로봇 동력학

金 鎬 龍
연세대학교 기계공학과 교수

● 1947년 6월 14일생
● 기구학 및 동력학을 전공하였으며, 특히 로봇공학, CAD/CAM통합 및 최적설계 등에 관심이 있다.

1. 머리말

로봇의 기본 목적은 그 첨단부(end effector ; hand, gripper, tool)를 조작하는 데에 있다.

이 첨단부는 로봇 주위 환경과 물리적 연계를 갖게되며 작업수행시 로봇은 그 작업 대상물의 위치와 첨단부의 존재위치를 알아야 한다.

따라서 로봇은 운동학적 모델(kinematic model)이 필요하게 되며 동력학적 고찰에 있어서 운동학적 고찰이 필요하다. 운동학적 고찰에서는 2개의 좌표계(기준 좌표계와 조인트 좌표계)와 그 좌표계 사이의 正, 逆寫像(forward and inverse mapping)에 대해 살펴보겠다.

동력학적 고찰에서는 전술한 운동학적 고찰에서의 결과가 어떻게 로봇의 동력학적 방정식의 유도에 사용되며 또 이 방정식의 사용방법(로봇의 설계, 모델링 또는 시뮬레이션, 제어 등)과 용도에 대하여 개괄적으로 살펴보겠다. 마지막으로 로봇 동력학의 적용예로서 최소시간을 위한 로봇 궤도의 설명에 대하여 간략히 설명하려 한다.

2. 운동학(Kinematics)

본 절에서는 운동학적 모델의 설정과 이 모델이 어떻게 각 링크의 위치, 속도, 가속도를 정의하고, 결국 첨단부의 운동을 어떻게 정의하는가에 대해 살펴보겠다.

2.1 좌표계와 동차변환(Coordinates System and Homogeneous Transformation)

로봇의 위치를 서술하는데 사용되는 좌표계는 2가지가 사용된다. 기준(절대)좌표계와 조인트(상대)좌표계이다. 기준좌표계는 로봇 베이스(base)에 고정된 오른손 직교 좌표계이다. 조인트 좌표계는 조인트 사이의 상대적인 위치를 나타내는 좌표계로서 조인트가 회전대우일때 그 위치는 라디안(radian)으로, 직진대우일때에는 길이의 단위로 측정된다.

사용되기 편리한 조인트좌표계는 수동기구(passive mechanism)인 연쇄기구(linkage)의 운동을 해석하는데 있어서 Hartenberg-Denavit에 의해 처음으로 제안되었다.

공간에서의 3차원 운동의 정의를 3개의 병진과 3개의 회전 즉 6개의 매개변수로 정의하는 대신 이 두사람은 그림 1과 같이 a, α, d, θ의 4

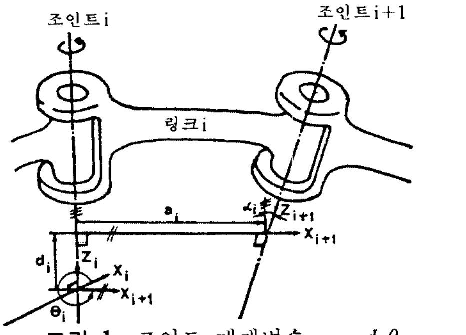

그림 1 조인트 매개변수 a, α, d, θ

$$A_i = \left[\begin{array}{c:c} R(\text{회전}) & P(\text{병진}) \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

개 매개변수로 간단히 정의하였다. 이 4개 변수는 보통 로봇의 운동학적 매개변수(kinematic parameter)라고도 한다.

실제 로봇운동에 있어서는 이 4개 매개변수 중 오직 한개만이 변수가 되는데, 조인트가 회전대우 일때는 θ_i가 직진대우 일때는 d_i가 변수가 되며 나머지는 상수가 된다. 조인트간의 상대위치와 첨단부의 위치 및 방향은 식(1)과 같은 4×4 동차변환행렬로 구하여진다.

행렬 A_i에서 회전운동에 해당하는 요소들은 그림 1의 좌표계에서 방향여현(direction cosine)값들이다.

2.2 正運動學(Forward Kinematics)과 逆運動學(Inverse Kinematics)

로봇의 正運動學은 조인트변수의 함수로 각 링크나 첨단부의 위치 또는 운동을 계산하는 과정으로서, 각 조인트의 변환행렬 A_i를 식(2)와 같이 연속곱하여, 해당부의 위치나 운동에 대한 변환행렬 T_i를 구하여 수행한다.

$$T_i = A_1, A_2, \cdots A_i \quad (2)$$

이에 반하여 첨단부의 위치 또는 운동좌표로부터 逆으로 각 조인트 변수(θ 또는 d)의 값들을 구하는 변환 과정을 逆運動學이라고 하며 다음과 같이 행렬식을 이용하여 전개한다.

즉 j조인트에 첨단부가 있고 첨단부의 동차변환 행렬 T_j가 주어졌을 때 조인트의 일반좌표 변수인 q는 q_1부터 q_j까지 순차적으로 구한다. $T_j = A_1A_2\cdots A_j$이므로 T_j에 A_1^{-1}을 前積하면,

$$A_1^{-1}T_j = A_2\cdots A_j \quad (3)$$

식 (3)에 다시 A_2^{-1}를 전적하면

$$\begin{aligned} &A_2^{-1}A_1^{-1}T_j = A_3\cdots A_j \\ &\qquad\vdots \\ &A_{j-1}^{-1}A_{j-2}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}T_j = A_j \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 식 (3)과 (4)로부터 $j-1$개의 방정식을 얻으며, 이 방정식들에서 왼쪽 항들은 주어진 T_j과 조인트 변수(θ_i)의 함수로 구성되어 있고 오른쪽 항들은 0, 상수 또는 조인트 변수의 함수로 구성되어 있다. 따라서 식 (3)에서 12개의 방정식이 얻어지며 왼쪽항과 오른쪽항의 각 요소를 비교하여 조인트 변수 q_1을 구한 다음 식 (4)에 대입하여 순차적으로 $q_2\cdots q_j$까지 구한다.

2.3 운동학적 미분관계식

조인트 좌표계와 첨단부의 위치를 표시하는 기준좌표계 사이의 미분관계식은 로봇의 동력학적 방정식인 Lagrange-Euler 방정식의 계산에 필요하다. 로봇에서 i번째 조인트 변수를 q_i, q_i의 미소변화에 대한 A_i의 변화를 dA_i라고 하면, $A_i + dA_i$는 A_i를 벡터 $\overline{k}$에 대하여 $d\theta$만큼 미소회전시키고 다시 dx, dy, dz 만큼 미소이동시킨 것과 같으므로,

$$\begin{aligned} A_i + dA_i &= Trans(dx, dy, dz) \\ &\quad \times Rot(\overline{k}, d\theta)\cdot A_i \end{aligned} \quad (5)$$

따라서,

$$\begin{aligned} dA_i &= \{Trans(dx, dy, dz) \\ &\quad \times Rot(\overline{k}, d\theta) - I\}\cdot A_i \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에 미분 연산자 Q_i를 도입하면

$$dA_i = Q_iA_i \quad (7)$$

여기서,

$$Q_i = \{Trans(dx, dy, dz)Rot(\overline{k}, d\theta) - I\} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z d\theta & k_y d\theta & dx \\ k_z d\theta & 0 & -k_y d\theta & dy \\ -k_y d\theta & k_y d\theta & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)에서 회전대우시에는 $k_x = k_y = dx = dy = dz = 0$이며 직진대우시에는 $k_x = k_y = k_z = dx = dy = 0$이다. 한편 q_i의 미소변화에 대한

$T_i(j \geq i)$의 미소변화는

$$\frac{\partial T_j}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}(A_1A_2\cdots A_{i-1}A_i\cdots A_j)$$
$$=(A_1\cdots A_{i-1})Q_i(A_1\cdots A_{i-1})^{-1}T_j \quad (9)$$

따라서 $^j\Delta_i=(A_1\cdots A_{i-1})Q_i(A_1\cdots A_{i-1})^{-1}$ (10)

로 놓으면,

$$\frac{\partial T_j}{\partial q_i}={}^j\Delta_i T_j \quad (11)$$

여기서 $^j\Delta_i$는 미분연산자이다.

식 (11)에서

$$(A_1\cdots A_{i-1})=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

라고 하면, 식 (10)으로 부터

$$^j\Delta_i=\begin{bmatrix} 0 & -a_z & o_z & (\bar{p}\times\bar{n})_z \\ a_z & 0 & -n_z & (\bar{p}\times\bar{o})_z \\ -o_z & n_z & 0 & (\bar{p}\times\bar{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

식 (11)의 다른 변수 q_k에 대한 미소변화는

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i \partial q_k}={}^j\Delta_k {}^j\Delta_i T_j \quad (13)$$

식 (11)은 Jacobian행렬 $J(q)$의 성분이며, 식 (13)은 Hessian행렬 $H(q)$의 성분이다.

따라서 i번째 링크의 속도는

$$\overline{V}_i=J(\bar{q})\dot{\bar{q}}$$

가 되며 가속도는

$$\dot{\overline{V}}_i=J(\bar{q})\ddot{\bar{q}}+\dot{J}(\bar{q})\dot{\bar{q}}$$

3. 동력학(Dynamics)

본 절에서는 로봇제어계의 설계에서 필요한 도구인 로봇의 모델의 설정에 대해 살펴보려한다. 기구는 일반적으로 2가지로 분류된다. 첫째는 운동의 자유도가 1인 연쇄기구(linkage)에 해당하는 閉루프의 수동기구와 로봇과 같이 多自由度의 開루프에 해당하는 능동기구(active mechanism)로 대별된다. 로봇에서는 조인트 구동부가 閉루프인 수동기구의 齒車列과 DC모터로 이루어져 있기때문에 그 운동의 엄밀한 해석은 대단히 어려우므로 일반적으로 로봇은 능동기구로 가정하여 근사적으로 그 운동을 해석하고 있다.

3.1 능동기구의 운동방정식

로봇의 모델로서 능동기구의 운동방정식은 Lagrangian 力學을 사용하여 일반적으로 유도하고 있는데 이는 로봇과 같이 多自由度의 매우 복잡한 시스템의 동력학적 방정식을 가장 간단한 방법으로 얻을수 있기 때문이다.

먼저 링크의 운동에너지(K)와 위치에너지(P)를 구한다음 Lagrange-Euler동력학 방정식에 대입하여 능동기구의 운동방정식을 유도한다. $\bar{r}_i$를 i링크상의 한점이라고 하면 기준(절대)좌표계에 대한 이점의 위치는,

$$\bar{r}=T_i\bar{r}_i$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}=\left\{\sum_{l=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right\}\bar{r}_i$$

이때, $\bar{r}_i$점의 질점 dm의 운동에너지는

$$dK_i=\frac{1}{2}Trace\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{r}^T}{\partial t}\right)dm$$

따라서 링크 i의 운동에너지는

$$K_i=\int dK_i=\frac{1}{2}Trace\left[\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_m}I_i\frac{\partial T_i^T}{\partial q_l}\times\dot{q}_m\dot{q}_l\right] \quad (14)$$

여기서 I_i는 관성행렬(inertia matrix)로서

$$I_i=\int \bar{r}_i\cdot\bar{r}_i^T dm$$

식 (14)는 링크로 구성된 로봇 구조 자체의 운동에너지이다. 한편 조인트 i의 구동부의 관성을 I_i^a라고 하면 조인트 구동부의 운동에너지는 $K_a=\frac{1}{2}I_i^a\dot{q}_i^2$이므로 n자유도를 가진 로봇 전체의 운동에너지는

$$K=\sum_{i=1}^{n}(K_i+K_a)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Trace\left[\sum_{m=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_m}\times I_i\frac{\partial T_i}{\partial q_l}\dot{q}_m\dot{q}_l\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}I_i^a\dot{q}_i^2 \quad (15)$$

한편 링크 i(질량 m_i)의 위치에너지 p_i는 중력가속도 $\bar{g}$로 표시하면,

$$p_i=-m_i\bar{g}\cdot\bar{r}=-m_i\bar{g}^T(T_i\cdot\bar{r}_i)$$

전체 로봇의 위치에너지는

$$p=\sum_{i=1}^{n}p_i=-\sum_{i=1}^{n}m_i\bar{g}(T_i\cdot\bar{r}_i) \quad (16)$$

한편 Lagrange-Euler 방정식은

$$F_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}(i=1,2,\cdots,n) \quad (17)$$

여기서 L(Lagrangian) $=K-p$이므로 식 (17)에 식 (15), (16)을 대입하여 식을 정리하면 다음과 같은 로봇의 운동방정식을 얻는다.

$$F_i=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}Trace\left(\frac{\partial T_j}{\partial q_k}I_i\frac{\partial T_j^T}{\partial q_i}\right)\ddot{q}_k+I_i^a\ddot{q}_i$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{i}Trace\left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial q_k\partial q_m}I_i\frac{\partial T_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_m$$
$$-\sum_{j=i}^{n}m_j\bar{g}^T\frac{\partial T_j}{\partial q_i}\bar{r}_j \quad (18)$$

식 (18)을 간단히 정리하여 표시하면,

$$F_i=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}\ddot{q}_j+I_i^a\ddot{q}_i+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k+D_i \quad (19)$$

여기서

$$D_{ij}=\sum_{l=\max(i,j)}^{n}Trace\left(\frac{\partial T_l}{\partial q_j}I_l\frac{\partial T_l}{\partial q_i}\right)$$
$$=\sum_{l=j}^{n}Trace({}^l\Delta_jT_lI_lT_l^T{}^l\Delta_i^T)$$
$$=Trace[{}^l\Delta_j(\sum_{l=j}^{n}T_lI_lT_l^T){}^l\Delta_i^T] \quad (i\le j)$$

$$D_{ijk}=\sum_{l=\max(i,j,k)}^{n}Trace\left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial q_j\partial q_k}I_l\frac{\partial T_l^T}{\partial q_i}\right)$$
$$=\sum_{l=k}^{n}Trace({}^l\Delta_k{}^l\Delta_jT_lI_lT_l^T{}^l\Delta_i^T)$$
$$=Trace\left[{}^l\Delta_k{}^l\Delta_j\left(\sum_{l=k}^{n}T_lI_lT_l^T\right){}^l\Delta_j^T\right]$$
$$(i\le j\le k)$$

$$D_i=\sum_{l=i}^{n}-m_l\bar{g}^T\frac{\partial T_l}{\partial q_i}\bar{r}_l$$
$$=\sum_{l=i}^{n}-m_l\bar{g}^T{}^l\Delta_iT_l\bar{r}_l$$
$$=-\bar{g}^T{}^l\Delta_j\sum_{l=i}^{n}m_lT_l\bar{r}_l$$

식 (19)에서

$D_{ii}\ddot{q}_i$=조인트 i에서의 유효관성력(effective inertia force) 즉 조이트 i에서의 가속도가 조인트 i에서 발생시키는 토오크

$D_{ij}\ddot{q}_i$ 또는 $D_{ij}\ddot{q}_j$=조인트 i와 조인트 j사이의 연성관성력(coupled inertia force)

$D_{ijj}\dot{q}_j^2$=조인트 j에서의 속도에 의한 조인트 i에서의 원심력

$D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k+D_{ikj}\dot{q}_k\dot{q}_j$=조인트 j와 k에서의 속도에 의한 조인트 i의 Coriolis힘

D_i=조인트 i에서의 중력

관성력과 중력항들은 서어보 안정성과 위치 정밀도에 영향을 미치므로 로봇제어에서 특히 중요하게 고려되는데 비하여 원심력과 Coriolis힘은 오직 로봇이 고속으로 운동할때에 한하여서 고려되나 이때에도 이들이 발생시키는 오차는 비교적 적은편이다. 구동부의 관성 I_i^a는 로봇에 따라 그 크기가 다르나 비교적 큰 값으로 유효관성력의 로봇구조에 따른 의존도를 감소시키며(즉 이 값이 클때에는 로봇구조만 고려하면 안됨) 또 연성관성력의 상대적인 중요성을 감소시키는 효과(즉 연성관성력 뿐만 아니라 이 관성항도 고려해야 함)를 가지고 있다.

4. 운동방정식의 활용

위에서 유도된 로봇의 운동방정식 (19)는 正動力學 또는 逆動力學의 과정들을 거쳐 로봇의 설계, 모델링 또는 시뮬레이션 및 로봇제어 즉 첨단부와 로봇의 주위환경과의 물리적 연계를 갖도록 하는데에 활용된다.

• 正動力學(forward dynamics) : 일반적으로 동력학문제는 대상체에 외력이 주어졌을 때 발생하는 운동을 미분방정식의 형태로 운동방정식을 유도한 다음 이 미분방정식을 풀어 주어진 외력에 의한 운동을 구하는 방향으로 진행되는데 이 과정을 소위 正動力學이라고 부른다. 로봇에서도 마찬가지로 외력 즉 조인트 구동부에 토크가 주어졌을때 발생하는 조인트들에서의 운동은 운동방정식 (19)를 일반 미분방정식을 푸는 방법으로 풀어 각 조인트에서의 위치, 속도, 가속도를 구하므로서 첨단부에서 운동 즉 첨단부의 위치, 속도, 가속도를 구한다. 이 正動力學은 일반적으로 로봇의 모델링 또는 그 운동의 시뮬레이션하는데 사용된다.

• 逆動力學(inverse dynamics) : 正動力學의

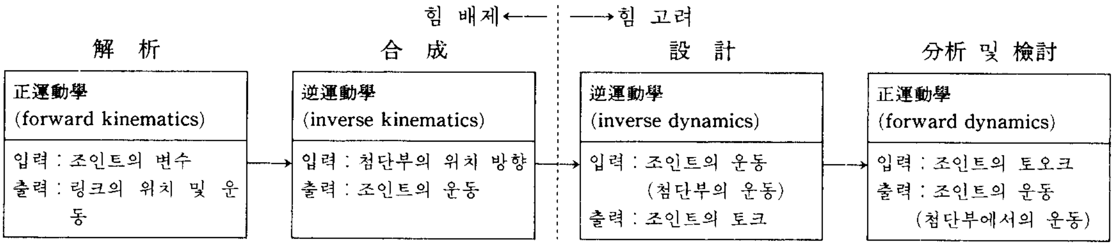

그림 2 로봇의 운동학과 동력학의 전개순서

반대과정이 逆動力學이다. 즉 正動力學에서 구하려는 운동이 주어졌다고 했을때 그 운동을 발생시키는 힘, 또는 토오크를 구하는 과정이다.

正動力學을 解析(analysis)적이라고 하면 逆動力學은 合成(synthesis)적이라고 할 수 있다. 예컨데 로봇제어나 설계에 있어서 첨단부의 궤도(trajectory)나 경로(path)가 주어졌을 때 이 궤도나 경로를 만족시키도록 로봇을 구동시키기 위한 조인트에서의 토오크를 계산할 때의 과정이다.

로봇의 설계에서는 일반적으로 그림 2와 같은 과정을 거쳐 수행된다고 볼 수 있다. 즉 힘이 고려안된 순수운동학적 해석방법인 正運動力學적 과정에서 조인트 변수가 주어졌을때 링크의 위치나 운동이 구해지고 이 링크의 위치나 운동으로부터 첨단부의 위치 또는 방향을 알수 있으며 이것으로 부터 逆運動力學적 과정을 거쳐 첨단부를 원하는 궤도나 경로로 움직이게 하는 조인트의 운동을 구할 수 있다. 한편 실제의 경우 즉 힘이 고려되었을때 운동학적으로 구하여진 조인트의 운동을 발생시키는 조인트에서의 구동력을 역동력학적 과정으로 구하며 이렇게 구해진 구동력에 의한 실제 로봇운동을 정동력학적 과정에 의한 시뮬레이션을 통하여 검토한다.

5. 응용(Application) : 최소작업을 위한 로봇궤도의 최적 설계

로봇 첨단부의 궤적표현에는 다음 3가지 방법이 있다.

(1) 직선연결부를 원호로 대치시키는 방법

(2) Fourier 급수를 이용한 직선의 섭동법 (perturbation)

(3) 스플라인(spline)

본문에서는 그림 3과 같은 스플라인을 사용하였는데, 이는 제한된 매개변수로서 경로 형태의 조정이 편리하기 때문이다.

그림 3의 스플라인 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{p}=(1-u)^3\overline{r}_0+3u(1-u)^2\overline{r}_1+3u^2(1-u)\overline{r}_2+u^3\overline{r}_3 \qquad (20)$$

여기서 $u=0$과 1사이의 매개변수로서 선상의 거리 즉 경로 s에 해당하는 정규화된 거리이다. 식 (20)을 행렬로 표시하면

$$\overline{p}(u)=\overline{U}[M_0]\overline{R} \qquad (21)$$

여기서 $\overline{U}=[1,u,u^2,u^3]$, $\overline{R}^T=[\overline{r}_0,\overline{r}_1,\overline{r}_2,\overline{r}_3]$

$$[M_b]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

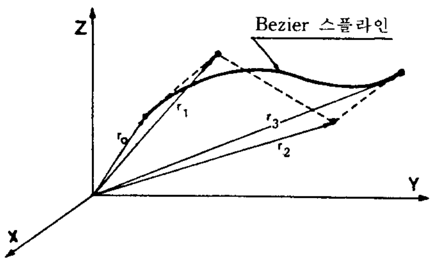

그림 3 3차원 Bezier스플라인 곡선

따라서,

$$\frac{\partial \overline{p}(u)}{\partial s}=\overline{p}_s=\overline{U}_s[M_b]\overline{R} \quad (22)$$

여기서, $\overline{U}_s=\dfrac{\partial \overline{U}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s}$

한편, 식 (19)에서 조인트의 구동력을 생략하여 다시쓰면

$$[M]\ddot{\overline{\theta}}+\dot{\overline{\theta}}^T[c]\dot{\overline{\theta}}+\overline{G}=\overline{F} \quad (23)$$

여기서, $[M]=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}$: 관성행렬

$[c]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ijk}$: Coriolis, 원심력 텐서(centrifugal tensor)

$\overline{G}=D_i$: 중력벡터

$\overline{F}=F_i$: 구동부에서의 외력벡터

식 (23)을 다음과 같은 운동학적 변환을 통해 경로좌표계 (s)로 바꾼다.

$$\overline{p}(s)=[R]\overline{\theta}$$

$$\overline{\theta}=[R]^{-1}\overline{p}(s),\ \dot{\overline{\theta}}=[R]_\theta^{-1}\overline{p}_s\dot{s} \quad (24)$$

$$\ddot{\overline{\theta}}=[R]_\theta^{-1}\{\overline{p}_s\ddot{s}+\overline{p}_{ss}\dot{s}^2-([R]_\theta^{-1}\overline{p}_s)^T[R]_{\theta\theta}([R]_\theta^{-1}\overline{p}_s)\dot{s}^2\}$$

여기서 $[R]_\theta$=Jacobian, $[R]_{\theta\theta}$=Hessian

식 (24)를 식 (23)에 대입하면,

$$\overline{m}(s)\ddot{s}+\overline{b}(s)\dot{s}^2+\overline{g}(s)=\overline{F} \quad (25)$$

여기서 $\overline{m}(s)=[M][R]_\theta^{-1}\overline{p}_s$

$\overline{b}(s)=[M][R]_\theta^{-1}\{\overline{p}_{ss}-([R]_\theta^{-1}\overline{p}_s)^T[R]_{\theta\theta}([R]_\theta^{-1}\overline{p}_s)\}+([R]_\theta^{-1}\overline{p}_s)^T[C]([R]_\theta^{-1}\overline{p}_s)$

$\overline{g}(s)=\overline{G}$

식 (25)는 2계 미분방정식이므로 1계 미분방정식으로 변환시켜 적분인자(integration factor)를 이용하여 풀면 첨단부의 선속도 $\dot{s}$는 초기조건이 s_0와 $\dot{s}_0$일때

$$\dot{s}^2(s)=\left[\dot{s}^2(s_0)+\int_{s_0}^{s}e^{\int_{s_0}^{s}\frac{2\overline{b}}{\overline{m}}ds}\cdot\frac{2(\overline{F}-\overline{g})}{\overline{m}}ds\right]\cdot e^{-\int_{s_0}^{s}\frac{2\overline{b}}{\overline{m}}ds} \quad (26)$$

따라서 식 (25)로 부터 i번째 링크의 최대, 최소 가속도는,

$$\ddot{s}_{ai}=(\overline{F}_{i\max}-\overline{b}_i\dot{s}^2-\overline{G}_i)/\overline{m}_i \quad (27)$$

$$\ddot{s}_{di}=(\overline{F}_{i\min}-\overline{b}_i\dot{s}^2-\overline{G}_i)/\overline{m}_i$$

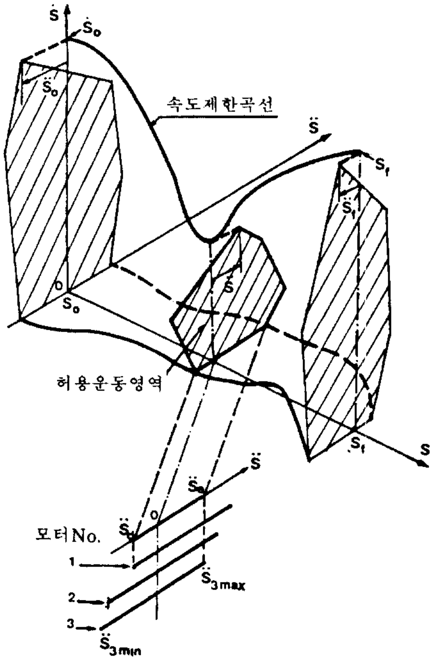

그림 4 위상 공간에서의 허용 가속도 영역

윗식에서 s와 $\dot{s}$가 주어졌을 때 허용가속도의 범위는

$$\ddot{s}_{di}\leq\ddot{s}_s\leq\ddot{s}_{ai}$$

상태변수 s와 $\dot{s}$에 대한 위상공간(phase space)상에서의 $\ddot{s}_i$의 허용영역은 식 (27)과 그림 4와 같다. 식 (27)과 그림 4로부터 영역의 크기가 영으로 될때(즉 $\ddot{s}_a=\ddot{s}_d$일때)의 속도가 최대허용속도 $\dot{s}_m$이 되며 $\dot{s}$가 $\dot{s}_m$보다 클때에는 로봇의 첨단부는 그 경로를 이탈하게 된다.

각 s에 해당하는 속도제한곡선 $\dot{s}_m$은 그림 5

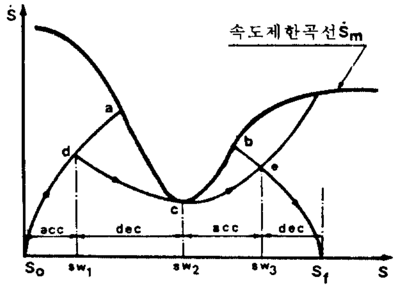

그림 5 위상평면에서의 속도제한곡선과 최적속도곡선

와 같다. 그림 5에서 s_0, d, c, e, s_f는 로봇첨단부의 경로에 대한 최적속도곡선이며 교점 d, c, e는 가속과 감속사이의 전환점(switching point)들로서 식 (26)을 正방향적분(forward integration)하고 逆방향적분(backward integration)하여 구한다. 최적속도궤적이 이와 같이 설정되면 $\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i$와 $\overline{F}_i$의 값들을 식 (24)와 (25)로 부터 구한다. 초기위치 s_0에서부터 최종위치 s_f까지 최적속도궤적을 따라서 운동할때 소요시간 t는,

$$t(s)=\int_{s_0}^{s_f}\frac{1}{\dot{s}(s)}ds \qquad (28)$$

〔예〕 PUMA560(그림 6)

상기응용이론의 적용예로서 그림 6과 같은 좌표계의 PUMA560을 3R능동기구로 가정하여 실행하였다.

표 1 PUMA 560의 운동학적 매개변수

조 인 트	θ	α	a	d
1	θ_1	−90	0	0
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	90	a_3	d_3
4	θ_4	−90	0	d_4
5	θ_5	90	0	0
6	θ_6	0	0	0

$a_2=d_4=0.4318$, $a_3=0.019$ $d_3=0.125$

표 2 PUMA 560의 일반사양

링 크	p	1	2	3	단위
질 량	Mp	12.95	22.94	5.01	kg
질량중심	x	0.0	32.89	2.04	cm
	y	30.88	0.50	1.37	
	z	3.89	20.38	0.37	
회전반경	Kx	42.62	24.41	12.31	cm
	Ky	12.23	36.82	12.46	
	Kz	42.56	38.91	4.55	
토 크	max	40.0	130.0	30.0	N·m
	min	−40.0	−130.0	−30.0	
θ	max	240.	180.	180.	deg
	min	−240.	−180.	−180.	

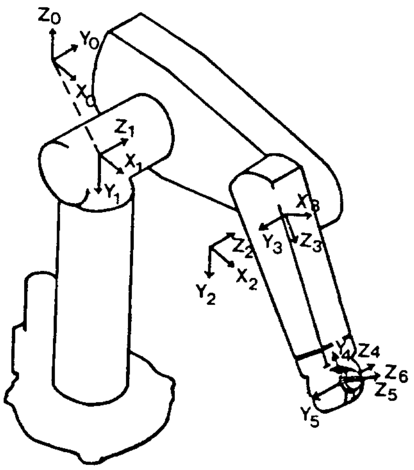

그림 6 PUMA 560의 좌표계

경로상의 시종점과 제어점은

$\bar{r}_0=(0.0, \ -0.3, \quad 0.0\ )$

$\bar{r}_1=(0.07, -0.23, -0.04)$

$\bar{r}_2=(0.14, -0.16, -0.08)$

$\bar{r}_3=(0.3, \quad 0.0, \ -0.15)$

얻어진 결과는 다음 그림 7~11과 같다.

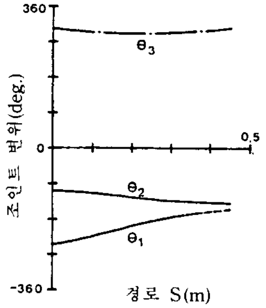

그림 7 경로에 따른 조인트 각변위

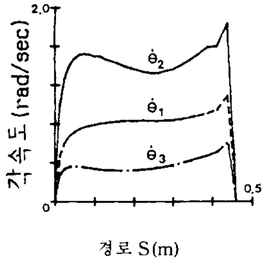

그림 8 경로에 따른 조인트 각속도

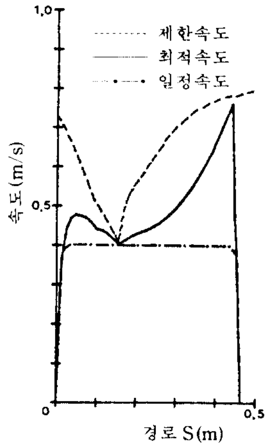

그림 9 경로에 따른 속도제한곡선과 최적속도 곡선

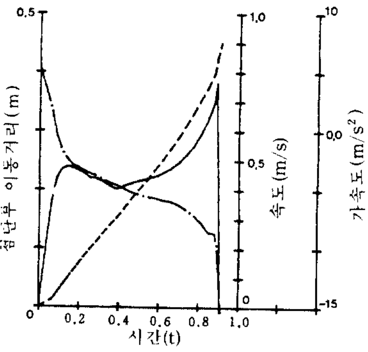

그림 10 경로에 따른 첨단부의 변위, 속도, 가속도곡선

① 궤적 총거리 47.7cm

최적속도곡선에 따른 작업시간 0.908초

일정속도제어 1.180초

② 궤적 최단거리 45cm

최적계획에 따른 작업시간 0.935초

6. 맺음말

본 글에서는 로봇의 운동학적 및 동력학적 문제를 풀기위한 기본적 이론과 그 적용 예를 들었다. 운동학적 고찰은 로봇 링크의 위치와

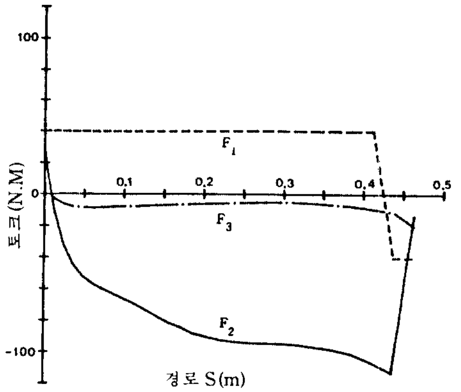

그림 11 최적속도곡선에 따른 각 조인트의 토크 변화

방향을 설정하기 위한 동차변환에 근거하여 이루어졌고, 기준좌표계와 조인트 좌표계사이의 正변환과 逆변환이 正運動學과 逆運動學적 과정에서 고찰되었다. 동력학적 과정에서는 로봇은 능동기구로 간주하여 운동방정식이 유도되었으며 이 유도과정에서 운동학적 분석결과가 어떻게 사용되는가를 살펴보았다. 한편 유도된 운동방정식이 어떻게 활용되는가를 正動力學과 逆動力學적 과정을 통하여 살펴 보았으며 이러한 과정들은 로봇의 설계, 모델링(simulation), 제어 등 연구에 기초이론으로 사용됨을 적용 예를 통하여 보였고 일반적으로 正運動學, 逆運動學, 逆動力學, 正動力學의 순으로 전개됨이 합리적이라는 것을 인지하였다.

참 고 문 헌

(1) Paul, R.P., 1982, "Robot Manipulator: Mathematics, Programming, and Control", MIT Press.

(2) Nof, S.Y., 1985, "Handbook of Industrial Robotics", John Wiley & Sons.

(3) 고경철 1987, "최소작업시간을 위한 로봇궤도의 최적설계", 연세대학교 기계공학과 석사학위 논문.