

龜裂材의 不安定延性破壞에 대한 J積分 評價를 위한 彈塑性解析

Elasto-Plastic Analysis for J-integral Evaluation of Unstable
Fracture in Cracked Ductile Materials.

張 東 一*
Chang, Dong Il
鄭 慶 燮**
Jung, Kyoung Sup

Abstract

It is the objective of this study to estimate J-integral by numerical analysis, in which J-integral as a parameter in fracture mechanics can be used to evaluate unstable ductile fracture which is an important problem with respect to structural stability when the scope is beyond small scale yielding criteria.

For this, 8-node isoparametric singular element as crack tip element of a cracked material was used to solve plastic blunting phenomenon at crack tip, and crack opening was forced to start when J-value was exceeding fracture toughness J_{IC} of the material. And crack propagation behaviour was treated by using crack opening angle.

From this study, it was shown that crack opening, stable propagation and unstable opening point of the cracked material found by using J-value obtained from this study were accord with the other study, so think, J-value obtained from this study can be directly used as a parameter in fracture mechanics to deal with the problem of stable propagation of crack and unstable ductile fracture.

要 旨

本 研究는 小規模降伏範圍를 벗어나는 大規模降伏條件下에서 構造安定性에 關한 重要한 問題인 不安定延性破壞를 評價할 수 있는 破壞力學 因子로서의 J積分을 數值解로서 구하는데 그 目的을 두었다.

이를 위해 龜裂材의 龜裂先端要素로 8節點等方特異要素를 使用하고, 균열發生은 破壞韌性 J_{IC} 를 초과할 때 일어나도록 하였으며, 그리고 균열成長의 取級은 龜裂開口角을 利用했다.

本 研究에 의해 解析된 J積分值를 使用하여 균열재의 균열발생과 安定成長, 不安定 發生點을

* 正會員 · 漢陽大學校 工科大學 教授, 土木工學科
** 正會員 · 忠北大學校 工科大學 助教授, 土木工學科

찾은 결과 다른 研究結果와 잘 一致하고 있어 彈塑性을 考慮한 J 積分値가 균열의 安定成長 및 不安定延性破壞 問題를 다루는 破壞力學 因子로서 直接 利用될 수 있음을 보였다.

1. 序 論

線形破壞力學은 하나의 破壞因子基準 K_{IC} 의 개념을 도입하는 것에 의해 小規模降伏領域에 관한 破壞問題에 應用되어 成功하고 있다⁽²¹⁾. 이것은 또한 疲勞破壞問題에도 應用되어 龜裂成長 速度가 應力擴大係數에 의해 잘 記述될 수 있음을 보이고 있다⁽²¹⁾. 그러나 同一材料에 있어 平面變形破壞靱性(plane-strain fracture toughness, K_{IC})은 降伏應力 σ_y 의 저하와 함께 增大한다. 그러므로 最近 많이 使用되고 있는 延性 高靱性 材料의 K_{IC} 를 評價하기 위해서는 매우 큰 試驗片이 필요하게 된다. 게다가 대형 構造物의 破壞는 平面變形條件을 만족하고 있다해도 小規模 降伏 條件을 만족하는 것 없이 일어나는 경우가 많다. 따라서 構造物의 安全性 및 健全性を 確保하기 위해서는 彈塑性破壞靱性(elasto-plastic fracture toughness)이 評價되지 않으면 안된다. 이 경우 評價되는 탄소성과괴인성은 大規模降伏 狀態에 있어서 單一因子(one parameter fracture criterion)로 記述됨과 동시에 小規模降伏狀態에서의 K_{IC} 와 동일한 對應關係를 갖는 것이 工學的으로 필요하다. 이들 因子들의 有效性 및 相互關聯에 대해서 많은 研究 發表가 이루어지고 있으며, 크게 나누어 두가지로 分類된다. 하나는 Generation Phase 라 칭하는 것으로 實驗에 의해 얻어진 標點間變位와 균열成長量의 關係等을 기초로 하여 破壞力學 因子 J , COA, CTOA, COD, CTOD(δ), G ⁽⁶⁾ 등의 舉動을 調査하는 方法이고, 다른 하나는 Application Phase 라는 것으로 破壞力學 因子의 舉動을 가정하고 이것으로부터 試驗片 혹은 構造物의 舉動(예를들면 荷重-變位曲線)等을 調査하는 方法이다. 이들 研究에서 J , COA, CTOA 모두 처음의 遷移期를 除外하고는 균열성장에 대하여 각각 거의 一定값을 갖는 것이 報告되고 있다^(1,2) 이 破壞力學 破壞因子들 중 균열성장을 基準에 맞추어 다루는 데에 어느 것이 가장 적절한가를 아는 것이 問題로서 이것

을 엄밀히 評價하는 데에는 이들 因子들의 상세한 解析이 필요하다. 本 論文에서 다루고자하는 J 積分을 예로들 경우, 그 解析에 관해서는 많은 方法이 제안되고 있지만^(3,4), 아직 확정된 평가법이 없는 상태이다. J 積分 解析値는 同一形狀, 同一荷重條件 및 同一한 構成式에 대해서도 解析方法의 差異에 따라 荷重, 變形이 작은 범위 以外에서는 각 計算 結果가 상당한 分散을 보이므로, 이와 같은 문제점을 解決하고자 本 論文에서는 CT張試驗片에 대한 균열發生 및 균열成長을 고려한 非線形解析을 有限要素法에 의해 行하고, 實驗 데이터 및 既存 解析値와 比較 檢討함으로써 靱性 評價에 자주 利用되는 CT引張試驗片의 彈塑性을 고려한 J 값이 分散하는 가를 確認하고, J 의 數值解만으로서 龜裂材의 不安定延性破壞의 評價가 타당성이 있는가를 考察한다.

2. 大規模降伏에 대한 J 積分 解析

2.1 J_{IC} 와 δ_{IC}

Rice 에 의해 제안된 J 積分은 2次元 問題에 있어서 式(1)과 같이 定義된다.^(5,6)

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (1)$$

여기서 Γ : 적분경로, W : 변형에너지 밀도, T : 포면력, u : 변위이다.

이 J 積分은 균열길이 變化에 따른 對象 部材 單位 두께당 포텐셜에너지 해방율을 나타낸다. 즉, 線形 및 非線形彈塑性體의 경우, J 積分은 에너지 해방율 G 와 等價이다. 따라서 균열면의 變位 樣式이 모드 I인 경우에는 G 와 應力擴大係數 K_I 의 關係에서 小規模降伏狀態에서 다음 式이 成立한다.

$$J_I = G_I = \frac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} \quad (2)$$

여기서 ν : 프와손비, E : 탄성계수이다.

또한 彈性, 彈塑性體를 問題삼지 않는 일반적 인 剛塑性體를 가정할 경우, 균열先端 근방의 應力, 變形率 狀態는 J 積分을 利用하여 다음과

같이 나타낼 수 있다^(7,8,9).

$$J = m \cdot \sigma \cdot \delta \quad (3)$$

여기서 m 은 塑性拘束으로 加工硬化의 影響을 받을 경우, 流動應力 $\sigma_f (= (\sigma_y + \sigma_B)/2$, σ_B 는 引張強度)를 利用하면 式(3)의 m 은 平面應力에 대해서는 1, 平面變形率에 대해서는 $m > 1$ 로 된다.

한편, 균열 끝 개구변위 δ 는 平面變形率 狀態를 기초로 解析的으로는 주어지고 있지 않지만 式(2)와 (3)으로부터 평면 변형율에 대해 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\delta = \frac{G_I}{\lambda \sigma_y} = \frac{(1-\nu^2) K_I^2}{\lambda E \sigma_y} \quad (4)$$

해석결과에 의하면 λ 값은 $1 \leq \lambda \leq 2$ 로 된다^(5, 10, 11).

이상의 것으로부터 小規模降伏狀態에 관한 에너지 平衡, 즉 G_{IC} 개념에 그 기초를 둔 破壞基準

$$K_I \geq K_{IC} \quad (5)$$

은 다음 式과 같이 記述된다.

$$J_I \geq J_{IC}, \quad \delta_I \geq \delta_{IC} \quad (6), (7)$$

그러므로 K_{IC} 에 對應하는 J_{IC} 및 δ_{IC} 도 단일 인자 J 와 δ 로 記述되는 破壞靱性이다. 더구나 大規模降伏狀態에 있어서 K_I 는 그 意味를 상실하는 것에 대하여 J_I 및 δ_{IC} 는 그 物理的 意味를 갖으므로, 小規模降伏狀態에 대한 式(6), (7)의 확장으로 그 成立이 기대된다.

最近에는 破壞發生點이 꽤 精度 좋게 檢出할 수 있게되어 安定破壞 發生時의 J 積分 및 δ 의 값, 즉 J_{in} 및 δ_{in} 의 데이터로부터 試驗片 치수 依存性은 그림 1과 같이 얻어지고 있다⁽¹²⁾.

그림 1(a)는 K_{IC} 가 評價되고 있는 材料의 경우로서 예비균열 끝에서 平面變形率 狀態가 유지되는 두께 이상인 경우 降伏規模를 불문하고 J_{in}

및 δ_{in} 은 試驗片 치수에 依存하지 않고 一定한 값을 나타낸다. 또한 不安定破壞로 進行할 때의 J 積分 및 δ 의 限界值 J_c 및 δ_c 를 定義하면 J_c 및 δ_c 는 試驗片 치수의 增大와 함께 低下하고, 완전한 平面變形率 및 小規模降伏狀態가 달성되는 어느 試驗片 치수 이상의 범위에서 각각 J_{in} 및 δ_{in} 와 거의 一致한다. 이와 같은 경우의 J_{in} 및 δ_{in} 은 式(6), (7)의 關係를 만족한다. 그런데 K_{IC} 는 平面變形率 및 小規模降伏狀態에서 應力 履歴의 影響이 거의 무시될 수 있는 理想균열로부터 破壞發生에 對한 材料 固有의 靱性值이다. 즉 위에 說明한 J_c 및 δ_c 은 降伏規模를 불문하고 平面變形率 狀態에서의 破壞發生에 대한 材料 固有의 靱性值로 小規模降伏狀態에 있어 K_{IC} 와 式(2)와 (4)로 나타내지는 대응관계에 있다. 그러므로 이것을 彈塑性 破壞靱性 J_{IC} 및 δ_{IC} 로 할 수가 있다.

한편 그림 1(b)는 K_{IC} 가 事實상 評價할 수 없는 材料의 경우이다. J_{in} 및 δ_{in} 이 어느 두께 이상의 범위에 대해 材料固有의 靱性值로 되고 있는 것은 그림 1(a)의 경우와 같다. 그러나 小規模降伏狀態에 대한 K_{IC} 와 대응 관계는 불명확하여 이것을 J_{IC} 및 δ_{IC} 로 부르는 것은 약간 問題가 있다. 그렇지만 더 큰 치수의 시험편에 대해서는 K_{IC} 와의 대응도 期待되며, 적어도 安定破壞發生에 대한 材料 固有의 靱性值라는 意味에서는 위에 說明한 그림 1(a)의 J_{IC} 및 δ_{IC} 와 內容의으로 다르지 않다. 또한 式(3)으로부터 安定 파괴발생에 대한 δ 가 정확히 측정된다면 J_{IC} 및 δ_{IC} 개념은 等價이다. 이들 J_{IC} 및 δ_{IC} 개념의 成立은 많은 實驗結果에 의해 確實時되고 있다.

이상에서 說明한 바와 같이 J_{IC} 및 δ_{IC} 개념에 의하면 작은 치수의 試驗片으로부터 K_{IC} 가 추정될 수 있고, 더우기 K_{IC} 가 구해지지 않는 材料에서도 彈塑性 破壞靱性值가 評價될 수 있는 것이다. 따라서 본 論文의 경우 균열성장문제 해결을 위해 J_{IC} 개념을 使用하고 있다.

2.2 解析 方法

거시적인 관점에서 延性破壞는 空隙核, 空隙成長 및 空隙 sheet 合體等, 세계의 엄격한 다른 進行過程을 포함한다.⁽¹³⁾ 이들 과정을 단순모델

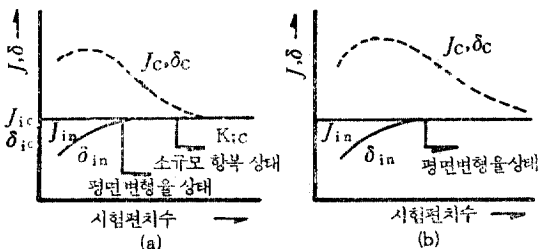


그림 1. J_{in} 및 δ_{in} 의 試驗片 치수 依存性

을 사용하여 量的인 試驗을 行한 것이 참고문헌 (14, 15, 16)에 논의되고 있으나 이들과 같은 量的인 破壞方法論의 개발은 매우 힘이 든다. 따라서, 均열시험편에 고무침투, 均열진전을 방해한 금속시험편의 그래픽 研究 및 破壞된 시험편의 거시적 파괴그래프 등 세계의 분리 기술을 利用하여 관측된 "파괴는 均열 침단의 壘性鈍化에 뒤따라 均열성장이 일어난다"는 것⁽¹⁷⁾을 기초로, 破壞進行域을 포함하는 領域에서 應力과 變化率狀態를 특정지우는 매개 變數들의 同一性에 초점을 두었다.

변형이론(deformation theory)에 근거한 J 적분을 위한 有限要素法의 彈壘性 解析은 변형이론과 증분이론(incremental theory)의 차이에 의한 J 값과 P-δ 선도에 미치는 영향이 적다고 생각하여(1, 21, 23, 27, 28) 참고문헌(18)의 증분이론에 의한 Nonlinear Program 을 그림 2와 같이 수정함으로써 均열성장 및 不安定破壞 發生 解析을 행하였다.

均열끝의 壘性鈍化는 그림 3과 같이 8 절점 等方 要素를 사용했다. Nagtegaal, Park 와 Rice⁽⁹⁾

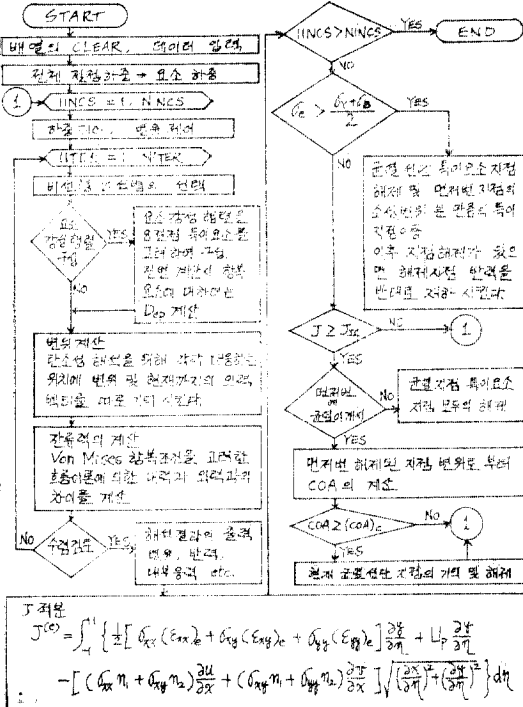


그림 2. 非線形 有限要素 解析을 위한 flow chart

는 4 절점 等方 要素들이 全壘性領域에서의 解析에 적당치 않은 것을 보였으며, de Lorenzi와 Shih⁽²⁰⁾에 의한 數值 研究들은 8 절점 等方 要素가 全壘性領域에 理相的으로 적당한 것을 보였다. 게다가 후자요소는 그림 3과 같이 단순한 기술로 均열끝의 均열성장 判定을 模型化할 수 있다. 그리고 또한 一定 變形率 要素에 관계하는 분할에 精度가 요구되지 않는다.

均열성장 判定은 計算된 J 積時值가 J_{IC} 값을 초과할 때 發生하는 것으로 하고 이후의 均열성장 조건으로는 그림 4와 같이, 상당량의 均열성장에 대하여 그 一定性이 確認되고 있는 COA 均열성장 조건을 이용하였다.

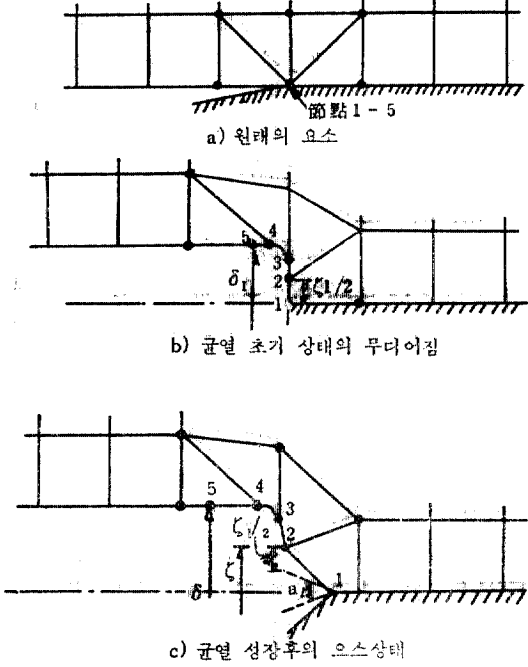


그림 3. 龜裂끝 壘性鈍化 解析을 위한 有限要素 模型

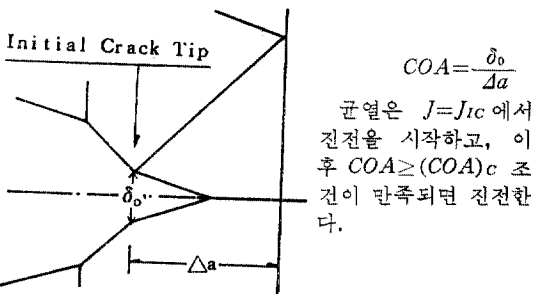


그림 4. COA의 算法

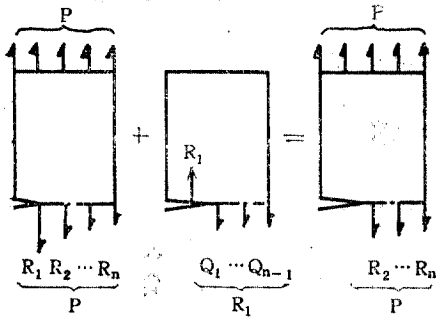


그림 5. 균열성장의 해석法

균열성장 완료는 그림 5에 보인 바와 같이 문헌(21)에 의해 제안된 절점 해방법을 이용했다.

2.3 解析對象의 形狀 및 치수

그림 6에 解析의 對象으로한 CT引張試驗片의 形狀 및 치수를 보였다. 그림 6(a)는 본 論文의 解析結果의 타당성을 확인하기 위해 實驗한 試驗片에 대한 것이고, 그림 6(b)는 문헌

표 1. 材料 定數

	CT 1	CT 2	CT 3
線彈性係數 $E(\text{kg/mm}^2)$	21000	21000	21012
poisson's ratio ν	0.3	0.3	0.3
降伏應力 $\sigma_Y(\text{kg/mm}^2)$	63	56	43.962
α	—	—	1.67
$B(\text{kg/mm}^2)$	—	153.0	—
n	—	3	9
彈塑性 破壞韌性 $J_c, J_{1c}(\text{kg/mm})$	5	8	30.6

(22)에서, (c)는 문헌(23)에서 각각 對象으로 한 것이다.

試驗片 材料로서는 實驗 시험편의 경우 一般 構造用 鋼 SWS 58을, CT 2 및 CT 3 試驗片의 경우에는 원자로 壓力 容器 鋼 A533B를 생각하고 있으며, 그 材料 定數를 표 1에 보인다.

應力-變形率 관계는 그림 7과 같고, CT 2의 경우는

$$\sigma < \sigma_Y \text{에서 } \varepsilon = \sigma/E$$

$$\sigma \geq \sigma_Y \text{에서 } \varepsilon = \sigma/E + \{(\sigma/B)^n\}$$

을 사용하고 있으며, CT 3의 경우에는 Ramberg-Osgood의 관계식

$$\varepsilon/\varepsilon_Y = \sigma/\sigma_Y + \alpha(\sigma/\sigma_Y)^n$$

를 이용하고 있다.

또한 균열성장 조건값으로서는

$$(COA)_c = 0.22 \text{ rad.} = \text{const.}$$

를 이용했다.

단, CT 1, CT 2의 경우는 平面變形率을, CT 3의 경우는 문헌(23)에서와 같이 平面應力을 가정하여 行하였으며, 요소분할은 그림 8과 같다.

균열성장 前 균열끝의 塑性鈍化는 그림 9와 같이 8 절점 특이 삼각형 요소^(24, 25)를 利用하여 J_R 曲線 作成時 使用되는 平均곡선식 $(\sigma_Y + \sigma_B)/2$ 를 초과할 때마다 한 절점씩을 해제시켰으며, 균열발생에는 해석된 J 積分値가 J_{1c} 를 초과할 때 해제시켰다.

그리고 균열발생後에는 그림 5와 같이 $COA \geq$

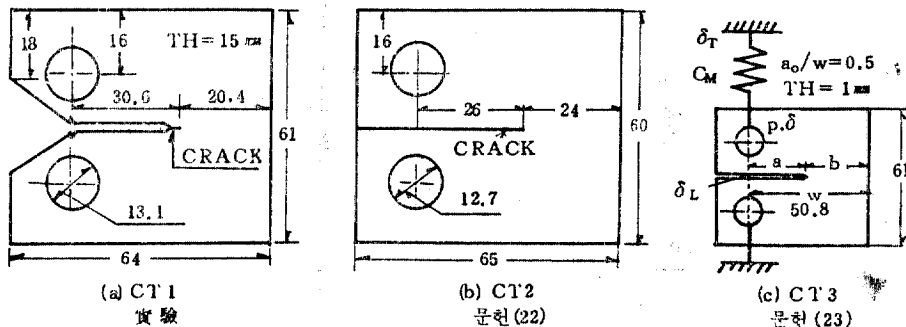


그림 6. (a) CT 1; 實驗 試驗片

(b) CT 2; 문헌(22)에서 對象으로 한 CT 引張試驗片

(c) CT 3; 문헌(23)에서 對象으로 한 CT 引張試驗片

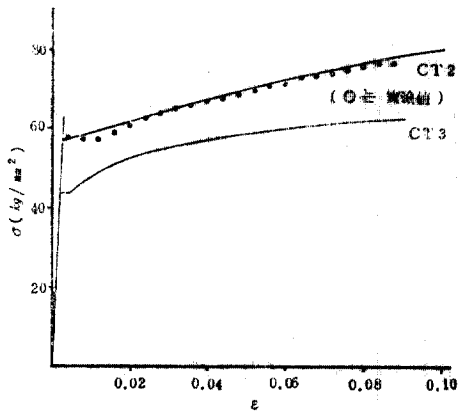


그림 7. 應力—變形率 線圖

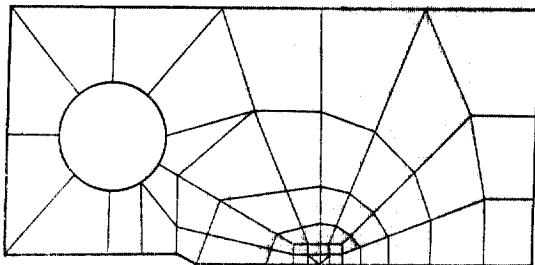


그림 8. CT引張 試驗片의 要素分割

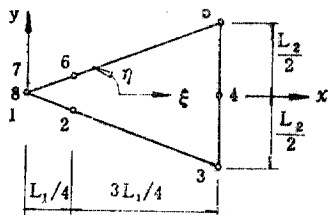


그림 9. 8 點 載 荷 특이 삼각형 요소

(COA) c 가 만족될 때 해당 지점을 해제시킴으로서 균열성장완료가 완료하는 것으로 하였다.

3. 實 驗

3.1 實驗材料 및 試驗片

本 實驗에 使用된 試驗片은 두께가 15mm 인

SWS 58 鋼材이며 그 化學的 成分 및 機械的 性質은 表 2 와 같다.

試驗片의 形狀은 그림 6(a)와 같고, 荷重線上的 變位를 측정하기 위한 Clip Gage 를 끼우기 위하여 ASTM E399-78 의 規定에 의해 試驗片에 홈을 만들었다⁽²⁶⁾

3.2 實驗裝置 및 實驗方法

本 實驗에 使用한 實驗裝置는 Shimadzu 社의 EH F-UB 25-70 으로 25ton 電氣油壓式 疲勞試驗機이다. 實驗을 위해 ASTM E561-80 에 의해 人工노치를, 20~30Hz, 應力比 $R=P_{min}/P_{max}=0.04\sim 0.1$ 정도의 0.04~1.0 사이 하중을 正弦波로서 疲勞龜裂을 試驗片 폭 W 에 대한 初期균열길이 a_0 의 比 a_0/W 가 0.6 이 되도록 發生시켰다.

準備된 試驗片을 荷重制御法(Load Control)에 의해 수행하였다.

4. J 積分의 解析結果 및 評價

그림 10 은 本 研究에 使用된 CT引張試驗片들에 대한 實驗, 문헌 (22) 및 문헌 (23)에서의 값과 本 연구의 非線形 解析值의 荷重—荷重線變位를 보인 것으로 本 研究의 解析值가 實驗值와 잘 맞고 있는 것으로 보아 CT2 및 CT3의 既存解析值와의 差異는 허용할 만한 것으로 생각된다.

그림 11 은 本 研究에 의한 J 積分值와의 比較를 위한 것으로, CT2의 경우 本 연구의 解보다 상당히 높게 評價되고 있다. 이 경우 荷重線變位가 1.0mm 以上에 대해서는 대상으로 삼고 있지 않고 있으므로 CT3에 대하여 살펴보면 本 연구의 解가 역시 다소 적게 評價되고 있다. 이러한 過小評價는 本 研究의 경우 考慮한 塑性 흐름 및 塑性鈍化를 위한 節點解除 때문으로 생각되지만, 本 研究의 경우는 龜裂材의 不安定延性

표 2. 化學的 成分 및 機械的 性質

Chemical Composition									Mechanical		Properties
C	Si	Mn	P	S	Sol Al	Ni	V	Mo	Yielding Stress	Tensile Strength	Elongation
									kg/mm ²	kg/mm ²	%
0.14	0.29	1.32	0.0195	0.007	0.033	0.12	0.038	0.09	63	70	33

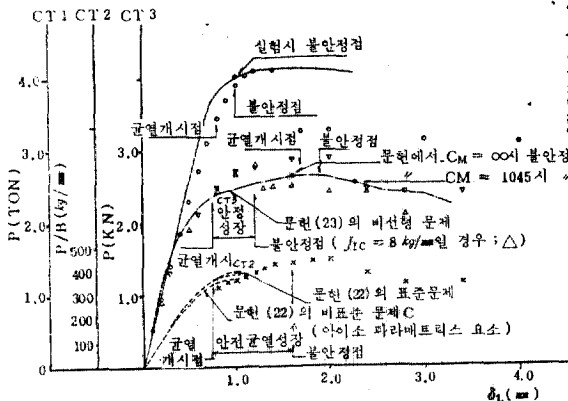


그림 10. 荷重-荷重線變位

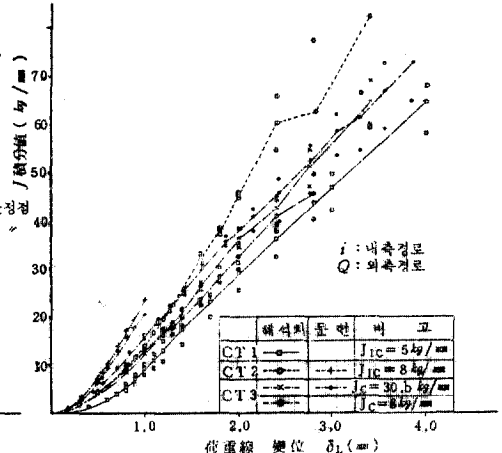


그림 11. CT試驗片의 J積分

破壞를 대상으로 하고 있으므로 CT3에 대한 불안정 점을 찾아 보도록 한다. 문헌(23)의 경우 콤플라이언스 C_M 을 고려한 解析을 變位와의 關係로부터 구하여, 그림 10에 보인 바와 같이 구해 놓고 있다. 본 研究에서는 J積分을 이용하여 이를 解決하고자 본 研究에 의한 J積分 解析値와 變位와의 關係曲線의 不連續點에 초점을 두었다.

그림 11을 살펴보면 試驗片 모두가 破壞靱性値 J_{IC} 를 지나 曲線上에 不連續點을 갖고 있는 것에 주목하여 龜裂材의 균열성장은 $J=J_{IC}$ 되는 變位點에서 시작되고 그후 曲線의 不連續點까지 安定균열 成長이 이루어지고 不連續點 以後에 不安定延性破壞가 發生한다고 보고, 이에 대한 값들을 구한 것을 그림 10에 보였다. 不安定문제를 중점적으로 다룬 문헌(23)의 CT3의 결과는 서로 잘 一致하고 있음을 알 수 있다. CT2의 경우도 문헌(22)의 균열 발생점이 잘 맞고 있으며 또한 實驗結果와도 잘 맞고 있어 不安定延性破壞에 대한 본 研究가 타당성이 있다고 생각한다.

5. 結 論

不安定延性破壞에 관한 J積分 評價를 彈塑性을 考慮한 有限要素法에 의해 行한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 龜裂先端의 塑性鈍化 효과를 考慮한 J積分 電算解法을 行한 結果値는 塑性鈍化를 고려하지 않은 CT2, CT3의 既存解 보다 작은 값을 보이고 있다.

(2) 龜裂開始 관정을 위한 破壞靱性値 J_{IC} 값의 差異는 同一 試驗片 解析일지라도 不安定延性破壞 發生點의 位置 뿐만 아니라 安定成長 범위도 變化시키므로, 對象材料에 대한 精確한 J_{IC} 값이 要求되는 바, 이에 대한 實驗 데이터의 확보가 시급하다고 생각된다.

(3) 龜裂成長條件으로 COA 균열성장조건을 利用하여 CT試驗片의 不安定破壞 發生點을 J積分으로 직접 評價할 수 있음을 보였다.

(4) 塑性일을 考慮한 본 研究의 方法은 既存의 解析에서와 같이 균열끝에 가까운 積分徑路上的의 J積分値가 平均値와 離脫되고 있지만 既存 解析値의 경우 內側徑路의 J積分値가 外側보다 작은 것인데 반하여 外側보다 큰 경우(그림 11의 CT1)가 있었다.

參 考 文 獻

1. Shih, C.F., 외 2명 ASTM STP, 688, 1979, p. 65.
2. Kanninen, M.F., 외 6명 ASTM STP, 668, 1979, p. 121.

3. Garwood, S.J., 외 2명 *Int. J. Fract.*, 11-3, 1975, p.528.
4. Ernst, H.A., 외 2명 *ASTM STP*, 743, 1981, p.476.
5. Rice, J.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 35, 1968, p.379.
6. Rice, J.R., *Fracture*, 2, Academic Press, 1968, p.191.
7. Rice, J.R., *Journal of Applied Mechanics*, 35, 1968, pp.379~386.
8. Rice, J.R. and Tracey, D.M., in "Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics," *S.J. Fenves et al, Eds.*, Academic Press, New York, 1973, pp.585~623.
9. McMeeking, R.M., *J.Mech. and Phys, Solids*, 25, 1977, p.357.
10. Rice, J.R. and Johnson, M.A., *Inelastic Behavior of Solids*, McGraw-Hill, 1970, p.641.
11. Sumpter, J.G. and Hayes, D.J., 외 3명, *Proc. ICF3*, 1973, I-433.
12. 小林英男, 材料, 27, 1978, p.711.
13. Cox, T.B. and Low, Jr., T.R., *Metallurgical Transactions*, Vol.5, 1974, pp.1457~1470.
14. Argon, A.S. and Im, J., *Metallurgical Transactions*, Vol.6A, 1975, pp.839~851.
15. Rice, J.R. and Tracey, D.M., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.17, 1969, pp.201~217.
16. McClintok, F.A., *Journal of Applied Mechanics*, Vol.35, 1968, pp.363~371.
17. Shih, C.F. et al., "Methodology for plastic Fracture", 1st through 5th Quarterly Reports, General Electric Co., Schenectady, N.Y., 1976. 9~1977.12.
18. Owen, D.R.J. and Hinton, E., "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press Limited Swansea, U.K., 1980, pp.157~373.
19. Nagtegaal, J.C., Park, D.M., and Rice, J.R., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.4, 1974, pp.153~177.
20. de Lorenzi, H.G. and Shih, C.F., *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol.13, 1977, pp.507~511.
21. 白鳥正樹, 三好俊郎 "有限要素法によるき裂材の非線形解析", 日本機械學會論文集, 第42巻358號, 1976, p.1639.
22. 三好俊郎, 吉田有一郎, 白鳥正樹 "不安定延性破壊におけるJ積分の評価と安定性解析" 日本機械學會論文集(A編), 第50巻453號 pp.904~911.
23. 材料強度および破壊機構の評価とその工學的應用に関する研究分科會, "J積分數値解析の比較", 日本機械論文集(A編), 第47巻417號 pp.559~564.
24. Blackburn, W.S., "Calculation of Stress intensity factors at crack tips using special finite elements", in *The Mathematics of Finite elements*, J.R. Whiteman, Ed., Academic Press, N.Y., 1973, pp.327~336.
25. Barsoum, R.S., "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10, No.1, pp.25~37.
26. ASTM-E399-78a "Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Material", 1980.
27. 山田嘉昭, "有限要素法の基礎と應用シリーズ 6, 塑性・粘弾性", 培風館, 1980, pp.118~123.
28. 三好俊郎, 白鳥正樹, "有限要素法によるJ積分の評価に関する研究", 日本機械學會論文集(A編), 第47巻424號 pp.1323~1330

(接受: 1987. 2. 4)