

面方向 高次變位를 考慮한 平板 有限要素모델

Plate Bending Finite Element Model Using Higher-order Inplane Displacement Profile

申	鉉	默*
Shin,	Hyun	Mook
申	英	澁**
Shin,	Young	Shik
金	亨	烈***
Kim,	Hyeong	Yeol

Abstract

An efficient plate bending finite element has been developed using higher-order inplane displacement profiles of the plate. The 6-noded, 21-d.o.f. triangular element including shear deformation effect has been derived from the plate-like continuum by the Galerkin's weighted residual method. Square plate examples were tested with selected element meshes and several aspect ratios for their static behavior under uniformly distributed load. The result of the example tests indicated consistently good performance of the present higher-order plate bending element in comparison with the thin and thick plate solution and other existing finite element solutions.

要 旨

本 研究에서는 面內 高次 水平變位를 考慮한 6 節點 21 自由度를 갖는 板 有限要素를 Galerkin 加重殘差法으로 3次元 連續體로부터 誘導하고 있다. 要素의 剛性行列과 質量行列은 板의 運動 方程式을 離散化(discretization)하여 (3×3) Gauss 積分點을 利用한 減次 積分을 遂行하여 구하였다. 本 高次 板 有限要素의 正確度와 效率性을 考察하기 위하여 여러가지 境界條件을 갖는 正 四角形 板의 처짐解析을 遂行한 結果, 板의 두께에 關係없이 越等한 正確度를 나타내었다.

1. 序 論

一般的으로 힘을 받는 板의 古典理論은 다음과 같은 Kirchhoff의 假定에 바탕을 두고있다.

첫째, 板의 中立面에서의 面方向 變形은 무시한다. 둘째, 板의 中立面에 垂直인 斷面은 變形後에도 垂直을 이룬다. 셋째, 板의 中立面에 垂直인 鉛直應力은 무시한다. 그러나 板의 두께가 두꺼워지면 剪斷變形的 影響으로 板의 中立面에 垂直인 斷面은 變形後에는 垂直을 이루지 않으며 板의 中立面에 垂直인 鉛直應力이 重要하게

* 正會員·成均館大學校 工科大学 教授, 土木工學科

** 正會員·嶺南大學校 工科大学 助教授, 土木工學科

*** 正會員·成均館大學校 大學院 碩士過程, 土木工學科

된다. 따라서 Kirchhoff의 古典的 假定에 바탕을 두고 있는 梁理論으로 두꺼운 板을 解析하는 것은 부적당하다. 그러므로 두꺼운 板의 靜的 처짐解析이나 動的 荷重에 대한 振動解析에서는 剪斷變形과 回轉慣性의 影響을 考慮하여야 한다.

剪斷變形과 回轉慣性을 考慮한 Mindlin 板理論에 의한 解는 두꺼운 板의 靜的 解析에서는 비교적 正確하지만 板의 動的 解析에서는 後期 모드(mode)에서 正確하지 못한 結果를 보여주고 있다⁽¹¹⁾. 이는 Mindlin 板理論도 Timoshenko 理論과 마찬가지로 板의 임의 斷面에서 剪斷變形率의 分布를 板의 두께에 대하여 線型으로 假定하고 있으므로 板全體의 剪斷變形에너지에 斷面의 뒹(warping) 影響을 正確하게 포함하지 못하고 있기 때문이며 斷面의 뒹 影響을 효과적으로 考慮하기 위하여 剪斷係數(shear coefficient)를 使用하고 있다.

따라서 本 研究에서는 板의 面內 水平變位를 高次 函數로 假定하여 板의 中立面에 垂直인 斷面에서의 剪斷變形率의 分布를 실제 變形形狀에 가깝도록 하므로써 板의 두께에 관계없이 使用할 수 있는 正確한 板 有限要素를 degeneration 技法^(2, 9, 18)에 의해서 3次元 連續體로부터 誘導하였다. 本 高次 板 要素의 剛性行列과 質量行列은 Galerkin 加重殘差法(weighted residual method)으로 連續體 運動方程式을 離散化하여 誘導하였으며 數值積分時 shear-locking 現象을 피하기 위하여 Gauss quadrature를 利用한 減次積分(reduced integration)을 遂行하였다. 여러가지 境界條件을 갖는 正四角形 板의 靜的 처짐解析을 통하여 結果를 考察하였다.

2. 高次 板 有限要素의 誘導

2.1 板 連續體 運動方程式

彈性的으로 거동을 하는 板 連續體의 運動方程式과 境界條件式을 텐서(tensor)로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j = 0 \quad \text{in } B \quad (1)$$

$$n_j \sigma_{ij} - T_j = 0 \quad \text{on } \partial B \quad (2)$$

여기서 ρ 는 質量密度(mass density), \ddot{u}_j 는 加速度(acceleration), b_j 는 體力벡터(body force

vector), σ_{ij} 는 應力텐서(stress tensor), u_i 는 變形표면에 작용하는 단위힘선벡터, B 는 變形된 物體(deformed body), ∂B 는 物體 B 의 境界표면(boundary surface) 그리고 T_j 는 ∂B 에 작용하는 既知의 牽引力(traction)이다.

板 連續體 運動方程式을 離散化하기 위하여 Galerkin 加重殘差法을 式(1)과 式(2)에 適用하면 Galerkin 函數의 weak form 方程式은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(u, \eta) = - \int_B (\sigma_{ij,i} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \eta_j dV + \int_{\partial B} (\eta_j \sigma_{ij} - T_j) \eta_j dA \quad (3)$$

여기서 u 는 板의 임의의 點에서의 變位를 나타내며, η 는 加重函數를 나타낸다.

u 와 η 의 板 連續體의 中立面方向으로의 連續性을 考慮하면 式(3)의 Galerkin 函數는 板 連續體 각각의 要素에 대한 Galerkin 函數의 總으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(u, \eta) = \sum_{e=1}^{Nel} G_e(u, \eta) \quad (4)$$

따라서 하나의 板 連續體 要素에 대한 Galerkin 函數의 weak form 方程式은 다음과 같이 된다.

$$G_e(u, \eta) = - \int_{B_e} (\sigma_{ij,i} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \eta_j dV + \int_{\partial B_e} (\eta_j \sigma_{ij} - T_j) \eta_j dA \quad (5)$$

式(5)를 部分積分하고 Gauss-Green 定理을 適用하여 정리하면, 하나의 板 要素에 대한 Galerkin 函數는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G_e(u, \eta) = \int_{B_e} \sigma_{ij} \eta_{j,i} dV - \int_{B_e} (\rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \eta_j dV - \int_{\partial B_e} T_j \eta_j dA \quad (6)$$

임의 點에서의 函數는 각각의 節點값으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(x) = \sum_{I=1}^{Nel} N^I(\bar{x}) U^I \quad (7)$$

$$\varepsilon(x) = \sum_{I=1}^{Nel} B^I(x) U^I \quad (8)$$

$$\eta(x) = \sum_{I=1}^{Nel} N^I(x) H^I \quad (9)$$

여기서 $N^I(x)$ 는 節點 I 에서의 形狀函數(shape function)이고, U^I 는 節點變位(nodal displacement), $B^I(x)$ 는 節點變位벡터 U 와 變形率 ε 과의 관계를 나타내는 行列, H^I 는 η 의 節點 I 에서의 값을 나타낸다.

式(6)에 式(7)~式(9)를 각각 대입하여 정리

하면 Galerkin 函數는 다음과 같다.

$$G_e(\underline{U}, \underline{H}) = \sum_{I=1}^{Nel} \sum_{J=1}^{Nel} \underline{H}^I (\underline{M}_e^{IJ} \underline{U}^J + \underline{K}_e^{IJ} \underline{U}^J - \underline{R}_e^I) \quad (10)$$

여기서 式(10)의 각항은 다음과 같다.

$$\underline{M}_e^{IJ} = \int_{Be} \rho (\underline{N}^I)^T (\underline{N}^J) dV \quad (11)$$

$$\underline{K}_e^{IJ} = \int_{Be} (\underline{B}^I)^T \underline{D} (\underline{B}^J) dV \quad (12)$$

$$\underline{R}_e^I = \int_{Be} (\underline{N}^I)^T \underline{T} dA + \int_{Be} \rho (\underline{N}^I)^T \underline{b} dV \quad (13)$$

각 要素函數를 전체 板 連續體에 대하여 合成하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(\underline{U}, \underline{H}) = \underline{H}^T (\underline{M}\underline{U} + \underline{K}\underline{U} - \underline{R}) = 0 \quad (14)$$

2.2 高次 變位函數를 考慮한 板 有限要素

임의 點에서의 x 軸과 y 軸方向으로의 面內 變位를 다음과 같이 高次 函數로 假定하면

$$u_x(x, y, z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (15a)$$

$$u_y(x, y, z) = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 \quad (15b)$$

式(15a)와 式(15b)에서 板 中立面의 面方向 變形을 무시하면 $A_0 = B_0 = 0$ 가 되므로 다음과 같이 된다.

$$u_x(x, y, z) = A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (16a)$$

$$u_y(x, y, z) = B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 \quad (16b)$$

또한 板의 中立面에 垂直인 斷面에서의 剪斷 變形率은 $Z=0$ 인 中立面에 대하여 代칭이 되므로 $A_2 = B_2 = 0$ 가 되어 變位函數는 다음과 같이 된다.

$$u_x(x, y, z) = A_1z + A_3z^3 \quad (17a)$$

$$u_y(x, y, z) = B_1z + B_3z^3 \quad (17b)$$

따라서 中立面에서의 剪斷 變形率을 각각 γ_{xz} , γ_{yz} 이라 하면 板上端과 下端의 剪斷 變形率은 0 이라는 條件으로부터 未知의 係數를 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \gamma_{xz} - \frac{dw}{dx}, & A_3 &= \frac{4}{3h^2} \gamma_{xz} \\ B_1 &= \gamma_{yz} - \frac{dw}{dy}, & B_3 &= \frac{4}{3h^2} \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

板 中立面에 垂直인 斷面의 回轉角은 剪斷 變形率과 기울기로서 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\theta_x = -\gamma_{yz} + \frac{dw}{dy} \quad (19a)$$

$$\theta_y = -\gamma_{xz} + \frac{dw}{dx} \quad (19b)$$

또한 板 두께方向으로의 變形을 무시한다면 鉛直方向 變位函數는 다음과 같이 된다.

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (20)$$

式(17)~(20)으로부터 板의 變位벡터는 中立面의 鉛直처짐과 回轉角으로 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, y, z) &= -\frac{4}{3h^2} z^3 \frac{dw}{dx} + \left(\frac{4}{3h^2} z^3 - z \right) \theta_y \\ u_y(x, y, z) &= -\frac{4}{3h^2} z^3 \frac{dw}{dy} + \left(\frac{4}{3h^2} z^3 - z \right) \theta_x \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

또한 板 中立面에서의 鉛直처짐과 回轉角은 다음과 같이 節點變位의 項으로 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} W(X, Y) \\ \theta_y(X, Y) \\ \theta_x(X, Y) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{I=1}^{Nel} N_W^I & \sum_{I=1}^{Nel} N_X^I & \sum_{I=1}^{Nel} N_Y^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{I=1}^{2Nel} N_\theta^I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{I=1}^{2Nel} N_\theta^I \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w^I \\ \frac{dw^I}{dx} \\ \frac{dw^I}{dy} \\ \theta_y^I \\ \theta_x^I \end{Bmatrix} \quad (22)$$

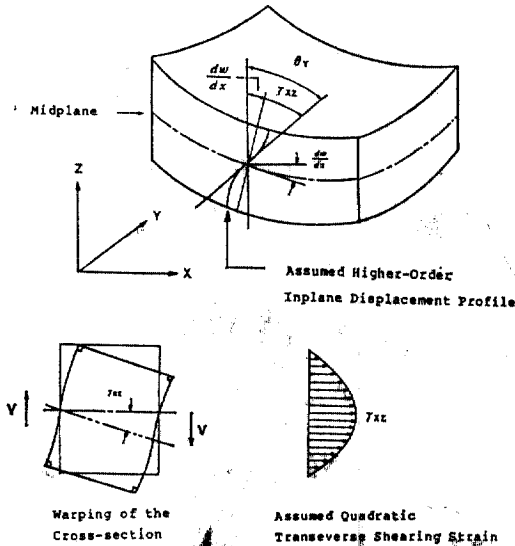


그림 1. Assumed Higher-Order Displacement Profile of the Present Plate Bending Element.

2.3 高次板有限要素의 形狀函數

直角座標系에서의 面積座標(area coordinate)는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & Y_2 - Y_3 & X_3 - X_2 \\ X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & Y_3 - Y_1 & X_1 - X_3 \\ X_1 Y_2 - X_2 Y_1 & Y_1 - Y_2 & X_2 - X_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (23a)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (23b)$$

여기서, A 는 삼각형要素의 面積을 나타낸다.

回轉角 θ 에 대한 quadratic 形狀函數는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{Coner nodes : } N_I^q &= L_I(2L_I - 1) \quad (I=1, 3) \\ \text{Mid-side nodes : } N_I^q &= 4L_I L_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

여기서, $\alpha = 1 + \frac{(3-I)I^2}{2}$

鉛直처짐 W 와 中立面의 기울기 $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$ 에 대한 cubic 形狀函數는 각각 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} N_W^c &= 3L_I^3 - 2L_I^2 + 2L_I L_2 L_3 \\ N_X^c &= 2A [c_x (L_I^3 L_\alpha + 1/2 L_1 L_2 L_3) - c_\alpha (L_I^2 L_\beta + 1/2 L_1 L_2 L_3)] \\ N_Y^c &= 2A [c_\alpha (L_I^3 L_\beta + 1/2 L_1 L_2 L_3) - b_\beta (L_I^2 L_\alpha + 1/2 L_1 L_2 L_3)] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

여기서, $\beta = (3I^2 - 13I + 16)/2$

따라서 式(22)를 式(21)에 대입하면 變位函數 u 는 節點變位の 項으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^6 \begin{Bmatrix} \phi(Z) N_{W,x}^I & \phi(Z) N_{X,x}^I & \phi(Z) N_{Y,x}^I & \Psi(Z) N_\theta^I & 0 \\ \phi(Z) N_{W,y}^I & \phi(Z) N_{X,y}^I & \phi(Z) N_{Y,y}^I & 0 & \Psi(Z) N_\theta^I \\ N_W^I & N_X^I & N_Y^I & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w^I \\ \frac{dw^I}{dx} \\ \frac{dw^I}{dy} \\ \theta_Y^I \\ \theta_X^I \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서, $\phi(Z) = -\frac{4}{9h^2} Z^3$ $\Psi(Z) = -Z + \frac{4}{3h^2} Z^3$

式(26)과 變形率 관계로부터 板 有限要素의 B 行列를 구하면 다음과 같이 된다.

$$B = \begin{Bmatrix} \phi(Z) N_{W,xx}^I & \phi(Z) N_{X,xx}^I & \phi(Z) N_{Y,xx}^I & \Psi(Z) N_{\theta,x}^I & 0 \\ \phi(Z) N_{W,yy}^I & \phi(Z) N_{X,yy}^I & \phi(Z) N_{Y,yy}^I & 0 & \Psi(Z) N_{\theta,y}^I \\ 2\phi(Z) N_{W,xy}^I & 2\phi(Z) N_{X,xy}^I & 2\phi(Z) N_{Y,xy}^I & \Psi(Z) N_{\theta,y}^I & \Psi(Z) N_{\theta,x}^I \\ \rho(Z) N_{W,x}^I & \rho(Z) N_{X,x}^I & \rho(Z) N_{Y,x}^I & \rho(Z) N_\theta^I & 0 \\ \rho(Z) N_{W,y}^I & \rho(Z) N_{X,y}^I & \rho(Z) N_{Y,y}^I & 0 & \rho(Z) N_\theta^I \end{Bmatrix} \quad (27)$$

여기서, $\rho(Z) = -1 + \frac{4}{9h^2} Z^2$

또한 應力-變形率 關係式은 다음과 같다.

$$D = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{Bmatrix} \quad (28)$$

여기서, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, ν 는 Poisson's ratio

式(27)과 式(28)을 이용하면 式(12)로부터 要素剛性行列(stiffness matrix) K_e 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\underline{K}_e = D \int_{A_e} \underline{K}_e^b dA + \frac{8}{15} G t \int_{A_e} \underline{K}_e^s dA \quad (29)$$

여기서, \underline{K}_e^b ; 휨剛性度, \underline{K}_e^s ; 剪斷剛性度, D 는 plate constant이다.

要素質量行列(\underline{M}_e)는

$$\underline{M}_e = \rho \int_{A_e} m_e dA \quad (30)$$

Force vector(\underline{R}_e)는

$$\underline{R}_e = \int_{A_e} \rho q t [N] dA \quad (31)$$

板의 平衡方程式으로부터 要素斷面力를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = D \sum_{I=1}^6 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{5}(N_{W,XX}^I + \nu N_{W,YY}^I) - \frac{1}{5}(N_{X,XY}^I + \nu N_{X,YY}^I) - \frac{1}{5}(N_{Y,XX}^I + \nu N_{Y,YY}^I) \\ -\frac{1}{5}(\nu N_{W,XX}^I + N_{W,YY}^I) - \frac{1}{5}(\nu N_{X,XX}^I + N_{X,YY}^I) - \frac{1}{5}(N_{Y,XX}^I + \nu N_{Y,YY}^I) \\ -\frac{2}{5}(\mu N_{W,XY}^I) \quad -\frac{2}{5}(\mu N_{X,XY}^I) \quad -\frac{2}{5}(\mu N_{Y,XY}^I) \\ \frac{4}{5}N_{\theta}^I \quad -\frac{4}{5}\nu N_{\theta,Y}^I \\ \frac{4}{5}\nu N_{\theta,X}^I \quad -\frac{4}{5}N_{\theta,Y}^I \\ \frac{4}{5}\mu N_{\theta,X}^I \quad -\frac{4}{5}\mu N_{\theta,X}^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w^I \\ \frac{dw^I}{dx} \\ \frac{dw^I}{dy} \\ \theta_Y^I \\ \theta_X^I \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_X \\ Q_Y \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} G h \sum_{I=1}^6 \begin{Bmatrix} N_{W,Y}^I & N_{X,X}^I & N_{Y,X}^I & N_{\theta}^I & 0 \\ N_{W,Y}^I & N_{X,Y}^I & N_{Y,Y}^I & 0 & N_{\theta}^I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w^I \\ \frac{dw^I}{dx} \\ \frac{dw^I}{dy} \\ \theta_Y^I \\ \theta_X^I \end{Bmatrix} \quad (33)$$

여기서, M_X, M_Y ; 휨 모멘트

M_{XY} ; 비틀림 모멘트

Q_X, Q_Y ; 剪斷力

3. 例題解析 結果의 考察

本 研究에서 提案한 高次 板 有限要素의 正確度와 效率性을 考察하기 위하여 그림 3과 같은 正四角形 板의 靜의 처짐解析을 遂行하였다. 板의 要素行列은 (3×3) Gauss 積分點을 利用한 減次積分을 遂行하였다.

3.1 單純支持 板의 解析

單位等分布荷重을 받는 正四角形 單純支持板의 靜의 처짐을 두께가 두꺼운 板($a/h=10$)과 얇은 板($a/h=100$)에 대하여 解析하였다. 그림 3에서 提案한 세가지 mesh 형태에 대하여 convergence test를 遂行한 結果, 板의 中央點에 대하여 대칭이 되는 mesh(A) 형태가 가장 빠른 收斂特性을 나타내었다. 따라서 모든 例題는 mesh(A)를 利用하여 解析하였다.

表 1에서 보는 바와 같이 本 研究에서 提案된 高次 板 要素에 의한 解는 板의 두께에 관계없이 精密解(exact solution)와 거의 一致하였으

Ⅱ 1. Results of Simply-Supported Square Plate under Uniformly Distributed Load.

(a) Thin Plate($a/h=100$)

	Central Displacement ($\times qa^4/D$)	Central Bending Moment ($\times qa^4$)	Comer Twisting Moment ($\times qa^2$)	Mid-Edge Shear Force ($\times qa$)
Exact Solution(24)	0.00406	0.0479	-0.0325	0.338
Kant(16)	0.00407	0.0482	-0.0319	0.284
Present Element	0.00406	0.0478	-0.0315	0.311

(b) Thick Plate($a/h=10$)

	Central Displacement ($\times qa^4/D$)	Central Bending Moment ($\times qa^2$)	Comer Twisting Moment ($\times qa^2$)	Mid-Edge Shear Force ($\times qa$)
Exact Solution(24)	0.00427	0.0479	-0.0325	0.338
Kant(16)	0.00426	0.0484	-0.0314	0.285
Present Element	0.00427	0.0476	-0.0321	0.0293

며, 또한 Kant(16)의 板要素보다 正確한 結果를 나타내고 있음을 알 수 있다.

3.2 固定 板의 解析

表 2 에서와 같은 사방 固定支持된 板의 경우

에도 單純支持 板의 경우와 마찬가지로 板의 두께에 관계없이 高次板要素의 解가 精密解와 一致하고 있음을 알 수 있다.

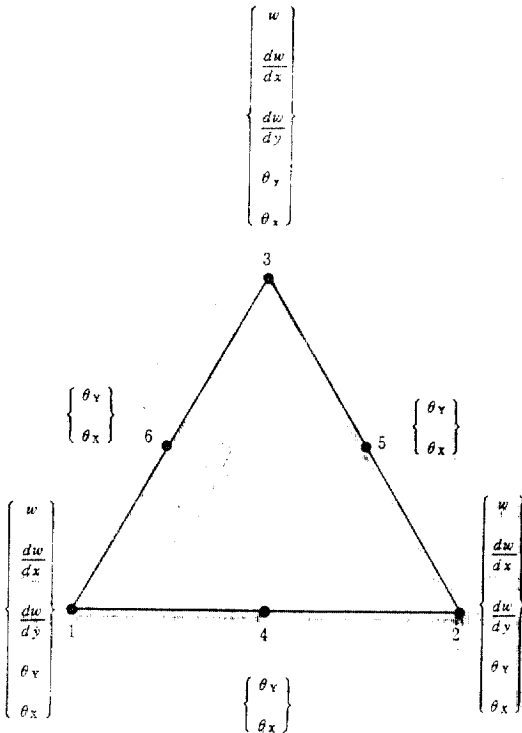


그림 2. Configuration of Proposed 6-Node Triangular Plate Bending Finite Element.

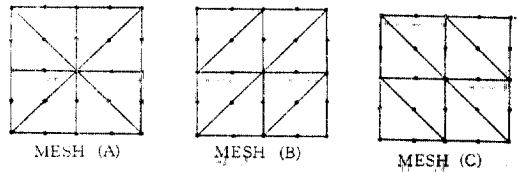
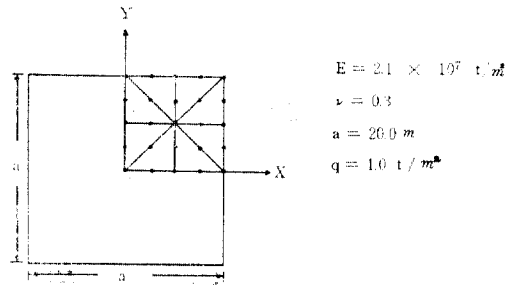
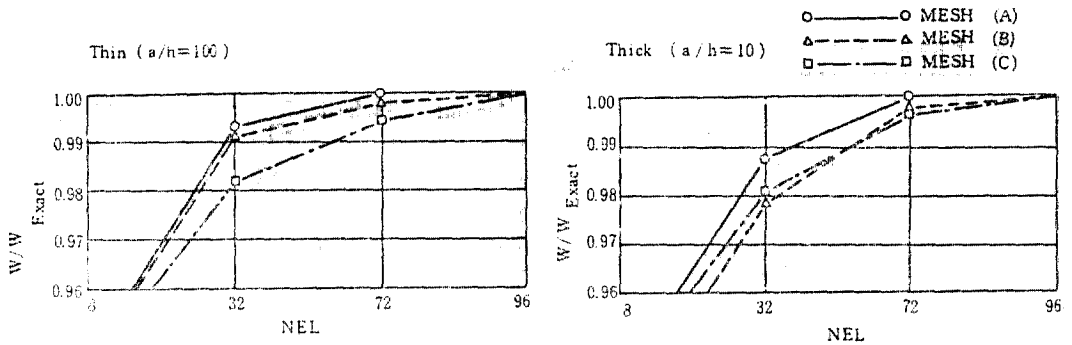


그림 3. Configuration of Mesh Orientations of Square Plate.

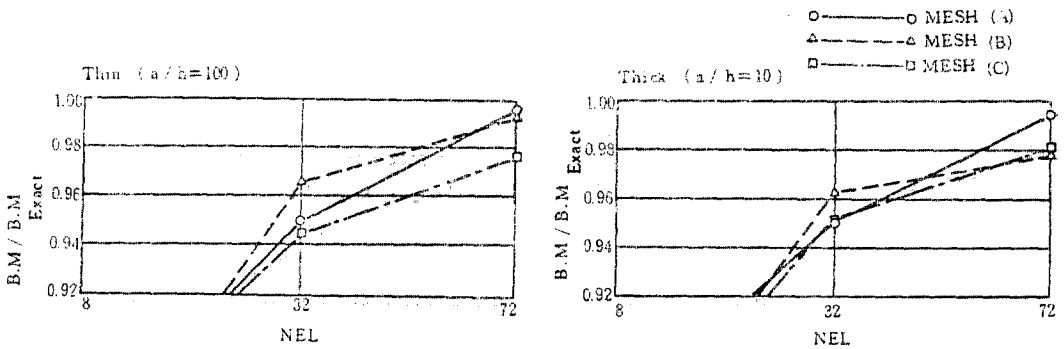
4. 結 論

本 研究의 結果를 요약하면 다음과 같다.

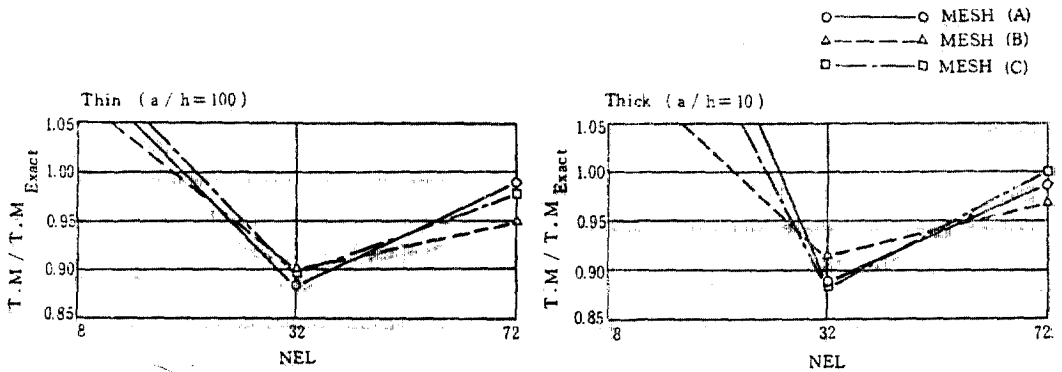
(1) 本 研究에서 提案한 板有限要素는 板의 面內 水平變位를 高次 函數로 假定하여 連續體로부터 誘導하였기 때문에 剪斷變形의 影響을 보다 完璧히 포함하고 있으므로 剪斷變形에너지의 補正을 위한 剪斷修正係數가 필요하지 않다.



(a) Normalized Central Displacement.



(b) Normalized Central Bending Moment.



(c) Normalized Corner Twisting Moment.

그림 4. Comparison of Results for Various Element Meshes.

표 2. Results of Clamped Square Plate under Uniformly Distributed Load.

(a) Thin Plate ($a/h=100$)

	Central Displacement ($\times qa^4/D$)	Central Bending Moment ($\times qa^2$)	Corner Twisting Moment ($\times qa^2$)	Mid-Edge Shear Force ($\times qa$)
Exact Solution(24)	0.00126	0.0231	-0.0513	-
Kant(16)	0.00123	0.0227	-0.0399	-
Present Element	0.00126	0.0228	-0.0414	0.356 0.377

(b) Thick Plate ($a/h=10$)

	Central Displacement ($\times qa^4/D$)	Central Bending Moment ($\times qa^3$)	Corner Twisting Moment ($\times qa^3$)	Mid-Edge Shear Force ($\times qa$)
Exact Solution(24)	0.00150	0.0231	-0.0513	—
Kant(16)	0.00146	0.0236	-0.0387	0.344
Present Element	0.00150	0.0223	-0.0408	0.372

(2) 여러가지 mesh 형태중, mesh(A)가 비교적 빠른 收斂特性을 나타내었다.

(3) 다른 境界條件을 갖는 板의 靜的 처짐解析을 遂行한 結果, 高次 板 有限要素에 의한 解는 板의 두께가 얇은 경우나 두꺼운 경우 모두 만족할만한 正確度를 나타내므로 板의 두께에 관계없이 板의 처짐解析에 使用할 수 있는 正確하고 效率인 板 有限要素라 사료된다.

參 考 文 獻

1. Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., "A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation," *Int. J. Num. Meth.*, Vol. 21, pp.367~368, (1985).
2. Batoz, J.L., Bathe, K.J. and Ho, L.W., "A Study of Three Node Triangular Plate Bending Elements," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp.1771~1812, (1980).
3. Batoz, J.L., "An Explicit Formulation for Efficient Triangular Plate Element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 18, pp.1077~1089, (1982).
4. Bergan, P.G. and Wang, X., "Quadrilateral Plate Bending Elements with Shear Deformations," *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1, pp.25~34, (1984).
5. Bhashyam, G.R. and Gallagher, R.H., "An Approach to the Inclusion of Transverse Shear Deformation in Finite Element Plate Bending Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 13, pp.19~27, (1984).
6. Cheung, Y.K., "A Practical Introduction to Finite Element Analysis," Pitman Publishing, London, pp.31~70, (1979).
7. Cheung, Y.K. and Chan, H.C., "A Family of Rectangular Bending Elements," *Computers & Structures*, Vol. 10, pp.613~619, (1979).
8. Cook, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," John Wiley & Sons, 2nd edition, pp.196~198, (1981).
9. Cook, R.D., "Some Elements for Analysis of Plate Bending," *ASCE, Proc. J. Eng. Mech.*, pp.1453~1470, (1972).
10. Cowper, G.R. "The Shear Coefficients in Timoshenko's Beam Theory," *J. Appl. Mech.*, *ASME*, pp.335~340, (1966).
11. Hinton, E. and Bicanic, N., "A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Element for Free Vibration Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 10, pp.484~493, (1979).
12. Hinton, E. and Owen, D.R.J., "Finite Element Programming," Academic Press, 2nd edition, pp.123~141, (1979).
13. Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanok-Nukulchai, W., "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp.1592~1543, (1977).
14. Hughes, T.J.R., and Tezduyar, T.E., "Finite Element Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element," *J. Appl. Mech.*, *ASME*, Vol. 48, pp.483~493, (1979).
15. Hughes, T.J.R. and Martin, C., "The 'Heterosis' Finite Element for Plate Bending," *Computers & Structures*, Vol. 9, pp.445~450, (1978).
16. Kant, T., Owen, D.R.J. and Zienkiewicz, O.C., "A Refined Higher-Order C⁰ Plate Bending Element," *Computers & Structures*, Vol. 15, No. 15, No. 2, pp.311~335, (1982).
17. Kant, T., "Numerical Analysis of Thick Plate," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 31, pp.

- 1~18, (1982).
18. Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R., "A Large Deformation Formulation for Shell Analysis by the Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 13, pp.19~27, (1981).
19. Kanok-Nukulchai, W. and Shin, Y.S., "Versatile and Improved Higher-Order Beam Element," *ASCE, J. Str. Eng.*, Vol. 110, No. 9, pp.2234~2248, (1984).
20. Penzien, J. and Clough, R.W., "Dynamics of Structures," McGraw-Hill, pp.151~172, pp.308~325, (1975).
21. Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced Integration'," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 12, pp.1059~1079, (1978).
22. Shames, I.H. and Dym, C.L., "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics," Hemisphere Publish. pp.259~322, pp.510~542, pp.574~627, (1985).
23. Tessler, A. and Hughes, T.J.R., "An Improved Treatment of Transverse Shear in the Mindlin-Type Four-Node Quadrilateral Element," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 39, pp.311~335, (1983).
24. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill, 2nd edition, pp.180~225, (1984).
25. Ugural, A.C., "Stress in Plates and Shells," pp.2~22, McGraw-Hill, (1981).
26. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method," McGraw-Hill, 3rd edition, pp.42~134, pp.148~303, pp.178~210, (1977).

(接受: 1987. 1. 23)