hat{\rho}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right| > t_{n-2, 1-\alpha_0, 2} \quad (22)$$

이때의 유의수준 α 는 관용적인 방법의 α_0 를 가져야함으로 Bonferroni의 조건으로부터 $\alpha_0 = \frac{\alpha}{n}$ (n 은 각각되는 측정값의 수)를 사용하면 항상 α_0 보다 낮은 유의수준을 갖는다.

이상에서의 식 (19)의 σ_0 를 사용하는 대신에 식 (18)과 식 (19)와의 관계로부터 $\hat{\sigma}_0$ 을 사용할 수도 있다. 그러나 특수한 τ_r 분포를 형성하기 때문에 아직까지 대립가설 H_A 에서의 성질이 알려져 있지 못하므로 信賴度의 分析에 적용할 수 없는 단점을 안고 있다.

$$t_3 = \left| \frac{V_i}{\hat{\sigma}_{V_i}} \right| \sim \tau_r \quad (23)$$

가설검정을 통한 突出測定값(outlier measurements)의 檢出에서는 이 식이 매우 효과적이며 식 (19)와 식 (23)의 관계로부터 다음식이 성립하므로 식 (20) 대신에 τ_0 를 임의의 상수(예: 4)를 택하여 사용할 수 있다.

$$W_i = \tau_0 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} > N_{1-\alpha_0/2} \quad (24)$$

4. 測地網의 信賴度

일반적인 측지망에서 過大誤差를 檢出하기 위하여 H_A 를 함수로 표현하기란 대단히 어렵기 때문에 관용적인 대립가설 H_{A_i} 를 사용하는 것이 보통이다. 그러면 측정값 l_i 가 有意水準 α_0 를 사용하는 W_i 검정에서 검정력 β_0 로 檢出할 수 있는 최소한의 오차 $|\mathcal{P}l_i|$ 를 구해 보자. 그림 1과 그림 2로부터,

$$\sqrt{\lambda_0} \cong N_{1-\alpha_0/2} + N_{1-\beta_0} = (a+b) \quad (25)$$

이며, 식 (3a)의 過大誤差에 따른 미지수 \hat{X}_2 는 다음 식으로 주어진다⁽¹⁷⁾.

$$\hat{X}_2 = (b^T Q_V b)^{-1} b^T V \quad (26)$$

그러므로 $\hat{\rho}l = b\hat{X}_2$ 이 성립하도록 식 (16)에서 구한 $b^T V$ 를 대입하면,

$$\hat{\rho}l = b \cdot \frac{t_1 \cdot \sigma_0}{(b^T Q_V b)} \quad (27)$$

여기서 t_1 대신에 $\sqrt{\lambda_0}$ 를 대입하면 관용적인 검정에서의 임계값 $|\mathcal{P}l_i|$ 는 다음과 같이 된다.

$$|\mathcal{P}l_i| = \sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{b_i^T (W - WA(A^T WA)^{-1} A^T W) b_i}} \quad (28)$$

아울러 독립측정일 경우에는 측정의 표준오차가 $\sigma_i = \sigma_0 / \sqrt{W_i}$ 인 성질과 식 (5) 및 식 (19)를 적용하면 다음의 최종식을 구할 수 있다.

$$|\mathcal{P}l_i| = \sqrt{\lambda_0} \cdot \sigma_i^2 \cdot \frac{1}{\sigma_{V_i}} \quad (29)$$

이 $|\mathcal{P}l_i|$ 값이 測地網의 內部信賴度(internal reliability)를 나타내며 檢出되지 않는 최대의 過大誤差(the maximum undetected gross error)를 의미한다. 또한, $|\mathcal{P}l_i|$ 가 좌표, 각, 거리, 면적 등의 최종결과에 미치는 영향을 外部信賴度(external reliability)라고 하며, $|\mathcal{P}l_i|$ 가 미지수에 미치는 영향이 작을 경우에는 $|\mathcal{P}l_i|$ 가 무의미하기 때문에 內部信賴度보다는 外部信賴度의 개념이 훨씬 더 중요하다^(3, 4, 5).

外部信賴度는 정의로부터 외형적으로 명료한 다음 식 (30)으로 표현되며, 매 관용적인 대립가설마다 벡터 $\mathcal{P}_i X$ 를 계산해야 하므로 계산량이 많고 크기가 변화한다.

$$\mathcal{P}_i X = (A^T W A)^{-1} A^T W b_i |\mathcal{P}l_i| \quad (30)$$

그러므로 $\mathcal{P}_i X$ 를 표준화하여 불변량인 다음 식을 外部信賴度의 尺度로 사용할 수 있다.

$$\sqrt{\lambda_{0,i}} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_i X^T (A^T W A)^{-1} \mathcal{P}_i X}{\sigma_0}} \quad (31)$$

식 (29)와 식 (31)의 값이 한 測地網 내에서는 비슷해야 좋은은 명확하다.

식 (28)에서 σ_0 를 구하고 식 (30)을 뒷 식에 대입하면,

$$\sqrt{\lambda_{0,i}} = \sqrt{\frac{b_i^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W b_i}{b_i^T W Q_V W b_i}} \cdot \sqrt{\lambda_0} \quad (32)$$

이때 Q_V 의 대각선 요소를 $\sigma_{V_i}^2$, Q_i 의 대각선 요소를 σ_i^2 라고 하면 독립측정일 경우에 W 도 대각선 행렬이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sqrt{\lambda_{0,i}} = \frac{\sigma_{l_i}}{\sigma_{V_i}} \sqrt{\lambda_0} \quad (33)$$

또한 $|\mathcal{P}l_i|$ 가 임의의 선형함수 $F = f^T X$ 에 미치는 영향을 $\mathcal{P}_i F = f^T V_i X$ 로 나타낼 수 있으므로 여기에 Cauchy-Schwarz inequality를 적용하면 다음 식이 성립한다^(6, 17).

$$\mathcal{P}_i F \leq \sigma_F \sqrt{\lambda_{0,i}} \quad (34)$$

$$\mathcal{P}_i F \leq \sigma_F \cdot \frac{\sigma_{l_i}}{\sigma_{V_i}} \cdot \sqrt{\lambda_0} \quad (35)$$

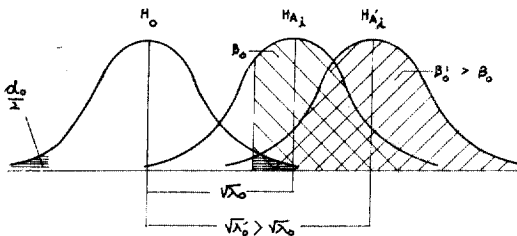


그림 2

이때 σ_i 는 측정의 표준오차 σ_i 의 추정값이므로 식 (6)을 이용할 수 있다.

$$\frac{\sigma_{i_i}^2}{\sigma_{V_i}^2} = \frac{\sigma_i^2 - \sigma_{V_i}^2}{\sigma_{V_i}^2} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_{V_i}^2} - 1 \quad (36)$$

즉, σ_i 의 추가계산이 필요없게 된다. 식 (29), (33), (36)은 測地網의 解析에 효과적으로 이용할 수 있다. 특히 식 (32)나 식 (33)의 $\sqrt{\lambda_{0,i}}$ 는 실제의 측정과는 무관한 測地網의 形에 관계되므로 設計에 효과적으로 이용할 수 있다.

5. 電算處理의 方法

測地網에 내재되어 있는 突出誤差를 檢出하고

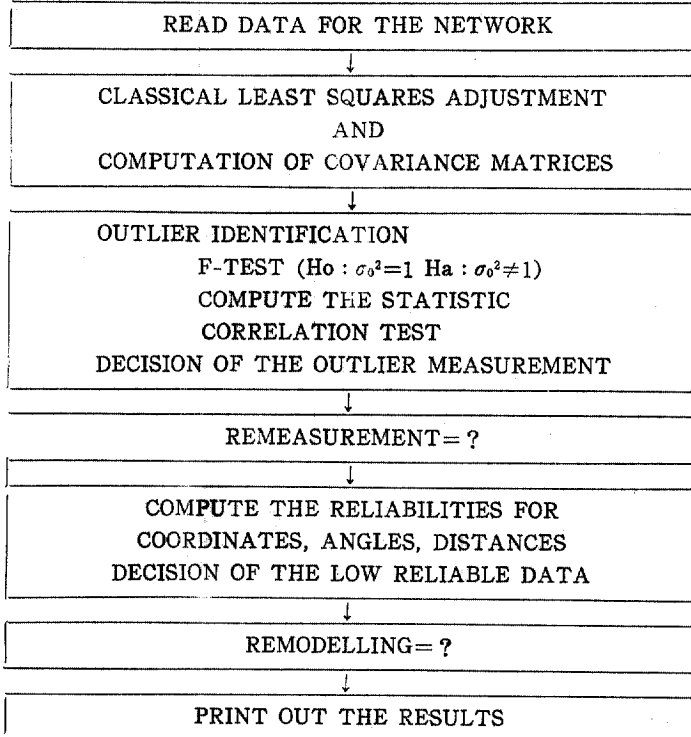


그림 3. 전산 처리도

그 信賴度를 計算하기 위하여 작성한 프로그램의 흐름도를 그림 3에 보여주고 있다. 이 프로그램은 기존의 最小제곱법에 의한 調整計算 프로그램⁽²⁰⁾에 별도의 연산을 추가하는 것으로써 調整結果의 해석방법을 적용하고 있다.

突出誤差의 檢出에서는 $E\{\theta_0\}=1$ 의 성질을 이용한 W_i 검정을 하고 있으며 여러 突出測定값이 나타나는 경우에는 相關分析을 통한 t^* 검정을 실시하도록 되어 있다.

최종단계로는 測地網의 信賴度를 계산하여 신뢰성이 낮은 座標 등이 확인될 수 있도록 되어 있다.

6. 適用 및 考察

테스트를 위한 測地網은 그림 4에서와 같이 2개의 고정점과 6개의 미지점을 포함하는 19개의 측선으로 구성된 시뮬레이션 삼변망이다. 이 網은 측정변장의 標準誤차가 $\sigma_i=0.020$ m로 모두 동일하며 독립측정한 것으로 가정하였다. 평균변장은 약 2.9 km이다.

표 1. 통계량과 신뢰도의 계산(단위 m)

| LINE | ADJUSTED LENGTH | RESIDUAL | σ_i | σ_v | W_i | $ r_i $ | $\sqrt{\lambda_{\sigma,i}}$ |
|------|-----------------|----------|------------|------------|-------|---------|-----------------------------|
| B-F | 3031.910 | -0.007 | 0.013 | 0.015 | 0.48 | 0.08 | 2.8 |
| C-D | 3495.475 | 0.002 | 0.018 | 0.009 | 0.22 | 0.15 | 6.9 |
| B-D | 3137.610 | -0.010 | 0.016 | 0.012 | 0.80 | 0.10 | 4.1 |
| B-H | 4598.618 | -0.004 | 0.014 | 0.014 | 0.27 | 0.09 | 3.1 |
| B-C | 1099.260 | -0.003 | 0.016 | 0.013 | 0.22 | 0.10 | 4.0 |
| A-B | 1635.334 | -0.007 | 0.015 | 0.013 | 0.57 | 0.10 | 3.9 |
| D-H | 3944.656 | -0.008 | 0.017 | 0.011 | 0.70 | 0.12 | 4.8 |
| F-H | 1744.516 | -0.004 | 0.017 | 0.011 | 0.41 | 0.12 | 5.0 |
| G-D | 3743.785 | -0.008 | 0.016 | 0.012 | 0.53 | 0.11 | 4.3 |
| D-F | 3516.244 | -0.006 | 0.013 | 0.015 | 0.40 | 0.08 | 2.6 |
| F-D | 3516.244 | 0.005 | 0.013 | 0.015 | 0.33 | 0.08 | 2.6 |
| A-F | 4300.756 | 0.009 | 0.012 | 0.016 | 0.58 | 0.08 | 2.5 |
| F-G | 4130.588 | 0.005 | 0.015 | 0.013 | 0.35 | 0.10 | 3.7 |
| D-E | 1446.898 | 0.008 | 0.015 | 0.013 | 2.20* | 0.10 | 3.8 |
| B-E | 1939.642 | 0.019 | 0.018 | 0.008 | 2.20* | 0.15 | 7.0* |
| F-E | 2293.938 | 0.021 | 0.018 | 0.010 | 2.20* | 0.13 | 5.9 |
| C-G | 2098.556 | 0.000 | 0.016 | 0.012 | 0.03 | 0.11 | 4.2 |
| A-D | 2789.015 | -0.001 | 0.015 | 0.014 | 0.06 | 0.10 | 3.4 |
| A-G | 1308.383 | 0.007 | 0.017 | 0.010 | 0.66 | 0.13 | 5.4 |
| C-F | 2154.827 | -0.002 | 0.015 | 0.013 | 0.17 | 0.10 | 4.0 |

19 개의 변장 모두를 이용하여 조정계산할 결과로부터 $\sigma_0=0.830$ 이므로 F 점경하면,

$$\frac{1}{\sigma_0^2} = 1.45 < F_{0.05, 19, 7} = 3.23$$

가 성립하여 $\sigma_0^2=1$ 로 볼 수 있다. 또 $\max(W_i) = 2.20$ 이므로 $\alpha_0=0.001$ 인 경우의 3.29 보다 작기 때문에 식 (11a)의 귀무가설을 채택한다(표 1 참조).

그러나 $\alpha_0=0.05$ 를 사용하는 경우에는 1.96 보다 큰 값이 DE, BE, FE 세 측선에 나타나므로 상관관계의 해석을 필요로 한다. 여기서는 밀접한 상관관계가 존재하므로 최대의 W_i 인 측선을 기각해야 한다. 이때 세 측선이 모두 E 점에 관계되므로 E 점에 편심오차의 포함 가능성이 있다. 그러므로 자유도가 낮은 測地網에서는 재측비용 등을 고려한 후 폐기여부를 결정해야 한다.

최종적으로 内部信賴도와 外部信賴도의 尺度를 식 (29)와 식 (33)으로부터 구할 수 있으며 이 결과는 그림 4에 함께 나타냈다.

이상의 과정과는 별도로 外部信賴도의 尺度를

고찰하기 위하여 CG, AG, AD, CF 측선을 각 경우별로 소거하고 調整計算을 실시하였다.

표 2에서는 각 경우별 $\sqrt{\lambda_{\sigma,i}}$ 값의 변화를 보여 준다. 전 측선을 사용하는 경우에는 2.8~7.0으로 모두 10 보다 작은 값을 갖고 있다.

그러나 CF 측선만을 제외한 경우에는 CD 측선의 $\sqrt{\lambda_{\sigma,i}}$ 값이 18.7이므로 보완이 필요함을 알 수 있으며, CG 와 CF 두 측선을 제외할 경우에는 C 점에 두 측선 CB 와 CD 만이 결합되

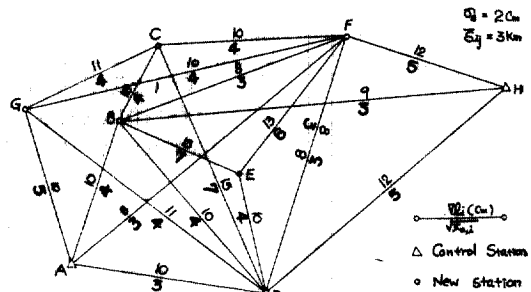


그림 4. 테스트망

표 2. 축선의 소거에 따른 $\sqrt{\lambda_{0,i}}$ 값의 변화

| LINE | ALL LINES | DELETED LINES | | | | | | REMARKS |
|------|-----------|---------------|----------|------------|------------|------------|----------------|--|
| | | CF | CF, CG | CF, CG, AG | CF, CG, AD | CF, AD, AG | CF, CG, AG, AD | |
| B-F | 2.8 | 3.0 | 3.4 | 3.6 | 3.4 | 3.1 | 3.8 | $\alpha_0=0.05$ $\beta_0=0.90$ $\sqrt{\lambda_0}=3.24$ ∞ : unknown value |
| C-D | 6.9 | 18.7 | ∞ | ∞ | ∞ | 20.8 | ∞ | |
| B-D | 4.1 | 4.3 | 4.4 | 4.7 | 4.9 | 6.0 | 7.4 | |
| B-H | 3.1 | 3.2 | 3.2 | 3.2 | 3.6 | 3.8 | 4.1 | |
| B-C | 4.0 | 4.8 | ∞ | ∞ | ∞ | 5.6 | ∞ | |
| A-B | 3.9 | 4.0 | 4.6 | 5.1 | 5.2 | 12.2 | 12.6 | |
| D-H | 4.8 | 4.9 | 4.9 | 4.9 | 6.4 | 7.5 | 7.5 | |
| F-H | 5.0 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.5 | 5.5 | 5.6 | |
| G-D | 4.3 | 4.4 | 4.4 | ∞ | 6.2 | 23.5 | ∞ | |
| D-F | 2.6 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | |
| F-D | 2.6 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | |
| A-F | 2.5 | 2.6 | 2.6 | 2.8 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | |
| F-G | 3.7 | 4.9 | 8.8 | ∞ | 11.4 | 5.3 | ∞ | |
| D-E | 3.8 | 3.9 | 6.0 | 3.9 | 3.9 | 3.9 | 3.9 | |
| B-E | 7.0 | 7.0 | 7.0 | 7.0 | 7.0 | 7.0 | 7.1 | |
| F-E | 5.9 | 5.9 | 5.9 | 5.9 | 5.9 | 6.0 | 6.0 | |
| C-G | 4.2 | 5.6 | — | — | — | 6.4 | — | |
| A-D | 3.4 | 3.5 | 3.6 | 5.2 | — | — | — | |
| A-G | 5.4 | 5.5 | 6.1 | — | 8.1 | — | — | |
| C-F | 4.0 | — | — | — | — | — | — | |

므로 신뢰도 분석이 곤란함을 보여 준다. 특히 이 경우는 두 축선의 축정에 대한 V_i 와 σ_{vi} 가 모두 0이므로 오차타원이 작게 형성될지라도 위치결정방법 자체를 신뢰할 수 없게 된다.

또한 CF, CG, AG 외 세 축선을 제외한 경우에는 C점과 G점에 결합되는 축선에 문제가 되고 있으며, CF, AD, AG를 제외한 網에서는 고정점인 A에서도 문제점이 나타남을 잘 보여 주고 있다.

결과적으로 網의 形狀과 강도가 변화함에 따라 $\sqrt{\lambda_{0,i}}$ 가 外部信賴度の 尺度로 사용할 수 있음을 보여 준다.

이상의 과정을 반대로 하면 축선을 추가시킬 수도 있으므로 $\sqrt{\lambda_{0,i}}$ 가 測地網의 設計나 信賴度解析에서 대단히 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

7. 結 論

測地網을 調整計算한 결과에는 모든 觀差의

영향이 결합되어 나타나므로 突出誤差의 檢出에는 假脫檢定이 필요하며, 이 문제는 信賴度 分析과 직접 관련되기 때문에 測地網의 質을 평가하고자 할 때 대단히 중요하다. 본 연구에서는 최소제곱법을 이용한 調整結果로부터 일련의 處理方法을 제시하였으며, 테스트망을 통하여 適用성을 검토하고 있다. 그러나 σ_0^2 이나 σ_0^2 의 선택에 따라 통계량의 分布가 다르고 일반적인 測地網의 자유도가 낮으므로 적용에 주의가 필요하다. 앞으로 測地網의 設計와 解析을 위한 $\sqrt{\lambda_{0,i}}$ 의 특성, 그리고 $\sigma_0^2 \neq 1$ 경우의 적용방법과 α_0, β_0 의 선택에 따른 검토가 이루어져야 할 것이다.

參 考 文 獻

1. Amer, FAAF, "Theoretical Reliability of Elementary Photogrammetric Procedures(part. 1)", *ITC Journal* 1981-3, pp. 278~307.
2. Bomford, G., *Geodesy(4th. ed.)*, Oxford, 1980.

pp. 711~713.

3. Cross, P.A. and D.R. Price, "A Strategy for the Detection of Single and Multiple Gross Errors in Geodetic Networks", *presented paper to 8th U.K. Geophysical Assembly*, Newcastle, 1984.
4. Cross, P.A., "Advanced Least Squares Applied to Position-Fixing", *North East London Polytechnic*, WP-6, 1983.
5. Förstner, W., "On Internal and External Reliability of Photogrammetric Coordinates", *proc. of ASP 1979 Annual Meeting*, pp. 294~310.
6. Grün, A., "The Accuracy Potential of the Modern Bundle Block Adjustment in Aerial Photogrammetry", *PE&RS*, 1982, Vol. 48 No. 1, pp. 45~54.
7. Gründig, L. and J. Bahndorf, "Accuracy and Reliability in Geodetic Networks-Program System OPTUN", *Journal of Surveying Engineering (ASCE)*, Vol. 110 No. 2, 1984, pp. 133~145.
8. Hogg, R.V. and A.T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics(4th ed.)*, Macmillan, 1983.
9. Hogg, R.V. and E.A. Tanis, *Probability and Statistical Inference(2nd ed.)*, Macmillan, 1983.
10. Jeyapalan, K., "Data Snooping Using Observations and Parameters with Constraints", *Survey Review*, Vol. 28 No. 217, 1985, pp. 163~168.
11. Kavouras, M., "On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks", *UNB Technical Report No. 87*, 1982.
12. Kok, J.J., "Statistical Analysis of Deformation Problems Using BAARDA's Testing Procedures", *Forty Years of Thought(Vol. 2)*, Delft, 1982. pp. 469~488.
13. Mikhail, E.M., *Observations and Least Squares*, Harper & Row, 1976, chap. 1, 9, 11.
14. Molenaar, M., "What a Future Photogrammetrist Should Know About Statistics and Adjustment", *ITC Journal* 1980-3, pp. 535~543.
15. Spiegel, M.R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics*, Mcgraw-hill, 1980.
16. Staff of the Geodetic Computing Center, "The

Delft Approach for the Design and Computation of Geodetic Networks", *Forty Years of Thought(Vol. 1)*, Delft, 1982, pp. 202~274.

17. Teunissen, P.J.G., "Quality Control in Geodetic Networks", *proc. of International School of Advanced Geodesy 3rd Course on Optimization and Design of Geodetic Networks*, Erice Italy, 1984.
18. Vanicek, P. and E.J. Krakiwsky, *Geodesy: The Concepts*, North-Holland, 1982. chap. 13.
19. Vanicek, P., K. Thapa and D. Schneider, "The Use of Strain to Identify Incompatible Observations and Constraints in Horizontal Geodetic Networks", *Manuscripta Geodetica*, Vol. 6, 1981. pp. 257~281.
20. Wolf, P., *Adjustment Computations(2nd ed.)*, P.B.L. Publishing Co., 1980, pp. 138~141.
21. 白殷基, 李榮鎮, 崔允秀, "經緯度 座標 φ, λ 에 의한 測地網의 同時調整", *大韓土木學會論文集*, 第 5 卷, 第 4 號, 1985, pp. 121~127.

附錄 I. $M=Q_V W$ 의 性質

$M=Q_V W=I-A(A^T W A)^{-1} A^T W$ 는 $MM=M$ 의 관계에 있으므로 idempotent 행렬이며 이 M 과 $W=I$ 일 경우의 Q_V 에 대하여 다음의 중요한 특성을 갖는다 (1, 3, 11, 13).

1. M 은 정사각행렬이며 대칭행렬이다.
2. $\text{rank}(M)=T_r(M)=r$
3. $M \neq I$ 이고 $\text{rank}(M) < \text{order}(M) = n$ 이므로 M 은 singular 이다.
4. 두번째의 항 $J=A(A^T W A)^{-1} A^T W$ 도 idempotent 행렬이며 $\text{rank}(J)=u$ 이다.
5. m_{ij} 가 M 의 요소일 때 ① $0 \leq m_{ii} \leq 1$, ② $0 \leq m_{ij} < m_{ii} m_{jj}$, ③ $m_{ii} = \sum_{j=1}^n m_{ij} = \sum_{j=1}^n m_{ji}$ 가 성립한다.
6. $W=I$ 일 경우에는 $0 \leq m_{ij} \leq 0.5$ 가 성립한다.
7. M 의 eigenvector 는 u 개의 0 과 r 개의 1 값을 갖는다.
8. $M^T = W M W^{-1}$, $M^T W M = W M$ 의 관계가 있다.

附錄 II. $E\{\hat{\sigma}_0^2\}=1$ 의 증명

$E\{\hat{\sigma}_0^2\}=1$ 에 대한 증명은 아래와 같이 할 수 있다 (2, 4, 8, 13). 측정시의 참오차물 \mathcal{P} , 최소제곱 추정값의 참오차물 $\delta \hat{X}$ 라고 할 때 다음의 관측방정식이 성립한다.

$$A(\hat{X} + \delta\hat{X}) = L + \mathcal{P} \quad (\text{II.1})$$

$$(A\hat{X} - L) + A\delta\hat{X} = \mathcal{P} \quad (\text{II.2})$$

이때 $A\hat{X} - L = \hat{V}$ 이므로 양변에 $\hat{V}^T W$ 를 곱하면,

$$\hat{V}^T W \hat{V} + \hat{V}^T W A \delta\hat{X} = \hat{V}^T W \mathcal{P} \quad (\text{II.3})$$

또 (II.2)의 양변에 $\mathcal{P}^T W$ 를 곱하면,

$$\mathcal{P}^T W \hat{V} + \mathcal{P}^T W A \delta\hat{X} = \mathcal{P}^T W \mathcal{P} \quad (\text{II.4})$$

가 된다. 식 (II.3)에서 $V^T W A = 0$ 임이 알려져 있으므로 정리하면 $\hat{V}^T W \hat{V} = \hat{V}^T W \mathcal{P} = \mathcal{P}^T W \hat{V}$ 가 되므로 식 (II.4)의 양변에 기대값을 취하면 다음과 같이 된다.

$$E\{\hat{V}^T W \hat{V}\} = E\{\mathcal{P}^T W \mathcal{P}\} - E\{\mathcal{P}^T W A \delta\hat{X}\} \quad (\text{II.5})$$

이 식에서 $\delta\hat{X} = (A^T W A)^{-1} A^T W \mathcal{P}$ 가 성립하는 사실이 알려져 있으므로 quadratic form 에서 B 가 대칭행렬일 때 $y^T B y = Tr(y y^T B)$ 가 성립되는 성질을 이용할

수 있다. 즉

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^T W A \delta\hat{X} &= \mathcal{P}^T W A (A^T W A)^{-1} A^T W \mathcal{P} \\ &= Tr[A^T W \mathcal{P} \mathcal{P}^T W A (A^T W A)^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

또한 $E\{W \mathcal{P} \mathcal{P}^T\} = I$ 이므로 식 (II.6)의 기대값은,

$$\begin{aligned} E\{\mathcal{P}^T W A \delta\hat{X}\} &= Tr[A^T W A (A^T W A)^{-1}] \\ &= Tr(I) \\ &= u \text{ (미지수의 수)} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$E\{\mathcal{P}^T W \mathcal{P}\} = n \text{ (측정의 수)} \quad (\text{II.8})$$

그러므로 식 (II.6)의 우변은 $(n-u)$ 가 되므로 다음 식을 만족한다.

$$E\{\delta_0^2\} = E\left\{\frac{\hat{V}^T W \hat{V}}{n-u}\right\} = 1 \quad (\text{II.9})$$

(接受: 1986. 10. 25)