

<論 文>

# 점탄성 물질로 코팅된 부정정 외팔보계의 동적 해석

심 송\* · 김 광 준\*

(1988年 2月 10日 接受)

## Dynamic Analysis of an Indeterminate System with Cantilevers Coated with Viscoelastic Material

Song Sim and Kwang Joon Kim

**Key Words :** Indeterminate System(부정정계), Surface Damping Treatment(표면 감쇠처리), Modal Damping(모우드감쇠), Frequency Response Function(주파수응답함수)

### Abstract

A simplified FRF(frequency response function) model of an indeterminate cantilever system with viscoelastic material layers is derived. A way to calculate modal damping of the system from the dynamic properties of the viscoelastic material is proposed. The model is experimentally verified.

### 기 호 설 명

$A_1$	: 금속보의 단면적	$V_n(x)$	: $n$ 번째 모우드
$A_2$	: 코팅된 점탄성물질의 단면적	$v(x,t)$	: 보의 변형량
$b$	: 보의 넓이	$y(t)$	: 집중질량의 기하학적 중심에서의 변위량
$F(t)$	: 각 보의 끝부분에 작용하는 전단력	$y_1(t)$	: 집중질량의 무게중심에서의 변위량
$J$	: 집중질량부의 무게중심에 대한 질량관성 모멘트	$\lambda$	: 고유치
$\ell_i$	: 계의 기하학적 형상과 관련된 치수 ( $i=1, 2, 3, 4$ )	$\lambda_n$	: $n$ 번째 모우드의 고유진동수
$M$	: 집중질량	$\rho_1$	: 금속보의 밀도
$m$	: 보를 제외한 계의 질량	$\rho_2$	: 코팅된 점탄성물질의 밀도
$P(t)$	: 질량부에 작용하는 외부가진력	$\eta$	: 손실계수
$P$	: $P(t)$ 의 크기	$\eta_{sn}$	: 계의 $n$ 번째 모우드의 등가손실계수
$q_n(t)$	: 일반화된 좌표	$\eta_{on}$	: 점탄성물질을 부착하지 않은 계의 $n$ 번째 모우드의 등가손실계수
$t_1$	: 금속보의 두께	$\eta_{1n}$	: 점탄성물질의 부착으로 인한 계의 $n$ 번째 모우드의 손실증분량
$t_2$	: 코팅된 점탄성물질의 두께	$\eta_{bn}$	: 오베스트(Oberst)보의 $n$ 번째 모우드의 손실계수
$V_r(x,t)$	: 보에 작용하는 전단력	$\phi_n$	: $n$ 번째 정규모우드
$V(x)$	: $v(x,t)$ 의 진폭	$\theta$	: 집중질량부의 회전각
		$\omega_n$	: $n$ 번째 고유진동수
		$\Omega$	: 가진주파수

\*정회원, 한국과학기술원 생산공학과

1. 서 론

점탄성물질은 이용상의 편의 및 경제성 등의 이유로 구조물의 방진 및 진동흡수용으로 광범위하게 이용되어 왔다. 그 중 기존구조물에 점탄성물질을 이용하는 가장 대표적인 방법 하나는 표면에 층으로 입히는 것이다. 이렇게 표면감쇠처리(surface damping treatment)된 단순구조물에 대해서는 이미 많은 연구결과가 발표되었지만<sup>(1~4)</sup>, 대부분은 보와 평판에서 단순한 경계조건을 갖는 경우에 대한 이론전개라고 볼 수 있다. 그러나 실제 응용면에 있어서 점탄성물질로 표면감쇠처리된 부분은 전체 구조물의 일부분(substructure)을 비교적 복잡한 경계조건으로 구성하는 것이 일반적이고, 이런 경우 점탄성물질의 복소탄성계수를 이용하여 평형조건과 기하학적 적합성을 만족시키는 해를 구하는 것은 매우 어렵다. 본 논문은 표면감쇠처리되지 않은 구조물의 모우드특성을 아는 경우에 표면감쇠처리에 의해서 결정되는 새로운 모우드변수를 계산하는 한 방법을 제시하고자 한다. 즉, 실험적으로 측정된 점탄성물질의 동특성으로부터 표면감쇠처리된 기 전의 모우드를 이용하여 표면감쇠처리된 구조물의 모우드감쇠와 고유진동수 및 주파수응답함수를 계산한다. 이 과정을 Fig. 1에 보여진, 표면감쇠처리된 네 개의 보와 하나의 집중질량으로 구성된 부정정계 구조물에 적용 서술하고자 한다.

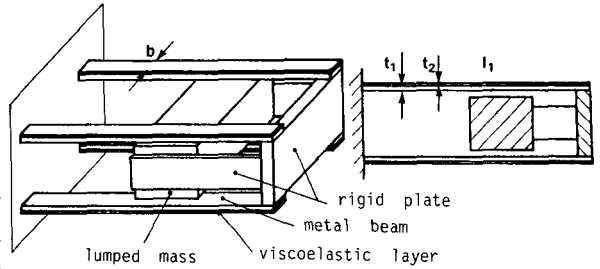


Fig. 1 Configuration and side view of the system

저항력이 매우 크다고 가정함으로써  $x$ 축 방향으로의 보의 변형은 없다고 본다. 즉 Fig. 2에 보인 계로 이상화한다.

모델 2 :

이 모델에서는 Fig. 3에 보인 바와 같이, 보의 축력이 집중질량부의 회전운동에 미치는 영향이 작다고 가정하고 보의 축력을 무시한다.

이 두 모델에 대해서 운동방정식을 유도하고 계산된 고유진동수를 실험결과와 비교하고자 한다.

첫번째 모델에 대한 운동방정식(Euler-Bernoulli equation)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$EI = \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

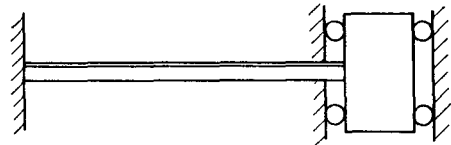


Fig. 2 Idealized model 1

2. 운동 방정식

주어진 계의 주파수응답함수 모델은 두 단계로 나누어 설정한다. 첫번째는 비감쇠자유진동 모델을 유도하고, 두번째는 유도된 비감쇠자유진동 모델을 이용하여 주파수응답함수 모델을 설정하는 것이다.

Fig. 1의 집중질량부가 수직하중을 받을 경우 각 보에는 전단력과 모멘트 뿐만 아니라 엄밀한 의미에서 축력까지 작용하게 된다. 이러한 부정정계는 해석시 모든 작용력과 변형 사이의 관계가 복잡한 비선형식으로 표현되므로, 완전한 해를 구하기는 매우 어렵다. 따라서 보의 수직방향의 변형이 적다고 보고 몇 가지 가정을 추가하여 다음과 같이 비교적 간단한 두 모델을 설정하였다.

모델 1 :

집중질량부의  $x$ 축 방향으로의 운동에 대한 보의

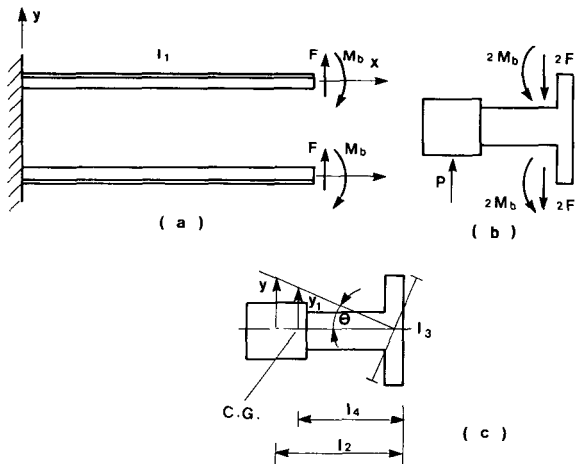


Fig. 3 Idealized model 2

여기서,

$$\rho A = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 \quad (2)$$

이 때,  $v(x, t) = v(x) \sin \omega t$  라 하면 식 (1)은 다음과 같이 상미분방정식이 된다.

$$\frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \lambda^4 V(x) = 0, \quad \lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3)$$

위 고유치문제의 해는 다음과 같이 표현될 수 있고

$$V(x) = B_1 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x + B_3 \sin h \lambda x + B_4 \cos h \lambda x \quad (4)$$

또한 다음과 같은 경계조건을 만족해야 한다.

$$(i) \quad V(0) = 0 \quad (5)$$

$$(ii) \quad dV(0)/dx = 0 \quad (6)$$

$$(iii) \quad dV(1_1)/dx = 0 \quad (7)$$

$$(iv) \quad -V_f(1_1, t) = EI \frac{\partial^3 v(1_1, t)}{\partial x^3} = \frac{m}{4} \frac{\partial^2 v(1_1, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\text{또는 } EI \frac{d^3 V(1_1)}{dx^3} = -\frac{m}{4} \omega^2 V(1_1) \quad (9)$$

이 경계조건들로부터 얻어진 계수들 간의 관계와 특성방정식은 다음과 같다.

$$B_4 = -B_2, \quad B_3 = -B_1, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sin \lambda 1_1 + \sin h \lambda 1_1}{\cos \lambda 1_1 - \cos h \lambda 1_1} \quad (10)$$

$$\frac{4\rho A 1_1}{m \lambda 1_1} (\sin \lambda_1 \cos h \lambda 1_1 + \cos \lambda 1_1 \sin h \lambda 1_1) - (1 - \cos \lambda 1_1 \cos h \lambda 1_1) = 0 \quad (11)$$

따라서 식 (11)의 해  $\lambda_n$ 을 구하면 비감쇠 고유진동수와 비감쇠자유진동 모우드를 다음과 같이 각각 구할 수 있다.

$$w_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (12)$$

$$V_n(x) = C_n (\sin \lambda_n x + D_n \cos \lambda_n x - \sin h \lambda_n x - D_n \cos h \lambda_n x) \quad (13)$$

여기서

$$D_n = \frac{\sin \lambda_n 1_1 + \sin h \lambda_n 1_1}{\cos \lambda_n 1_1 - \cos h \lambda_n 1_1} \quad (14)$$

두번째 모델에 대한 경계조건과 기하학적 관계는 다음과 같다.

$$(i) \quad v(0, t) = 0 \quad (15)$$

$$(ii) \quad v'(0, t) = 0 \quad (16)$$

$$(iii) \quad EI v'''(1_1, t) = -F(t) \quad (17)$$

$$(iv) \quad EI v''(1_1, t) = -M_b(t) \quad (18)$$

$$(v) \quad y(t) = v(1_1, t) + 1_2 \theta(t) \quad (19)$$

$$(vi) \quad \theta(t) = -v'(1_1, t) \quad (20)$$

$$(vii) \quad y_1(t) = v(1_1, t) + 1_4 \theta(t) = v(1_1, t) - 1_4 v'(1_1, t) \quad (21)$$

$$(viii) \quad P - 4F = m y_i = m [\ddot{v}(1_1, t) - 1_4 \ddot{v}'(1_1, t)] \quad (22)$$

$$(ix) \quad J \ddot{\theta} = -J \ddot{v}'(1_1, t) = P(1_2 - 1_4) - 4M_b + 4F 1_4 \quad (23)$$

위의 관계식들을 정리하면 특성방정식은 다음과 같이 결정된다.

$$F_1 F_4 - F_2 F_3 = 0 \quad (24)$$

여기서

$$F_1 = K_1 (\cos \lambda 1_1 + \cos h \lambda 1_1) - \sin \lambda 1_1 + \sin h \lambda 1_1 + C_1 \lambda 1_1 (\cos \lambda 1_1 - \cos h \lambda 1_1) \quad (25)$$

$$F_2 = K_1 (\sin \lambda 1_1 - \sin h \lambda 1_1) + \cos \lambda 1_1 - \cos h \lambda 1_1 + C_1 \lambda 1_1 (\sin \lambda 1_1 - \sin h \lambda 1_1) \quad (26)$$

$$F_3 = -K_2 (\sin \lambda 1_1 + \sin h \lambda 1_1) + C_1 (\sin \lambda 1_1 - \sin h \lambda 1_1) - (C_2 + K_3) (\cos \lambda 1_1 - \cos h \lambda 1_1) \quad (27)$$

$$F_4 = K_2 (\cos \lambda 1_1 + \cos h \lambda 1_1) - C_1 (\cos \lambda 1_1 - \cos h \lambda 1_1) - (C_2 + K_4) (\sin \lambda 1_1 + \sin h \lambda 1_1) \quad (28)$$

$$K_1 = 4\rho A 1_1 / m \lambda 1_1 \quad (29)$$

$$K_2 = 4\rho A 1_1 / m (\lambda 1_1)^2 \quad (30)$$

$$K_3 = J \lambda 1_1 / m 1_1^2 \quad (31)$$

$$C_1 = 1_4 / 1_1 \quad (32)$$

$$C_2 = \lambda 1_1 C^2 \quad (33)$$

각 모델에 대한 계산결과 및 가진실험결과 중 일부를 Table 1과 Table 2에 비교하였다. 이 자료에 따르면, 실험결과는 첫번째 모델에 대한 계산결과와 유사함을 알 수 있다. 두번째 모델에 대한 계산결과는, 실제로는 존재하지 않는 첫번째 고유진동

**Table 1** Comparison of natural frequencies of model 1 and model 2 with experimental results(m=602.4g,  $t_1=0.8\text{mm}$ ,  $b=37\text{mm}$ ,  $1_4=83.4\text{mm}$ )

$1_1$ (m)	Mode	Exp.(Hz)	Model 1(Hz)	Model 2(Hz)
0.18	1	10.16	9.99	4.83
	2	129.69	131.78	10.07
	3			132.17
0.24	1	6.25	6.39	3.77
	2	75.00	74.62	7.15
	3			74.75
0.30	1	4.69	4.50	2.81
	2	49.22	48.07	6.05
	3			48.09

**Table 2** Comparison of natural frequencies of model 1 and model 2 with experimental results( $m=463.5\text{g}$ ,  $t_1=0.5\text{mm}$ ,  $b=20\text{mm}$ ,  $l_1=100\text{mm}$ )

$l_1(\text{m})$	Mode	Exp.(Hz)	Model 1(Hz)	Model 2(Hz)
0.20	1	3.516	3.613	2.221
	2			3.615
0.28	1	2.148	2.160	1.554
	2			2.608
0.36	1	1.465	1.468	1.024
	2			2.373

수를 보이고 있는데, 이러한 결과는 집중질량부의 회전운동을 제한하는 본 부정정계의 구조적 특성을 잘못 가정한 결과로 보여진다. 따라서 첫번째 모델과 가정을 선택하였다.

조화가진하에서 감쇠연속계의 강제진동을 서술하는 편미분방정식은 다음과 같다<sup>(6)</sup>.

$$(1+j\eta)L[v(x,t)]+M\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{P(t)}{4}\delta(x-l_1) \quad (34)$$

여기서

$$L=EI\partial^4/\partial x^4 \quad (35)$$

$$M=\rho A+m\delta(x-l_1)/4 \quad (36)$$

감쇠주파수응답함수를 표현하기 위해 필요한 각 모우드는 계산상 편의를 위해 비감쇠자유진동 모델의 모우드로 근사화하였다. 모우드의 직교성을 가정하여 모우드분리하면 다음과 같다.

$$q_n(t)+(1+j\eta_{sn})\omega_n^2 q_n(t)=\phi_n(l_1)P(t)/4 \quad (37)$$

따라서 전달함수는 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{y}{P}(\Omega) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(l_1)}{(1+j\eta_{sn})\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (38) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(l_1)[(\omega_n^2 - \Omega^2) - j\eta_{sn}\omega_n^2]}{[(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + \eta_{sn}^2\omega_n^4]} \quad (39) \end{aligned}$$

### 3. 계의 모우드 감쇠 추정

식 (39)에서 계의 등가손실계수  $\eta_{sn}$ 은 에너지 개념을 이용하여 몇 가지 가정하에 추정된다. 즉 실험적으로 얻어진 점탄성 물질의 특성은 RKU 식<sup>(3)</sup>을 이용하여 점탄성물질로 표현처리된 보의 특성으로 변환하고 이것으로부터 계의 모우드변수를 추정

하게 된다. 이러한 절차 중에서 우선적으로 필요한 것은 점탄성물질의 특성을 실험적으로 결정하는 일이다.

점탄성물질은 점성과 탄성, 즉 강성과 감쇠성을 함께 가지고 있기 때문에, 변형으로 인해 갖게되는 에너지의 일부는 열에너지와 소리에너지 등으로 발산된다. 이러한 점탄성물질의 성질은 변형률이 작을 경우 선형으로 간주할 수 있으며, 그 동특성을 종탄성계수  $E$ 와 손실계수(loss factor)  $\eta$ 로 표현할 수 있다. 이 두 인자는 보통 다음과 같이 복소탄성계수  $E^*$ 로 표현되어진다.

$$E^*=E(1+j\eta) \quad (40)$$

일반적으로 이 복소탄성계수는 환경조건에 따라 변화한다. 그 중 중요한 것에는 온도, 주파수, 정적 초기하중, 동적 변형량 등이 있으며, 그 외에도 경년, 진공상태 정도, 복사, 기름 등의 영향도 받는 것으로 알려져있다. 본 연구의 대상인 Fig. 1의 계는 표면감쇠처리된 것이기 때문에 정적 초기하중이 존재하지 않게 된다. 또한 진폭이 작을 경우에는 점탄성물질의 특성이 동적 변형량에 따라 크게 변화하지 않으므로<sup>(6)</sup>, 이 효과를 무시할 수 있다. 따라서, 온도를 일정하게 유지시키면 복소탄성계수를 주파수만의 함수로 근사화할 수 있다. 일반적으로 점탄성물체의 역학적인 성질은 점탄성물질 자체의 성질 뿐만 아니라 그 기하학적 형상에 의해서도 영향을 받는다. 점탄성물질의 겉보기탄성계수(apparent elastic modulus)는 형상계수(shape factor)의 함수로 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$E_a=E(1+\beta S^2) \quad (41)$$

$S$ 는 형상계수이며 힘을 받지 않는 측면의 총면적에 대한 힘을 받는 한 쪽 면의 면적이다. 직육면체의 경우에  $S$ 는 다음과 같다.

$$S=\frac{b_1 b_2}{2(b_1+b_2)h} \quad (42)$$

여기서

$h$ : 점탄성물질의 높이

$b_1, b_2$ :  $h$ 와 직각을 이루는 두 변의 길이 또한,  $\beta$ 는 점탄성물질의 기하학적 형상과 화학적 구성성분에 관련된 상수로, 경화제인 carbon black이 첨가되지 않은 점탄성 물질이라면 단면이 원형 혹은 사각형인 경우 2.0이다.

Fig. 4는 점탄성물질의 특성을 얻기 위해 구성된 1자유도계이다. 이 1자유도계에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x}(t) + K_a E^* x(t) = F(t) \quad (43)$$

여기서

$$K_a = A(1+2S^2)/h \quad (44)$$

$$E^* = E(1+j\eta) \quad (45)$$

이 식으로부터 전달함수를 구하면 아래와 같다.

$$\frac{x(w)}{F(w)} = \frac{1}{-w^2 M + K_a E^*} \quad (46)$$

$$= \frac{1}{(-w^2 M + K_a E) + jK_a E \eta} \quad (47)$$

전달함수의 실수부를  $Re$ , 허수부를  $Im$ 이라하면 윗 식으로부터 다음과 같이 종탄성계수와 손실계수를 구할 수 있다.

$$E = \frac{Re + (Re^2 + Im^2) \omega^2 M}{K_a (Re^2 + Im^2)} \quad (48)$$

$$\eta = \frac{-Im}{Re + (Re^2 + Im^2) \omega^2 M} \quad (49)$$

금속보의 한 쪽 면에 점탄성물질이 입혀진 오베스트 보(Oberst beam)의 경우에, 점탄성물질의 종탄성계수 및 손실계수와 오베스트 보의 그것들과의 관계는 RKU식으로 다음과 같이 표현된다<sup>(4)</sup>.

$$\frac{EI(\omega)}{E_1 I_1(\omega)} = \frac{1+2en(2+3n+2n^2) + e^2 n^4}{1+en} \quad (50)$$

$$\frac{\eta_b(\omega)}{\eta_v(\omega)} = \frac{en}{(1+en)}$$

$$\left[ \frac{3+6n+4n^2+2en+e^2 n^4}{1+2en(2+3n+2n^2) + e^2 n^4} \right] \quad (51)$$

여기서

$$e = E_2(\omega)/E_1 \quad (52)$$

$$n = t_2/t_1 \quad (53)$$

$E, I, \eta$ 는 각각 오베스트 보의 종탄성계수, 면적모멘트, 손실계수이다. 첨자 1은 금속보, 2는 점탄성물질을 의미하며, 첨자  $b$ 는 오베스트 보,  $v$ 는 점탄성물질을 각각 의미한다.  $t_1, t_2$ 는 각각의 두께이다. 윗 식들은 양단이 단순지지된 3재질합성보(three layer composite beam)에 대한 RKU식으로부터 얻어진 것이지만, 경계조건이 다른 본 부정정계에 근사적으로 적용하였다.

감쇠가 에너지의 발산이라는 사실을 이용하면 오베스트 보의 손실계수로부터 다음과 같이 Fig. 1에 보여진 계의 모우드 감쇠를 추정할 수 있다. 한 주기동안 손실되는 총에너지를  $W$ 라 하면 다른 모우드의 영향이 없는 단일 모우드에서  $W$ 는 진폭과 주파수의 함수이다.

일반적으로 손실계수는 다음과 같이 정의된다<sup>(6)</sup>.

$$\eta = \frac{W}{2\pi V} \quad (54)$$

여기서  $V$ 는 한 주기 내에서 계가 갖게 되는 최대 위치에너지이다. 따라서 손실계수도 진폭과 주파수의 함수가 되나, 진폭이 작아 계가 선형으로 간주될 수 있다면  $W$ 와  $V$ 는 모두  $X^2$ 에 비례하므로, 손실계수는 진폭에 무관하다고 할 수 있다. 즉 손실계수는 온도를 일정하게 유지해 준다면 주파수만의 함수로 볼 수 있다. 또한 일반적으로 감쇠가 아주 큰 계가 아니라면 응답함수의 진폭은, 공진주파수 근처를 제외하면 거의 감쇠치에 영향을 받지 않는다. 따라서 모우드 간에 간섭이 적은 계라면 식(54)을 각 모우드에 적용함으로써 손실계수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta_n = \frac{W_n}{2\pi V_n} \quad (55)$$

최대위치에너지  $V_n$ 은 그 주기내의 최대 운동에너지  $U_n$ 으로 대체할 수 있다<sup>(6)</sup>. 이 식을 주어진 계에 적용할 경우 다음과 같이 변형된 손실계수를 사용할 수 있다.

$$\eta_{sn} = \eta_{on} + \eta_{1n} \quad (56)$$

여기서  $\eta_{on}$ 은  $n$ 번째 모우드에서 점탄성 물질을 금속보에 부착하지 않은 상태에 대한 계의 손실계수이다. 이 손실은 계를 지지하고 있는 지지체로의 에너지 전달과 계 내부의 마찰열 손실, 그리고 연결부에서의 손실 및 공기 저항으로 인한 소리에너지 손실 등으로 구성된다. 이러한 손실들은 점탄성물질의 부착으로 부가되는 손실의 영향을 받지 않는다고 가정하고 실험을 통해 구할 수 있다.  $\eta_{1n}$ 은 식(55)를 적용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta_{1n} = 4W_{bn}/2\pi U_{sn}, \quad U_{sn} = 4U_{bn} + U_{mn} \quad (57)$$

$$= \frac{W_{bn}/2\pi U_{bn}}{1 + U_{mn}/4U_{bn}} \quad (58)$$

$$= \frac{\eta_{bn}}{1 + U_{mn}/4U_{bn}} \quad (59)$$

여기서

$W_{bn}$  : 한 주기 동안 점탄성물질의 부착으로 인해 각 보에서 손실되는 에너지

$U_{sn}$  : 그 주기 내에서 계가 갖는 최대 운동에너지

$U_{bn}$  : 그 주기 내에서 각 보가 갖는 최대 운동에너지

$U_{mn}$  : 그 주기 내에서 질량부가 갖는 최대 운동에너지

윗 식에서  $W_{bn}/2\pi U_{bn}$ 은 각 보의 손실계수  $\eta_{bn}$ 이 된다. 그러나 이러한 오베스트 보에서의 손실  $\eta_{bn}$

을 표현하는 RKU식은, 전술한 바와 같이 보의 경계조건에 큰 영향을 받지 않는다고 가정하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta_{bn} = \eta_b(\omega_n) \tag{60}$$

따라서  $\eta_b(\omega_n)$ 은 전술한 RKU 식을 이용하여 구할 수 있다. 식 (58)에서  $U_{mn}/U_{bn}$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{U_{mn}}{U_{bn}} = \frac{\frac{1}{2}m\dot{V}_n^2(1_1)}{\frac{1}{2}\int \dot{V}_n^2(x) dm} \tag{61}$$

여기서

$$V_n(x, t) = \frac{\phi_n(1_1) \phi_n(x)}{j\eta_{sn}\omega_n^2} \frac{P}{4} \sin \omega_n t \tag{62}$$

따라서 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{U_{mn}}{U_{bn}} = \frac{m V_n^2(1_1)}{\rho A \int_0^1 V_n^2(x) dx} \tag{63}$$

전술한 바와 같이 계의 모우드  $V_n(x)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_n(x) = \sin \lambda_n x + C_n \cos \lambda_n x - \sinh \lambda_n x - C_n \cos h \lambda_n x \tag{64}$$

$V_n(x)$ 를 위 식에 대입하여 정리한 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{U_{mn}}{U_{bn}} = & \frac{\lambda_n m [\sin \lambda_n 1_1 - \sin h \lambda_n 1_1 + C_n (\cos \lambda_n 1_1 - \cos h \lambda_n 1_1)]}{\rho A [ \frac{\sin h 2\lambda_n 1_1 - \sin 2\lambda_n 1_1}{4} - \sin \lambda_n 1_1 \cos h \lambda_n 1_1 + \cos \lambda_n 1_1 \sin h \lambda_n 1_1 + 2C_n (\frac{\cos 2\lambda_n 1_1 - \cos h 2\lambda_n 1_1}{4} - \sin \lambda_n 1_1 \sin h \lambda_n 1_1) + C_n^2 (\lambda_n 1_1 + \frac{\sin 2\lambda_n 1_1 + \sin h 2\lambda_n 1_1}{4} - \sin \lambda_n 1_1 \cos h \lambda_n 1_1 - \cos \lambda_n 1_1 \times \sin h \lambda_n 1_1) ]} \end{aligned} \tag{65}$$

위 식들을 정리하면 점탄성물질이 부착된 계의 모우드손실계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_{sn} = & \eta_{0n} + \eta_{1n} \\ = & \eta_{0n} + \frac{\eta_b(\omega_n)}{1 + m V_n^2(1_1) / 4\rho A \int_0^1 V_n^2(x) dx} \end{aligned} \tag{66}$$

$$\tag{67}$$

#### 4. 실험 및 결과

점탄성 물질(폴리우레탄)의 탄성계수와 손실계수를 얻기 위해서, Fig. 4에 도시된 것처럼 점탄성 물질과 질량으로 1 자유도계를 구성하였다. 온도는 일정한 것으로 가정하고 충격실험을 하였다. 측정된 전달함수로부터 식 (48)과 (49)를 이용하여 계산된 탄성계수와 손실계수는 Fig. 5에 도시하였다.

이 실험치를 3차 다항식으로 커어브 피팅하여 얻은 값으로 식 (50)과 (51)을 이용하여 오베스트보의 탄성계수와 손실계수를 계산하였다. 이 값들을 실험적으로 측정된  $\eta_{0n}$ 과 함께 식 (67)에 적용하여, 계의 모우드감쇠를 계산하였다. 계산된 계의 모우드 감쇠와 오베스트 보의 탄성계수 및 식 (39)를

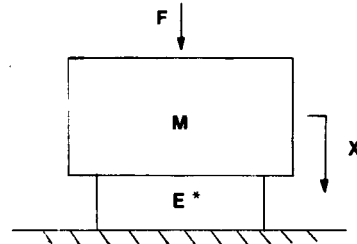


Fig. 4 Single DOF model of the material test

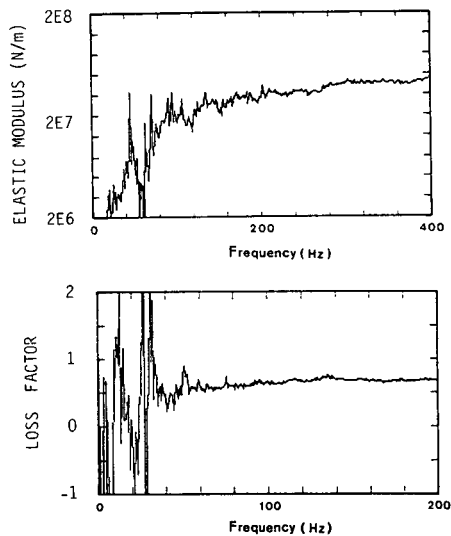


Fig. 5 Elastic modulus and loss factor computed with data from viscoelastic material test (polyuretan, 15°C)

이용하여 계산된 주파수응답함수는 Fig. 6과 Fig. 7에 점선으로 도시하였다. 실험으로부터 얻어진 결과는 실선으로 함께 도시하여 비교하였다.

이 때 실험조건은 다음과 같다.

- $t_1 = 0.8\text{mm}$
- $t_2 = 1.76\text{mm}, 2.64\text{mm}$
- $m = 0.268\text{kg}$

- $b = 37\text{mm}$
- $E_1 = 2.015E11 \text{ N/m}$
- $\rho_1 = 7315.7 \text{ kg/m}$
- $\rho_2 = 1070.0 \text{ kg/m}$
- $l_1 = 0.18 \text{ m}$

5. 결 론

점탄성물질로 감쇠처리된 한 부정정 외팔보의 주파수응답함수 모델을 산출하고 실험을 통해 그 타당성을 보인 본 연구의 결론은 다음과 같다.

- (1) 본 부정정계의 해석에 있어서 진폭이 작다는 가정하에 집중질량부의 회전을 무시한 모델로 근사화할 수 있었다.
- (2) 단순지지보에 대한 RKU식을 다른 경계조건에 대해 적용하여 근사화하는데 큰 무리가 없었다.
- (3) 점탄성물질로 표면감쇠처리된 부분이 구조물의 일부를 구성하는 계의 모우드 변수와 주파수응답함수는, 감쇠와 진폭이 크지 않은 경우에 본 연구에서 제시한 방법을 이용하여 성공적으로 추정할 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) R.A. Di Taranto, 1965, "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite Length Beam", J. of Applied Mechanics, Vol. 32, Dec., pp.881~886.
- (2) H. Oberst, 1952, "Über die Dämpfung der Biegeschwingungen Dunner Bleche, Durch Fest Haftende Belage," Acustica, Vol. 2, Akustische Beihefte No.4, pp.181~194.
- (3) D. Ross, E.E. Ungar, and E.M. Kerwin, 1959, "Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminate," Structural Damping, ASME, New York, pp.49~88.
- (4) A.D. Nashif, D.I. Jones, J.P. Henderson, 1985, "Vibration Damping", John Wiley & Sons.
- (5) L. Meirovitch, 1970, "Analytic Method in Vibrations", Macmillan.
- (6) S.H. Crandall, 1970, "The Role of Damping in Vibration Theory," Journal of Sound and Vibration, Vol., 11, No. 1, pp.3~18.
- (7) J.C. Snowdon, 1968, "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems", Wiley, New York.
- (8) 심 승, 1987, "점탄성 재질로 코팅된 부정정 외팔보의 동적 해석," 한국과학기술원 석사논문.

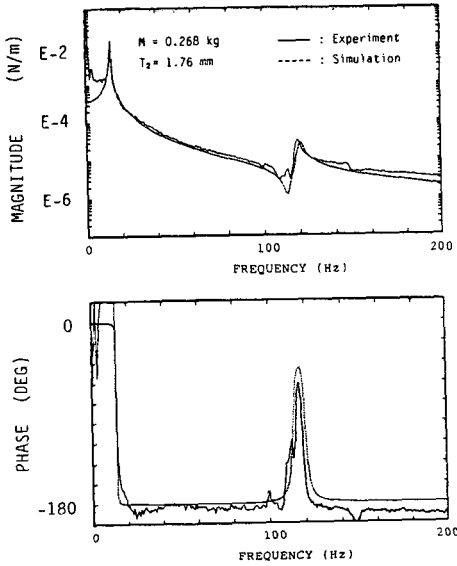


Fig. 6 Comparison of the transfer functions for experiments and simulations

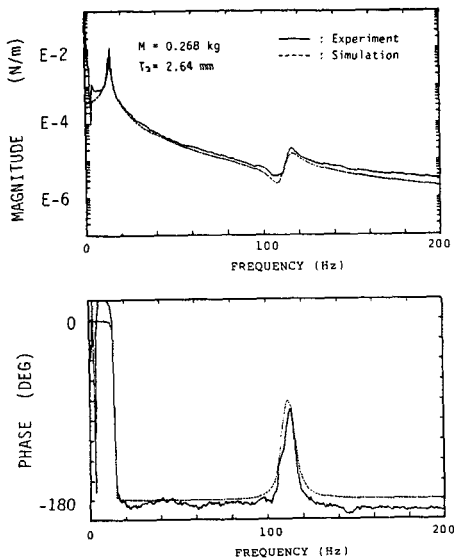


Fig. 7 Comparison of the transfer functions for experiments and simulations