우리생활을 바꿀 대발명 ⑩

素數와 銅錢

조 P. 벌러
〈리드대학 부교수〉

책상위의 1센트 동전을 놓고 이 동전과 동시에 접촉할 수 있는 1센트 동전의 수는 몇개나 될 것이가? 간단한 실험으로는 6개라는 답이 나온다.

이것은 이른바 '키스문제(접촉문제)'의 2차원의 예이다. 3차원(구)의 경우는 13개이상은 무리이며 12개라는 것이 뉴튼의 추측이었다. 그러나 완전한 증명이 나온 것은 19세기 이후의 일이었다.

오늘날은 3차원의 접촉문제로 쩔쩔 매는 정도의 수학자는 아무도 없다. 문제는 임의의 n차원의 구에 중복하지 않고 접촉할 수 있는 n차원구는 몇 개일까 하는 것이 된다.

우리가 살고 있는 공간은 3차원이기 때문에 이에 대한 답은 아무 실용성도 없는 수학 놀이처럼 보일지는 몰라도 사실은 그렇지 않다. 예컨대 이 문제는 신호이론에서 에러수정코드라는 것에 응용되고 있으며 간섭노이즈가 있어도 확실한 메시지를 보내기 위해 연구를 하고 있는 것이다.

벨연구소의 니일 슬론과 앤드루 오들리즈코는 이 n차원문제에 컴퓨터를 응용하여 커다란 성공을 거두었다. 매우 어려운 계산을 하여 해답의 상한을 줄 수 있는 몇가지의 방정식을 도출한 것이다. 특히 8차원의 경우는 240, 24차원의 경우는 196, 560이라는 매우 명쾌한 해답을 얻을 수 있었다.

그런데 재미있는 사실은 3차원의 다음인 4차원의 답이 나오지 않는다는 것이다. 슬론과 오들리즈코의 연구에 따르면 24개이상은 가능하고 26개 이상은 불가능하다고 하는데 과연 24개인지 또는 25개인지 그런 점이 모호하다.

이 n차원접촉문제는 실은 최근의 수학연구의 최첨단의 추세를 대표하고 있다. 그것은 방정식을 만들 때 컴퓨터를 실험적으로 사용하기 때문이다. 실험적이라는 것은 예컨대 슬론과 오들리즈코는 컴퓨터로 무수한 해답을 만들어 내면서 이것을 실험해 부적당하다는 것이 밝혀진 답은 컴퓨터에서 차례로 버려 나갔던 것이다.

수학에서의 실험이라는 것은 종래의 사고방법에서 볼 때는 말에 모순이 있는 것처럼 생각된다. 요컨대 플라톤이래의 수학의 전통에서는 우리의 감각적인 의식에서 초월한 절대적인 수학적 진리가 있다는 것이었다. 수학은 본시 추상적인 것이

라는 사고방식은 과학자가 실험이나 관찰에 의존하는 방법과는 다른 선명한 대비를 이루고 있었던 것이다.

수학적인 진리를 발견(증명하는 것이 아니라)한다는 풍조는 매우 자극적인 것이다. 흡사 강력한 망원경이 천문학의 모습을 바꾸고 소립자 가스기가 물리학을 바꾸듯 컴퓨터는 앞으로의 수학에 커다란 변화를 가져올지 모른다. 실제로 수학적인 실험에 의한 부산물도 뒤를 이어 태어나고 있으며 이것은 장차 우리의 생활도 바꿔 나갈 것이다.

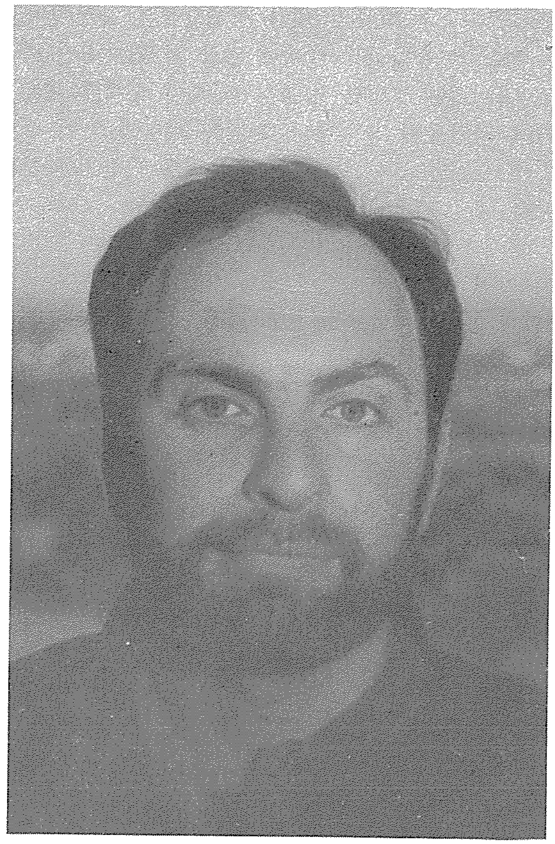
발견을 하기위한 계산의 역사는 실상 오랜 전통을 갖고 있다. 계산으로 실례를 얻고 실례에서 운이 좋으면 일반원리를 얻을 수 있는 그런 실례가 素數定理다.

소수란 그 자체와 1외의 수로는 나눌 수 없는 자연수를 말한다(단 1은 제외). 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,19…로 수없이 자연수는 이어 나가는데 그 수열은 혼돈한 것처럼 보이지만 규칙적이며 쉽게 단순화를 허용하지 않는 자연의 신비의 하나라고 할 수 있다.

소수의 방대한 리스트는 이미 18세기에 작성되었다. 그리고 18세기의 마지막 10년간 독일의 수학자 가우스와 프랑스의 르 장드르가 각각 독자적으로 소수의 수열은 대충 말해서 發散한다는 것을 발견했다. 곧 임의의 자연수 n까지의 소수의 밀도는 n의 자연대수에 반비례한다는 것이다.

아마도 실험과학자라면 서슴치 않고 이것을 진실로 믿었을 것이다. 그러나 이런 일에는 지나치게 까다로운 사람들이 수학자들이어서 앞의 소수정리가 증명된 것은 1896년이었으며 가우스등이 이 정리를 발견한 뒤 거의 100년이나 지난 뒤의 일이었다. 프랑스의 드라 발레푸상과 그의 동료인 아다마르가 각각 독자적으로 증명에 성공했던 것이다.

오늘날도 가우스와 르잔드르가 발견한 정도로 머물러 있는 추론이 몇개 있다. 매서추세츠공대(MIT)와 캘리포니어대학(샌 디아고)에서 연구하고 있는 해롤드 스타크의 발견인 '무한수열의 합'은 순수한 '대수적인 수' 의 對數와 같다는 것이다. 이를테면 전혀 다른 방법으로 만든 2개의 수가 실은



▲ "스크린을 보고 안 사실이지만 우리들이 연구하고 있던 '표면'은 뜻밖에도 시메트리(대칭)을 갖고 있었다"
-데이비드 호프만-

같다는 것이다.

그 예를 보면 $\dfrac{\log_e(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\cdots\cdots$$

여기서 오른쪽 변과 왼쪽 변을 소수점이하로 영원히 계산해 보아도 양쪽 변은 같다. 상식적으로 생각할 때 소수점이하 40 또는 50자리까지 일치한다면 2개의 수는 맞는다고 보아도 될 것이다. 스타크의 추측은 실험이라는 바탕에서 볼 때 진리라고 해도 좋을 것이다.

컴퓨터는 수학자의 능력을 훨씬 초월한 계산능력을 보여주는 한편 복잡한 기하학적정보를 선명한 화상으로서도 보여준다. 기하학에 관해서는 컴퓨터의 출현 이전에 불과 몇개의 실험예가 있을

뿐이었다. 그 하나의 예가 비눗방울의 문제이다. 철사로 된 틀을 비누액속에 잠근 뒤 건져내면 비누막은 어떤 모양을 만들것인가? 이 문제에 대해 여러 사람들이 도전했다. 그것은 비누막은 이 틀 속에서 표면적이 최소가 되게 모양을 만들기 때문이다.

매서추세츠대학의 데이비드 호프만과 라이스대학의 윌리엄 미크스 3세는 이 비눗방울 문제에 대해 컴퓨터로 시뮬레이션을 했다. 이 결과 두사람은 브라질의 수학자 셀소 코스타가 제출한 비누막에 관한 복잡한 방정식을 완벽하게 이해할 수 있게 되었다. 두사람이 한 방법은 코스타의 방정식을 화상으로 바꾸고 이 화상을 자유롭게 조작할 수 있게 만든 것이다. 이 화상은 최소면적의 기본 특성을 밝히는데 크게 이바지했으며 미발견의 새로운 최소면적 곡면을 찾아냈다. 컴퓨터에 의한 도형의 관찰, 분석 그리고 수학적증명이라는 이들의 방법은 컴퓨터의 탁월한 그래픽능력없이는 전혀 생각조차 할 수 없는 것이었다.

비눗방울 문제만 아니라 컴퓨터에 의한 그래픽화의 진보는 앞으로 수학자에게 새로운 시야를 제공하여 새로운 수학이 탄생할 것으로 전망된다.

한편 계산적이라기 보다는 시각적인 요소가 강한 것이 非線形 역학계의 분야이다. 역학계는 시간의 경과에 따라 변화가 정해지는 시스템을 말한다. 그런데 어떤 계가 기본적으로 '중합'이 가능하면 그것은 선이다. 곧 수식으로 나타낸 그 계의 2개의 상태를 합쳤을 때 그 합친 계도 최초의 계와 같은 특성을 가질 때 이것은 선형이라고 말한다. 이 선형시스템의 예는 바이올린의 弦, 전자장 특히 양자론등에서 흔히 볼 수 있다. 종래의 응용수학의 획기적인 성과중에는 선형시스템에 관련된 것이 많았다.

선형은 엄밀한 수학적 분석으로 다루기 쉽다고 생각되고 있다.

그런데 불행이도 과학적으로 봐 중요한 자연시스템은 거의가 모두 본래부터 비선형이다. 예컨대 기상시스템은 일정한 인과법칙은 있다고 하지만 바이올린의 현이 진동할 때와 같이 정확한 미래예측은 불가능하다. 비선형 시스템의 대표적인 다른 사례는 유체역학이다. 유체의 흐름을 나타내는 식은 복잡한 비선형방정식이며 그 태반은 어떤 수를 써도 풀 수가 없다.

따라서 비선형방정식을 연구하는 유일한 방법은 실험이라는 경우가 흔이 있어 우선 연구자들은 몇개의 해답을 계산하여 이것을 도형으로 표현한다. 이런 연구방법은 옛날에 훈련을 받은 수학자들에게 수학적이라고 생각되지 않을 지 모른다. 그러나 그 귀납적인 수법은 매우 큰 영향력을 갖기 시작했다. 실제로 실험수학이라고 했을 때 이것은 흔이 비선형역학계 연구에 한정되는 일이 있다.

이른바 로지스틱 방정식은 비선형시스템의 좋은 예이다. 예컨대 a를 정수로 하고 x에 어떤 값을 주어서 ax(1−x)를 계산하여 그 답을 또 ax(x−1)의

▼"실험적 계산은 다른 방법으로서는 무리한 문제에 유효하다. 무질서한 현상의 연구에서의 진보는 실험적 방법으로만이 가능하다" －미첼 파이겐바움－

x에 넣어 답을 낸다. 이렇게 같은 조작을 계속하여 나온 수열을 만들면 어떻게 될까?

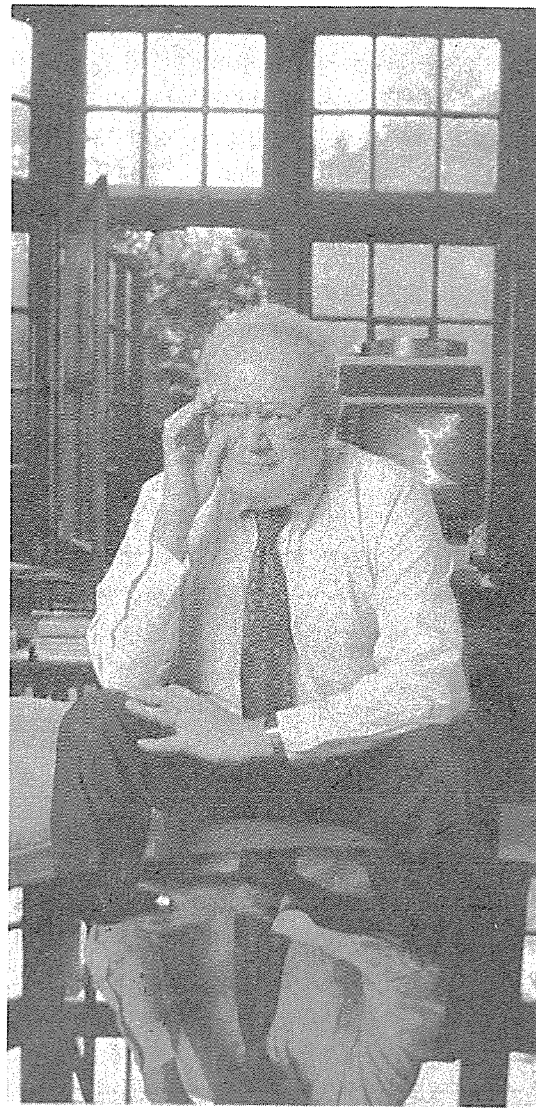
이 계산은 컴퓨터는 물론 탁상계산기로도 할 수 있다. 예컨대 x=0.5로 시작하여 a=3.25를 얻으면 식의 최초의 답은 0.8125가 된다. 다음에 이 수를 x로 두면 식의 두번째의 답은 0.4951이 되고 이것을 다시 x로 하면 이번에는 0.8124를 얻는다. 이렇게 해서 다음과 같은 수열을 얻을 수 있다.

0.5, 0.8125, 0.4951, 0.8124, 0.4952, 0.8124, 0.4952, 0.8124,.........

이 수열은 2개의 '收束点' 사이를 진동하고 있는 것처럼 생각된다. 이런 종류의 실험은 즐거운 머리운동이 된다. x의 최초의 값 또는 정수 a의 값을 바꿀 때 어떻게 될 것인가? x의 값을 바꾸었을 때 일반적으로 수열의 성질에는 변화가 생기지 않는다. 예컨대 x의 최초의 값이 무엇이든간에 a=3.25이면 2점진동을 한다. 그러나 정수 a를 바꾸면 큰 변화가 일어 난다. a가 3이하일 때는 수열은 하나의 값으로 수속된다. 또 3보다 큰 a의 값에 대해서는 수열은 2점, 4점, 8점 또는 그 이상의 수속치를 갖는다. 만약에 a가 3.57부근의 임계값을 넘어서 증가해 가면 수열은 혼란해져서 그곳에서는 어떤 패턴도 볼 수 없게 된다.

이것은 다루기가 좋은 문제처럼 보였다. 어떻게 보면 단순한 수열에 지나지 않는 것처럼 보였다. 그런데 코넬대학의 미첼 파이겐바움은 이 수열이 갖는 특성이 여러 종류의 다양한 역학계에 공통되는 것이라는 사실을 밝혔다. 그 이론적 귀결은 매우 놀랄만한 것이었으며 막대한 수의 임의의 계열에는 하나의 현저한 공통성이 있다는 것이다. 그러나 이 아이디어의 근본은 탁상계산기가 만들어낸 수열을 처다보는 단순한 일에서 시작된 것이다.

더욱 복잡한 비선형역학계가 되면 더욱 더 다채로운 특징을 보여준다. 실험 수학자들은 이것을 '리미트 사이클', '스트레인지 어트랙터', '혼돈', 그리고 '프랙털' 이라고 부른다. 이런 특징을 나타내는 복잡한 방정식에 대해서 앞의 로지스틱 방정식 정도의 이해를 얻으려면 우선 방대한 컴퓨터계산으로 복잡한 괴물의 구체적인 모습을 아는 것이 중요하다.



▲"프랙털에 관해 매우 흥미진진한 사실중의 대부분이 컴퓨터에 의한 실험중에서 관찰되었다. 컴퓨터의 신뢰성 없이는 산이나 구름의 수학모델을 만들 수 있으리라고는 믿어줄 사람은 아무도 없었을 것이다"

－베노이트 맨들브로트－

때로는 실험으로 예기하지 않았던 규칙성이 나타나는 일이 있다. 예컨대 어떤 종류의 비선형방정식에는 날카로운 펄즈와 같은 해답이 있다는 것이 관찰되고 있다. 곧 무질서일 것이라는 예상에 반하여 매우 규칙적인 해답이 나타나는 것이다. 이런 해답은 현재 '솔리톤'이라고 불리고 있으며

물의 파도에서 광학 펄스에 이르기까지 많은 자연현상의 모델이라는 사실이 알려졌다. 이 리소톤의 이론적인 해석중에는 컴퓨터계산에서 나온 것이 많다. 이 분야는 수학의 실험적방법의 유효성을 측정하는 사례연구이기도 하다.

실험적 수학의 새로운 괴물중에서도 특히 두드러지게 돋보이는 것은 프랙털이라는 기하학적 개념이며 그 명명자이며 연구자가 IBM 토마스 와트슨연구소 및 하바드대학에 적을 둔 베노이트 맨들브로트이다.

프랙털은 일종의 불규칙도형이며 구름의 윤곽이라든가 산허리의 지형등 자연계에서 흔이 볼 수 있는 모양이다. 보통의 기하학적 도형과는 달리 프랙털 경우 세부적인 면이 무한하게 풍부하다. 예컨대 고전적인 커브는 상세하게 보면 그럴수록 직선적으로 되어 가지만 프랙털은 아무리 상세하게 쳐다 보아도 세부의 미묘성은 처음과 변하지 않는다.

종래 이런 도형은 계측하기가 어려워서 이런 것을 본격적으로 연구하기에는 너무나 '병적'이라고 생각해 왔다. 맨들브로트등의 최신의 연구는 프랙털이 여러 상황에서 생긴다는 것을 분명히 하고 있다. 여기서 얻는 풍부한 실험정보로 프랙털 도형의 이론적인 이해는 더욱 더 심화될 것이다.

프랙털은 자연계의 모양을 모델화하는데 그치지 않고 그 모양을 화상으로 모방하기 위해서도 쓰이고 있다. 컴퓨터 스크린에 매우 자연스런 산이나 나무나 구름을 그릴 수 있게 되었다.

지금까지는 컴퓨터에게 증명을 시킨 예는 없으나 앞으로는 이것까지도 바뀔 가능성이 있다. 이런 하나의 예는 일리노이대학의 케니스 애플과 월프강 헤이켄에 의해 증명된 4색원리이다. 이 정리가 주장하는 것은 다만 4색으로서 국경을 함께 하는 두나라가 같은 색을 갖는 나라가 없게 어떤 지도라도 색을 가려서 국가들을 칠할 수 있다는 것이다. 간단한 실험으로 이것이 진실일 것 같다고 믿게 될 것이다. 그러나 수학자들에게는 이런 증거만으로는 충분하지가 않다.

4색정리의 증명은 100년이상이나 수학자들의 그물을 피해왔다. 증명에는 대량의 사례분석이 필요하며 이것은 사람의 손으로서는 감당할 수가 없는 것이었다.

그래서 1960년대에 들어와서 컴퓨터에 눈을 돌리게 되었다. 애플과 헤이켄은 컴퓨터수법을 세련하여 일정수의 계산에 바탕을 두고 4색정리가 옳다는 것을 증명할 수 있게 되었다. 컴퓨터는 지치지 않는 끈기를 가지고 가능한 케이스를 하나하나 입증해 나갔다. 그 계산량은 가장 맹렬한 인간의 작업량보다 훨씬 능가하는 것이었다.

이리하여 마침내 컴퓨터는 수학적증명이라는 작업에 참여하게 된 것이다. 그리고 최종적으로 실험과학자들에게 낯익은 방법으로 검증을 받았다. 헤이켄과 애플의 결과는 다른 컴퓨터연구자들이 독자적으로 얻은 결과와 조회를 받은 것이다.

이런 사례는 예외적이라고 말할 수 있을지 모른다. 컴퓨터는 아직도 여러 증명에서 중심적인 역할은 하지 않고 있다. 설사 인공지능연구자들이 기계에게 공리로부터 직접 정리를 증명시키고 싶어도 현재로서는 아직도 현실과는 매우 먼 거리에 있는 것 같다. 앞으로도 컴퓨터가 그렇게 다재다능하거나 독립할 수 있게 되리라고는 생각되지 않는다. 그것보다는 오히려 컴퓨터 또는 컴퓨터가 만들어내는 아이디어가 전통적인 수학과 상승적인 관계를 발전시켜 나가리라고 생각된다.

이 협조정신의 최근의 발현을 큰 整數에 대한 素因數분해 수법에서 볼 수 있다. 적어도 상당한 개연성을 가지고 큰 정수가 소수인가 아닌가를 말하기가 어렵다. 만약에 소수가 아니라면 그것은 2개 또는 그 이상의 소인수로 분해할 수 있다.

예컨대 하나의 정수 146, 527, 939, 924, 199는 2개의 소수 1, 445, 599와 101, 361, 401의 積으로 된 것이다. 그러나 현재 소수가 아닌 큰 정수에 관해서는 그 인수를 일반적으로 산출해 내는 방법은 알지 못한다.

지난 10년간 발달된 암호의 이론은 그 안전성을 정수의 인수분해가 어렵다는데 맡기고 있다. 그래서 미국 국가안전보장국은 인수분해의 연구에 관심을 갖고 있다. 거꾸로 암호문제는 정수를 인수분해하는 수법인 알고리즘에 관해 수학자들의 큰 관심을 불러 일으켰던 것이다.

이 방면의 전진은 변증법적으로 이루어지고 있는 것 같다. 우선 새로운 이론적인 아이디어가 개량된 알고리즘으로 번역된다. 이 알고리즘이 컴퓨터 프로그램의 형식으로 테스트를 받고 그 결과가 흔히 새로운 아이디어나 앞으로의 전략을 제시한다. 이 아이디어가 다시 새롭고 더욱 우수한 알고리즘을 만드는데 도움을 준다. 이렇게 해서 수학을 컴퓨터에게 이해하기 쉬운 것으로 만들려는 의욕이 새로운 수학의 길을 열어 놓고 있는 것이다.

최근의 수학자들은 더욱 더 수학적인 여러 성질의 존재를 아는 것으로만 만족하지 않고 그 발견 방법을 알고 싶어한다. 이 알고리즘적(연산적)인 견지는 본래 컴퓨터의 존재와는 관계가 없는 것이었다. 그러나 최근에 와서 이런 입장이 유행하게 된 것은 컴퓨터가 오늘의 수학계에 미치는 영향력이 커졌다는 것과 관계가 있다.

그렇다고 해서 위의 사례로부터 수학이 컴퓨터 없이는 할 수 없다고 생각하는 것은 잘못된 추론이다. 수학자간에서 컴퓨터를 싫어하는 비율은 거의 일반인의 비율과 다를 것이 없을 정도로 높다.

그러나 현재 중요한 위치를 차지하고 있는 실험적 알고리즘적 수법은 더욱 더 힘을 얻게 될 것은 틀림없다고 하겠다. 수학의 역사는 경이에 가득 차있다. 그리고 미래의 경이의 대부분은 최근까지 예상도 하지 못했던 무서운 새로운 도구와 새로운 방법으로 제공될 것이다.

玄 源 福 譯
〈科學저널리스트〉