

맥동류에 놓인 구로부터의 열전달

Heat Transfer from a Sphere in Fluctuating Flow

권 영 필*, 이 계 철**
Young-Pil Kwon, Kye-Cheul Lee

ABSTRACT

The heat transfer characteristics from a solid sphere in a fluctuating air flow is simulated numerically in the range of the Reynolds numbers, $1 \leq Re \leq 40$. Such a situation may be encountered in forced convection from a heated spherical particle in a sound field or oscillating flow.

The amplitude and phase delay in the heat transfer response to the flow oscillation are computed for a small amplitude flow. The instantaneous response of heat transfer is simulated for the large amplitude oscillation and compared with the quasi-steady response.

The effect of the oscillation on the time - mean value in the local and overall heat transfer rate is discussed along with the change in the flow field.

기호설명

a'	: 구의 반경	Pr	: Prandtl 수
a^*	: 구의 무차원반경 $a'(\omega'/\alpha)^{1/2}$	r'	: 반지름
Dt	: 시간 간격	r	: 무차원 반지름 r'/a'
Dx	: θ 방향 격자크기	Re	: Reynolds 수, $2a'U'_0/\nu$
Dz	: z 방향의 격자크기	St	: Straubhal 수, $2a'\omega'/U'_0$
i	: θ 방향의 격자점	T	: 무차원 온도, $(T' - T'_0)/(T'_w - T'_0)$
j	: z 방향의 격자점	T'_0	: 자유흐름의 온도
Nu	: 평균 Nusselt 수	T'_w	: 구의 표면온도
Nu_θ	: 국소 Nusselt 수	t'	: 시간
Nu_s	: 준정상상태(quasi-steady) Nusselt 수	t	: 무차원시간, $t'a'/U'_0$
		u	: 원주 방향의 무차원속도
		\hat{U}	: 맥동속도의 무차원진폭, \hat{U}'/U_0

* 정회원, 숭실대학교

** 정회원, 숭실대학교 대학원

- U'_o : 자유흐름의 평균속도
 U'_o : 자유흐름의 무차원 평균속도,
 $U'_o/(\omega' \alpha)^{1/2}$
 v : 반경 방향의 무차원속도
 z : 반경 방향 좌표, $z = \ln(r'/a')$
 α : 열확산계수
 ψ : 무차원 유동함수
 ζ : 무차원 와도
 ζ_w : 무차원 벽와도
 ω' : 각 진동수
 ν : 공기의 동점성계수
 <하첨자>
 m : 해석영역의 무한경계
 w : 구의 표면
 o : 자유흐름

1. 서 론

낮은 레이놀즈수의 유동장에 단단한 단일 구형 입자로부터의 열전달은 고전적인 문제로서 수많은 연구자들에 의하여 연구되어 왔다. 대부분의 이론적인 연구는 온도장이나 유동장이 시간에 따라 변화가 없는 정상상태에 관한 것이다. Dennis 등¹⁾은 근시해법인 Series Truncation법으로 국소 및 평균 열전달계수를 구하고 수치적인 방법인 2차원 유한차분법으로 계산하여 비교한 결과 잘 일치하는 것을 보여주었다.

한편, 비정상 열전달은 실제 문제에서 흔히 일어나기 때문에 많은 연구자들의 관심을 끌어왔으나 모두 과도적인 열전달에 관한 것이다. 이 경우에 해석방법은 주로 급수(series)해나 점근해의 방법을 택하고 있다.^{2),3)}

본 연구는 유동장의 레이놀즈수가 40보다 낮고, 맥동하는 층류열전달에 대하여 유동특성과 함께 열전달특성을 교차방향음합수법(A.D.I)에 의하여 수치적으로 구한 것이다. 유체를 비압축성의 점성유체로 가정하고, 밀도를 포함한 모든 물성치의 온도에 대한 변화와 부력을 무시하였다. 진폭이 작은 경우에 응답특성을 구하고 이를 경우에 정미열전달계수의 변화인 열

음향 흐름(thermoacoustic streaming)을 구하였다. 진폭이 큰 경우에도 유동장은 vortex shedding이 일어나지 않는 안정한 경우에 국한하였다.

이러한 경우는 맥동하는 유동이나, 음장을 포함하고 있는 유동 또는 난류유동 중에 놓인 구의 경우에 적용될 수 있는 현상이다. 이 경우에는 유동의 맥동성분에 대한 열전달의 응답특성과 맥동에 의한 시간평균, 즉 정미열전달계수의 변화, 혹은 열음향흐름(thermoacoustic streaming)이 중요한 관심의 대상이 된다. 열전달 응답특성은 기주의 열음향진동(thermoacoustic oscillation)의 연구 등에 활용될 수 있으며^{4),5)}, 정미열전달에 미치는 영향은 음장에 의하여 열전달률을 증가시킬 수 있는가 하는 문제의 답을 제시하게 될 것이다. 이러한 목적을 위하여 원통의 경우는 이미 Kwon과 Lee에 의하여 연구되었다.^{5,6)} 열전달의 응답특성은 열음향적인 기주진동의 발생의 예측에 활용될 수 있었으며, 열음향흐름에 의한 국소 열전달의 변화는 크나 총열전달의 변화는 매우 작은 것으로 나타났다.

2. 지배방정식과 경계조건

Fig. 1에 도시된 바와 같이 가열된 등온구(isothermal sphere)가 맥동하는 기류에 고정되어 있을 때 층류유동의 경우 지배방정식은 연속 방정식, 비정상 Navier-Stokes 방정식 및 에너지 방정식으로 구성된다.

유동장이나 온도장은 레이놀즈수가 낮은 경우에는 Vortex shedding이 일어나지 않으므로 축대칭의 2차원으로 다룰 수 있다. 수치계산의 편의상 $z = \ln(r/a)$ 의 변환에 의하여 (r ,

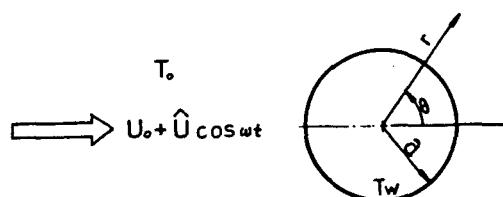


Fig. 1 Geometric configuration and coordinate system

과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\zeta_{i,j+1}^{m+1} - 2\zeta_{i,j}^{m+1} + \zeta_{i,j-1}^{m+1}}{Dz^2} + \frac{\zeta_{i,j-1}^{m+1} - \zeta_{i,j-1}^{m+1}}{2Dz} \\
 & + \cot \theta_i \frac{\zeta_{i+1,j}^{m+2} - \zeta_{i-1,j}^{m+2}}{2Dx} + \frac{\zeta_{i+1,j}^{m+2} + \zeta_{i-1,j}^{m+1} - 2\zeta_{i,j}^{m+2}}{Dx^2} \\
 & - \frac{\zeta_{i,j}^{m+2}}{\sin \theta_i} = \frac{1}{2} Re \left[e^{zj} \left(u_{i,j} \frac{\zeta_{i,j+1}^{m+1} - \zeta_{i,j-1}^{m+1}}{2Dz} \right. \right. \\
 & \left. \left. + u_{i,j}^m \frac{\zeta_{i+1,j}^{m+2} - \zeta_{i-1,j}^{m+2}}{2Dx} - u_{i,j} \zeta_{i,j}^{m+2} \right) \right. \\
 & \left. - \cot \theta_i v_{i,j}^m + e^{2zj} \frac{\zeta_{i,j}^{m+1,(m+2)} - \zeta_{i,j}^{m,(m+1)}}{Dt} \right] \dots (15)
 \end{aligned}$$

또한, 에너지방정식 (9)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{i,j+1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j-1}^{m+1}}{Dz^2} + \frac{T_{i,j-1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1}}{2Dz} \\
 & + \cot \theta_i \frac{T_{i+1,j}^{m+2} - T_{i-1,j}^{m+2}}{2Dz} + \frac{T_{i+1,j}^{m+2} - 2T_{i,j}^{m+2} + T_{i-1,j}^{m+2}}{Dz^2} \\
 & = \frac{1}{2} Re Pr \left[e^{zj} \left(u_{i,j}^m \frac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1}}{2Dz} + \right. \right. \\
 & \left. \left. v_{i,j}^m \frac{T_{i+1,j}^{m+2} - T_{i-1,j}^{m+2}}{2Dx} \right) \right. \\
 & \left. + e^{2zj} \frac{T_{i,j}^{m+1,(m+2)} - T_{i,j}^{m,(m+1)}}{Dt} \right] \dots (16)
 \end{aligned}$$

이상의 차분방정식 (14), (15), (16)을 풀면, 각 순간에 유동장과 온도장을 구할 수 있다.

4. 수치계산

1) 제 1단계 ; $t_m = mDt$

식 (14)에서 $\psi_{i,j}^m$ 의 계산, $u_{i,j}^m$ 및 $v_{i,j}^m$ 의 계산

2) 제 2단계 ; $t_{m+1} = (m+1)Dt$

식 (15), 식 (16)에 의한 $\zeta_{i,j}^{m+1}$ 와 $T_{i,j}^{m+1}$ 의 계산

3) 제 3단계 ; $t_{m+2} = (m+2)Dt$

식 (15), 식 (16)에 의한 $\zeta_{i,j}^{m+2}$ 와 $T_{i,j}^{m+2}$ 의 계산

$m+2 \rightarrow m$ 으로 하여 위의 과정을 반복하여 계산한다.

본 연구의 해석영역은 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq z \leq Z_m$ 으로서 (θ , Z) 평면에서 사각형이 되며 정사각형 격자인 $Dx = Dz$ 로 하였다. 원주방향(θ)과 반경방향(Z)의 격자수를 각각 (10 \times 10), (10 \times 20), (20 \times 20), (20 \times 40), (40 \times 40), (60 \times 60)으로 하여 시험한 결과 격자수 (20 \times 20)에 비하여 (60 \times 60)으로 계산한 결과는 3% 정도의 차이 밖에 없으므로 본 연구에서는 격자수를 (20 \times 20)으로 고정하였다.

따라서, 원주방향(θ)의 격자크기는 격자수를 20으로 고정하여 $D\theta = \pi / 20$, 즉 $D\theta = 9^\circ$ 가 되게 고정하였다. 또한 반경방향(Z)의 격자크기는 격자수를 20으로 고정하였으므로 $DZ = \pi / 20 = 0.157$ 로 되고 무한 경계값은 $Z_m = \pi$, 혹은 $r_m = 23.14$ 로 고정한 것이다.

여기서 Poisson 방정식 (14)식의 유동함수는 연속상이원법 (Successive Over Relaxation : S.O.R)에 의하여 계산하였으며, 수렴조건은

$$Max_{i,j} |\phi_{t+Dt} - \phi_t| \leq 10^{-4} \dots (17)$$

로 정하였다.

와도확산방정식 (15)와 에너지방정식 (16)은 Line by line Gauss 소거법에 의하여 와도 $\zeta_{i,j}$ 및 온도 $T_{i,j}$ 를 계산하였다.

계산의 시간간격 Dt 는 한 Cycle을 120등분 이상되게 다음 범위내로 하였다.

$$D(\omega' t') \leq \pi / 60 \dots (18)$$

계산을 시작하여 정상상태에 이른 것은 한 사이클 사이의 누셀트수의 차이가 다음 범위내에 있을 때로 하였다.

$$|Nu(\omega' t') - Nu(\omega' t' - 2\pi)| \leq 10^{-3} \dots (19)$$

계산이 주어진 수렴조건을 만족하면 누셀트수 (Nusselt number)의 국소값은 다음과 같이 구해진다.

$$Nu_\theta = -2 \frac{\partial T(0, \theta)}{\partial Z} \dots (20)$$

그리고 구 전체에 관한 평균 누셀트수는 다음과 같이 정의하였다.

$$Nu = 2 \int_0^\pi Nu_\theta \sin \theta d\theta \dots (21)$$

5. 결과 및 고찰

본 연구는 $1 \leq R_e \leq 40$ 인 경우에 한하였으며, 먼저 맥동이 없는 경우에 관하여 유동장과 온도장을 계산하였다.

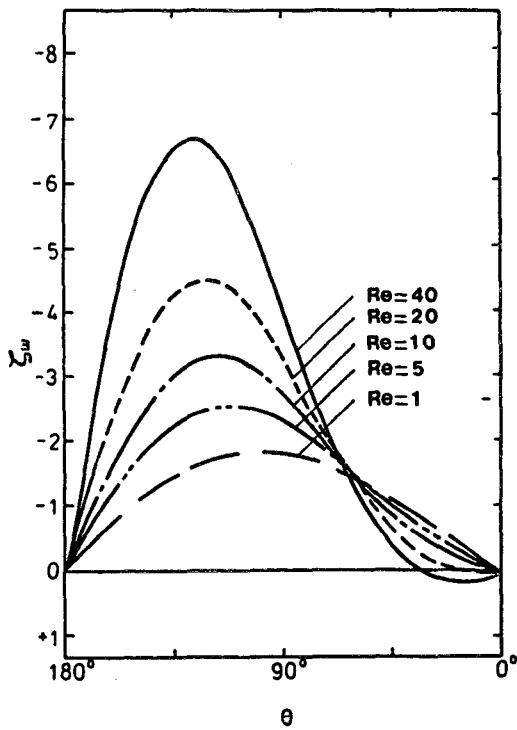


Fig.2 Steady wall vorticity distribution as a function of Reynolds number

Fig. 2는 각 레이놀즈수에 따른 벽면 와도 (Vorticity)의 분포를 도시한 것이다. 레이놀즈수가 커질수록 비대칭이 되며, 최대치가 커지는 것을 알 수 있고, 70° 근처에서 서로 교차하며, 120° 근처에서 최대값이 생기는 것을 알 수가 있다. 이러한 결과는 기존 연구결과와 잘 일치한다 [1].

Fig. 3은 국소 열전달 계수인 누셀트수 Nu_o 의 분포를 서로 다른 레이놀즈수에 대하여 도시한 것이다. 레이놀즈수가 커질수록 열전달은 더욱 커지며, 구의 후면 보다 구의 전면에

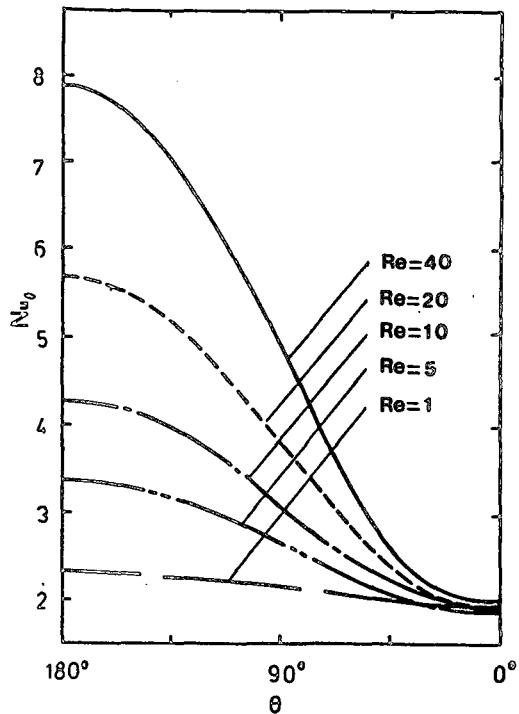


Fig.3 Steady local Nusselt number as a function of Reynolds number

서 크다. 그리고, 정상상태에서 평균 누셀트수 Nu_e 를 레이놀즈수 R_e 의 함수로 나타내면 다음과 같다.

식(22)는 Dennis 등⁽¹⁾이 $P_r = 0.73$ 일 때 구한 수치계산 결과와 유사하며 Whitaker [1]의 실험식 $Nu = 2 + (0.4 R_e^{\frac{1}{2}} + 0.06 R_e^{2/3}) P_r^{0.4}$ 와 비교하여 도시하면 Fig. 4 와 같다. 그림에서 수치계산의 결과는 실험식보다 열전달계수가 다소 낮은 값을 나타내고 있으나 레이놀즈수가 증가할 수록 실험과 계산은 잘 일치 하며 레이놀즈수가 가장 낮은 경우인 $Re = 1$ 에서 12% 정도의 오차를 보이고 있으므로 본 연구의 유동 범위에서 수치계산을 비교적 정확한 것으로 볼 수 있다.

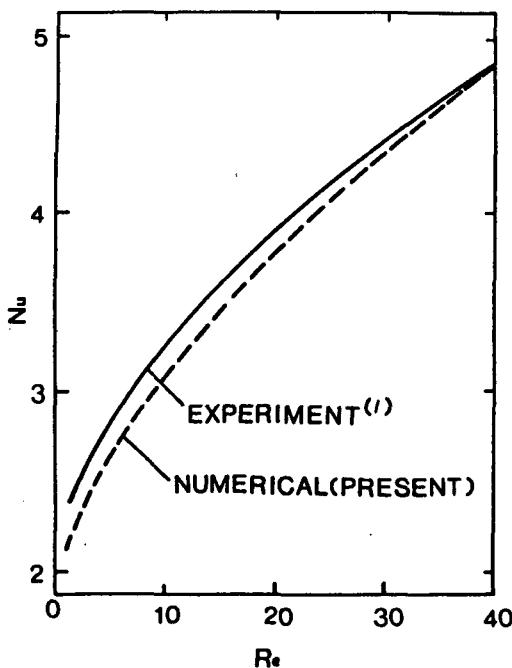


Fig.4 Numerical result for the heat transfer coefficients compared with the experimental correlation⁽¹⁾

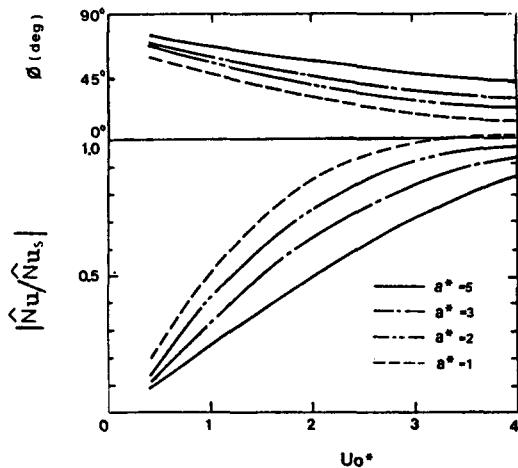
5.1 진폭이 작은 경우

진동성분의 진폭이 평균유속에 비하여 매우 작은 경우의 열전달 응답을 구하기 위하여 진폭비를 $\bar{D} = 0.05$ 로 고정하였다. 즉, 진폭이 평균유속의 5%인 맥동류의 경우이다. 응답특성은 프란틀수를 0.7로 고정하였기 때문에 2개의 매개변수의 함수로 구할 수 있으며, 여기서는 무차원화한 구의 반지름 a^* 와 평균유속 U_0^* 를 매개변수로 하였다.

$$a^* = a' (\omega' / \alpha)^{1/2} \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

$$U_0^* = U_0' / (\omega' \cdot \alpha)^{1/2} \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

무차원 변수 $(\alpha/\omega)^{1/2}$ 은 열음향 경계층 (thermoacoustic boundary layer)의 두께에 해당하는 양이므로 a^* 는 전동하는 열경계층의 두께에 대한 구의 반지름의 비를 나타낸다. 따라서 $(\omega'/\alpha)^{1/2}$ 은 열확산 속도 (thermal diffusivity)에 해당하는 양이다.



**Fig.5 Amplitude and phase delay (ϕ)
in the heat transfer response,
relative to the quasi-steady
response**

U_0^* 는 열 확산 속도에 대한 평균유속의 비를 의미한다.

맥동류에 대한 열전달 응답의 진폭과 위상을 구한 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 여기서 진폭은 (22)식에 순간속도를 대입하여 얻을 수 있는 준정상상태(quasisteady) 응답의 진폭 \hat{N}_{us} 에 대한 상대적인 값으로 도시한 것이다. 준정상상태 응답의 진폭은 맥동하는 자유흐름의 순간속도에 대응한 정상상태 열전달량이므로 식(22)로부터 구하면 다음과 같다.

$$\hat{N}u_s = 0.32 \times 0.61 R_e^{-0.61} \hat{U} \dots \dots \dots (25)$$

그림에서 열전달의 응답은 유속에 대하여 90° 이내의 위상지연을 나타내며, 진폭은 준정상태 보다 작은 것을 알 수 있다. 위상지연이 작으면 진폭은 증가하여 준정상상태 값에 접근하게 된다. 무차원 유속 U_0^* 가 작아지거나 무차원 반지름 a^* 가 커지면 열전달 응답의 위상지연이 커지며 그 진폭은 감소하는 것을 알 수 있다. 반대로 무차원 유속 U_0^* 가 증가하고 무차원 반지름 a_0^* 가 감소하게 되면, 열전달 응답은 유속과 위상이 같아지며 준정상상

태 응답에 접근하는 것을 알 수 있다. 이러한 특성은 무차원 척도를 생각하면 진동수의 변화로서도 설명할 수 있다. 진동수가 빠를수록 응답이 느려서 위상지연이 커지며, 반대로 진

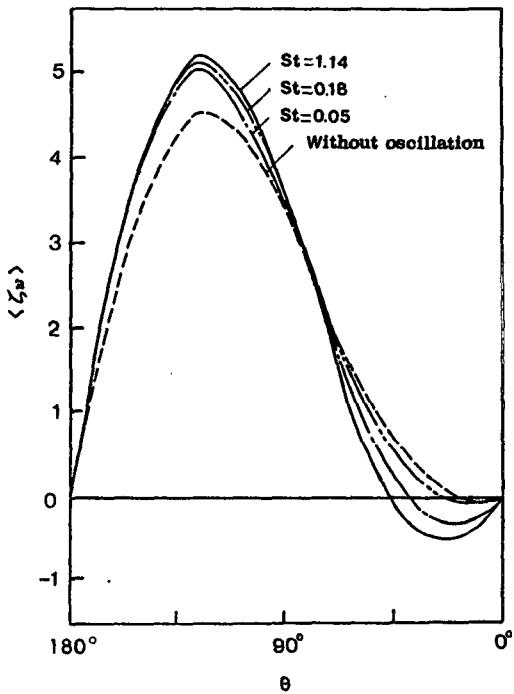


Fig.6 Time average of the fluctuating vorticity as a function of St-rouhal number, for $\bar{U}=0.75U_0$ and $Re=20$

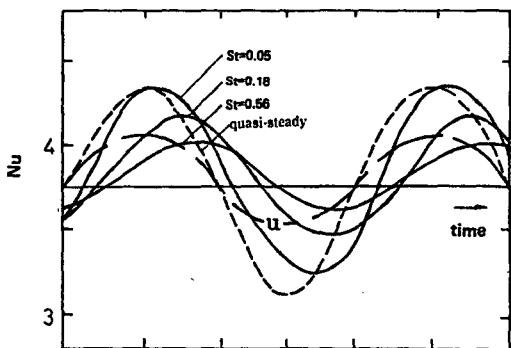


Fig.7 Time-dependent heat transfer response to the fluctuating flow as a function of Strouhal number, for $\dot{U}=0.75 U_0$ and $Re=20$

동수가 낮으면 응답이 빨라져서 준정상상태 응답에 가깝게 되는 것을 알 수 있다. 이러한 응답특성은 원통의 경우⁽⁶⁾와 유사함을 알 수 있다.

5.2 진폭이 큰 경우

액동류의 진동성분의 진폭이 큰 경우에 열전달 응답특성과 정미 열전달계수의 변화를 구하기 위하여 진폭비 $\hat{U} = 0.75$ 에서, 순간 페이놀즈수가 5에서 35 사이로 변동하는 경우에 대하여 계산하였다. 결과는 무차원 진동수인 스트라울(Strauhal) 수

를 매개변수로 하여 도시하였다.

먼저 유동특성을 알아보기 위한 벽면와도의 시간평균은 Fig. 6과 같다. 전동에 의하여 벽면와도의 크기는 증가되며, 특히 후방의 재순환영역이 크게 확대되어 박리점(Separation point)이 전방으로 이동한다. 이러한 현상은 음향흐름(acoustic streaming)이라고 하며 스트리울수가 증가할수록 현저해지는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 평균 열 전달계수의 순시응답(*instantaneous response*) $Nu(t)$ 을 준정상상태 응답과 비교한 것이다. 그림에서 응답판형은 정현파가 아닌 것을 알 수 있다. 유속이 빠른 순간에는 응답이 빠르나, 유속이 느릴 때에는 응답도 늦어진다. 이 경우에 순간속도가 열전달 응답특성에 미치는 영향은 Fig. 5에서 진폭이 작은 경우에 평균유속의 영향과 비슷한 것임을 알 수 있다. 또한 스트라울수가 낮을 수록 진폭은 커지고 준정상상태 응답에 가깝게 된다. 반대로 스트라울수가 커지면 위상지연이 커지고 진폭은 감소한다.

Fig. 8은 국소 열전달계수의 시간평균값인 정미열전달률을 도시한 것이다. 맥동이 없는 경우에 비하여 맥동이 있으면 국소값이 변하는 것을 알 수 있다. 구의 전방 정체점 부근에서는 맥동이 있는 경우가 맥동이 없는 경우에 비하여 열전달이 감소하나 구의 후방 재순

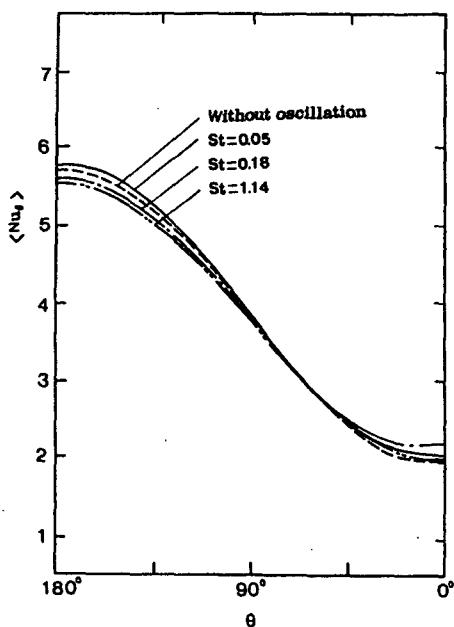


Fig. 8 Time average of the local heat transfer coefficient, $\langle \text{Nu}_\theta \rangle$, as a function of Strouhal number, for $U = 0.75 U_0$ and $Re=20$

환영역에서는 증가한다. 이러한 국소값의 변화는 스트라울수가 작을수록 커진다. 그러나, 전방에서 감소와 후방에서 증가가 비슷하여 총 열전달률에는 뚜렷한 변화가 없다.

Fig. 9는 세점 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 에서 국소 누센트수의 시간에 따른 변화에 도시하였다. 구의 전방($\theta = \pi$)에서는 유속의 변화와 거의 같은 위상의 변화를 나타내나, 구의 후방($\theta = 0$)에서는 유속의 변화와 비교할 때 180° 의 위상지연이 있다. 즉, 구의 전방에서 열전달응답은 유동과 거의 같은 위상으로 되나, 후방으로 갈수록 위상이 늦어져서 후방 정체점 가까이 가면 180° 까지 늦어지는 것을 알 수 있다.

이상과 같은 구로부터의 열전달특성은 원통의 경우⁽⁵⁾와 매우 유사한 것을 알 수 있다.

6. 결 론

맥동류에 놓인 구로부터의 열전달특성을 수치적으로 모사한 결과 다음과 같은 결론을 내

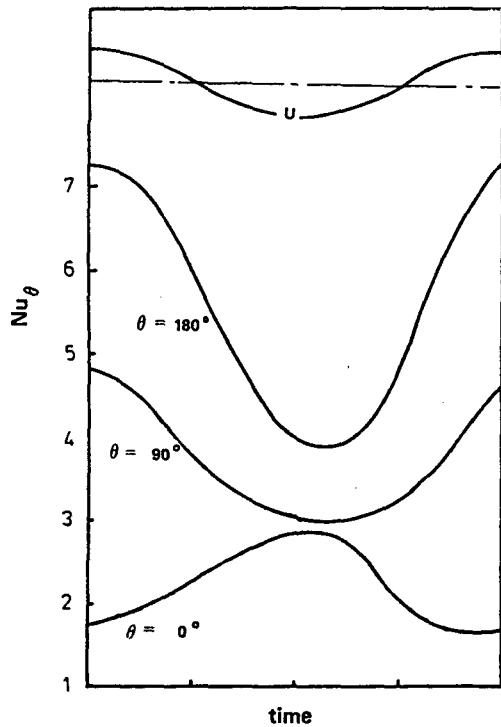


Fig. 9 Time-dependent local heat transfer response to the fluctuating flow for the same conditions in Fig. 7

릴 수 있다.

1) 맥동류의 진폭이 작은 경우, 열전달 응답은 무차원 평균유속 U_0^* 가 느리거나 무차원 반지름 a^* 가 클수록 위상지연이 크게 되고 진폭이 감소한다. 그러나 U_0^* 가 커지거나 a^* 가 작아지면 열전달은 유속과 위상이 같아지고 준정상상태 응답과 진폭이 같게 된다.

2) 맥동류의 진폭이 클 경우, 열전달의 순시응답은 순간속도에 따라 변하며, 속도가 클 때는 준정상상태에 가깝게 되나 속도가 느릴 때에는 응답이 늦어진다. 그리고 스트라울수가 낮을수록 열전달은 준정상상태 응답에 가깝게 되며, 스트라울수가 높으면 열전달 응답의 위상이 지연되고 진폭이 작아진다. 또한 구의 전방에서는 응답이 빠르고 후방에서는 응답이 180° 가까이 늦어진다.

3) 기류의 맥동에 의하여 구에서 열전달의 시간평균값의 변화인 열음향흐름이 발생한다. 즉 맥동에 의하여 구의 전방에서는 열전달이 감소하고, 후방의 재순환영역에서는 증가한다. 이러한 특성은 무차원 진동수인 스트라울수가 있을수록 현저해진다. 그러나 국소적인 변화는 서로 상쇄되어 총열전달률은 거의 변하지 않는다.

4) 기류의 맥동에 의한 음향흐름(acoustic streaming)으로 유동장이 현저하게 변화한다. 즉, 시간평균 벽면와도는 스트라울수가 클수록 증가하며, 박리점은 구의 전방으로 이동하여 재순환영역이 확대된다.

참 고 문 헌

1. S.C.R. Dennis, J.D.A. Walker & J.D. Hudson, "Heat transfer from a sphere at low Reynolds number," *J. Fluid Mech.*, Vol. 60, Part 2, pp. 273-283, 1973.
2. N. Konopliv and E.M. Sparrow," Unsteady heat transfer and temperature for Stokesian flow about a sphere," *Tr. ASME, Jr. Heat Transfer*, August 1972, pp. 266-272, 1972.
3. B. Abromzon and C. Elata, "Unsteady heat transfer from a single sphere in Stokes flow," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 687-695, 1984.
4. Y.P. Kwon and B.H. Lee, "Stability of the Rijke thermoacoustic oscillation; *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 78(4), pp. 1414-1420, 1985.
5. Y.P. Kwon, "A study on the thermoacoustic oscillation" Ph.D. Thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 1986.
6. Y.P. Kwon and B.H. Lee, "Heat transfer response of an isothermal cylinder to fluctuating cross flow", *KSME*, Vol. 10(5), pp. 706-712, 1986.
7. P.J. Roache, *Computational Fluid Mechanics*, Hermosa Publishers, 1976.