

<論 文>

복합재료 피로 수명 분포에 관한 고찰

황 운 봉* · 한 경 섭***

(1988년 4월 15일 접수)

Analysis on Fatigue Life Distribution of Composite Materials

W. Hwang and K. S. Han

Key Words : Composite Materials(복합재료), Fatigue(피로), Fatigue Life Distribution(피로 수명 분포), Strength(강도), Cumulative Damage Model(누적 손상 모형), Statistical Cumulative Damage Theory(통계학적 누적 손상 이론), Multi-Stress Level Fatigue Life Distribution(다응력 수위 피로 수명 분포)

Abstract

Static strength and fatigue life scattering of glass fiber reinforced epoxy composite materials has been studied. Normal, lognormal, two-parameter and three-parameter Weibull distribution functions are used for strength and one-stress fatigue life distribution. The value of mean fatigue life is analysed using mean fatigue life, mean log fatigue life and expected value of 2 and 3-parameter Weibull distribution functions. Two-stress level fatigue life(low-high and high-low) is investigated using the distribution functions. Modification on non-statistical cumulative damage models is made in order to interpret the result of two-stress level fatigue life scattering. The comparison results show that 3-parameter Weibull distribution has better predictions in static strength and one-stress level fatigue life distributions. However, no advantage of 3-parameter Weibull distribution is found over 2-parameter Weibull distribution in two-stress level fatigue life predictions. It is found that two-stress level fatigue life prediction by the expanded equal rank assumption is close to the experimental data.

기 호 설 명

| | | | |
|--------|----------------------------|------------|-----------------------|
| a | : 3모수 Weibull 분포 함수의 형상 모수 | m | : 전체 시편 개수 |
| b | : 3모수 Weibull 분포 함수의 규모 모수 | m_i | : 파손 순서 |
| c | : 3모수 Weibull 분포 함수의 위치 모수 | n | : 피로 사이클 수 |
| d | : 손상함수 | N | : 피로 수명 |
| $E(x)$ | : Weibull 분포의 기대값 | P | : 파손 확률 |
| $f(x)$ | : 확률 밀도 함수 | P_{mr} | : 중앙순위 |
| $F(x)$ | : 누적 분포 함수 | P_{pred} | : 예측한 파손확률 |
| | | q | : 적용한 응력의 파괴 강도에 대한 비 |
| | | $v(x)$ | : Weibull 분포의 분산 |
| | | x | : 확률 변수 |
| | | \bar{x} | : 정규 분포의 평균 |

* 정회원, 포항공과대학 기계공학과

** 산업기술연구소 겸직연구원

- $\overline{\ln x}$: 로그 정규 분포의 평균
- α : 2모수 Weibull 분포의 형상 모수
- β : 2모수 Weibull 분포의 규모 모수
- γ : 감마 함수
- σ : 표준 편차
- σ_{\ln} : 로그 정규 분포의 표준 편차
- σ_a : 적용한 응력
- σ_u : 파괴 강도

1. 서 론

무게를 점감할 수 있고 하중에 잘 견디는 이점 때문에 섬유 강화 복합재료는 무게에 민감함 비행 구조물과 우주 구조물을 비롯하여 여러 분야에 걸쳐 과거 20여년 동안 그 응용 범위가 빠르게 확대되고 있다. 복합재료는 그 물성 특히 피로 수명이 넓게 산재되기 때문에 복합재료의 실험 결과 분석 및 물성 예측을 하기 위해서는 통계학적 해석이 필요하다는 것은 잘 알려져 있는 사실이다. 많은 연구가⁽¹⁻⁴⁰⁾이 주제에 관하여 행해졌는데 Weibull 분포 함수⁽¹⁾가 그 뛰어난 응용성과 정확성 때문에 피로 수명 분포 문제에 가장 자주 쓰이고 있다^(2,3,5-38). 반면 로그 정규 분포는 Weibull 분포보다 적게 이용되는 편이다^(4,3,4-40).

비록 정규 분포, 로그 정규 분포, 2모수(parameter) 및 3모수 Weibull 분포함수들이 물성의 산재 연구에 널리 쓰이고는 있으나, 각 분포 함수들의 특징은 아직 확실히 알려져 있지 않다. 본 연구의 목적은 복합재료의 기계적 성질 즉 파괴 강도와 일정한 응력 및 두 연속 응력 피로 수명을 분

석하는데 위에 언급한 분포 함수들을 실험결과와 비교하고 각 분포 함수들의 응용성을 찾는 데 있다.

본 연구에서는 유리섬유 강화 에폭시 복합재료의 파괴 강도와 피로 수명을 정규분포, 로그 정규 분포와 2모수 및 3모수 Weibull 분포 함수들을 사용하여 분석하였다. 피로 수명의 평균값을 평균 피로 수명, 평균 로그 피로 수명과 2모수 및 3모수 Weibull 분포 함수의 기대값으로 살펴 보았다. 2연속 응력 피로 실험 [작은 응력에서 큰 응력으로의 실험(low-high test), 큰 응력에서 작은 응력으로의 실험(high-low test)]의 결과도 분포 함수들을 사용하여 분석하였다. 비통계학적 누적 손상 법칙들(non-statistical cumulative damage rules)을 2연속 응력 피로 수명 분산 예측에 이용하기 위해서 동등 순위 가정(equal rank assumption)^(5,6)을 확장하여 수정하였다. 수정한 누적 손상 모형은 Miner의 법칙⁽⁴²⁾, Broutman과 Sahu의 손상모형⁽⁴⁾ 및 Hashin과 Rotem의 모형^(43,44) 등이다.

2. 실험방법

본 연구에서 사용한 재료는 미국 3M社가 제작한 유리 섬유 강화 에폭시(unidirectional composites)이며 기계적 성질을 Table 1에 나타냈다. 정하중 실험과 피로 실험 모두 MTS(유압식 피로 시험기)를 사용하였다. 인장 강도는 일정 변위율(2.13 mm/min)을 시편에 가하여 측정하였다. 피로 실험은 하중 제어모드(load control mode)에서 사인파(sinusoidal wave)형태로 하중을 가하였고 주파수는 실험도중 시편의 온도상승이 거의 무시될 수 있

Table 1 Properties of E-glass fiber reinforced unidirectional composite

| Mechanical properties of unidirectional composite | | | | |
|---|--------------|-----|------------|-----|
| Property | Longitudinal | | Transverse | |
| Tensile strength | 770 | MPa | 20 | MPa |
| Tensile modulus | 33.1 | GPa | 9.7 | GPa |
| Compressive strength | 880 | MPa | 28 | MPa |
| Flexural strength | 1,150 | MPa | 75 | MPa |
| Flexural modulus | 38.6 | GPa | 11.1 | GPa |
| Short beam shear | 62 | GPa | | |
| Impact strength | 81.3 | J | | |
| Barcol hardness | 70 | | | |

은 1-3Hz를 사용하였다. 최대 하중은 파괴 하중의 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, 0.7로 하였고 시편에 압축 응력이 가해지지 않게 하기 위해서 전 실험을 통하여 최소 하중은 파괴 하중의 0.05를 유지하였다.

2가지 다른 반복 응력 때문에 생기는 누적적인 손상(cumulative damage)을 조사하기 위하여 4시리즈 실험을 행하였다. 낮은 응력에서 높은 응력으로의 실험(low-high stress level test)은 처음에 낮은 응력에서 일정한 사이클 n_1 을 행한 후 높은 응력에서 파괴될때까지 피로 수명을 측정하였다. 높은 응력에서 낮은 응력으로의 실험(high-low stress level test)은 높은 응력에서 먼저 일정한 사이클 n_1 을 행한 후 낮은 응력을 파괴될때까지 가하였다.

3. 파괴강도 및 일정한 응력의 피로수명 분포

파괴 강도 및 일정한 응력하에서의 피로 수명 분포는 정규 분포, 로그 정규 분포, 2모수와 3모수 Weibull분포를 이용하여 해석하였다. 각 분포의 누적 분포 함수(cumulative distribution function; CDF)는 다음과 같다.

정규 분포 :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{(x-\bar{x})/\sigma} \exp(-t^2/2) dt = \Phi[(x-\bar{x})/\sigma] \tag{1}$$

여기서, \bar{x} : 평균

σ : 표준 편차

로그 정규 분포 :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ln}} \int_0^{ln x} (1/t) \exp[-\frac{1}{2\sigma_{ln}^2} \times (\ln t - \overline{ln x})^2] dt = \Phi[(\ln x - \overline{ln x})/\sigma_{ln}] \tag{2}$$

여기서,

$\overline{ln x}$: lnx 의 평균

σ_{ln} : lnx 의 표준 편차

2모수 Weibull 분포 :

$$F(x) = 1 - \exp[-(x/\beta)^\alpha] \tag{3}$$

여기서,

α : 형상 모수(shape parameter)

β : 규모 모수(scale parameter)

3모수 Weibull 분포 :

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^\alpha\right] \tag{4}$$

여기서,

a : 형상 모수

b : 규모 모수

c : 위치 모수(location parameter)

윗 네분포의 평균(기대값)과 분산은 다음과 같다.

정규 분포 :

평균 :

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \tag{5}$$

분산 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i^2 - \bar{x}^2) \tag{6}$$

여기서,

m : 전체 시편의 갯수

로그 정규 분포 :

평균 :

$$\overline{ln x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ln x_i \tag{7}$$

분산 :

$$\sigma_{ln}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m [(ln x_i)^2 - (\overline{ln x})^2] \tag{8}$$

2모수 Weibull 분포 :

기대값 :

$$E_{2p}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{2p}(x) dx = \beta\gamma(1+1/\alpha) \tag{9}$$

분산 :

$$V_{2p}(x) = E_{2p}(x^2) - [E_{2p}(x)]^2 = \beta^2[\gamma(1+2/\alpha) - \gamma(1+1/\alpha)] \tag{10}$$

여기서, $f_{2p}(x)$ 는 2모수 Weibull 분포의 확률 밀도 함수이고 γ 는 감마 함수이다.

3모수 Weibull 분포 :

기대값 :

$$E_{3p}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{3p}(x) dx = b\gamma(1+1/\alpha) + c \tag{11}$$

분산 :

$$V_{3p}(x) = b^2[\gamma(1+2/\alpha) - \gamma(1+1/\alpha)] \tag{12}$$

여기서, $f_{3p}(x)$ 는 3모수 Weibull 분포의 확률 밀도 함수이다.

일정한 최대 응력하에서 실험치는 5개의 최대 응력 피로실험을 통하여 구하였다. 즉 최대응력과 파괴강도비, p 는 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, 0.7이다. 실험치와 예측한 값들의 비교를 Fig. 1~6에서 볼 수 있는데 Fig. 1은 파괴 강도의 분산을 Fig. 2에서

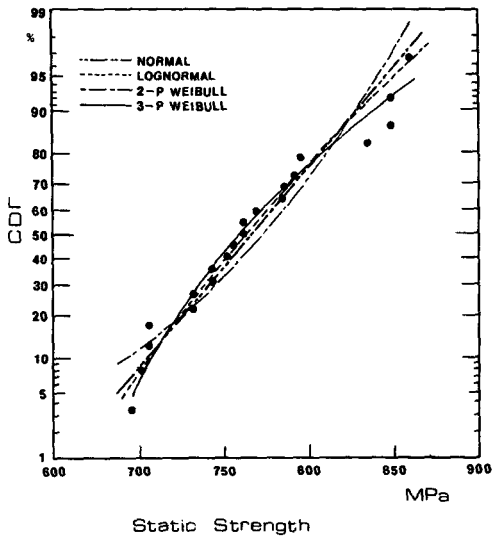


Fig. 1 Static strength distribution

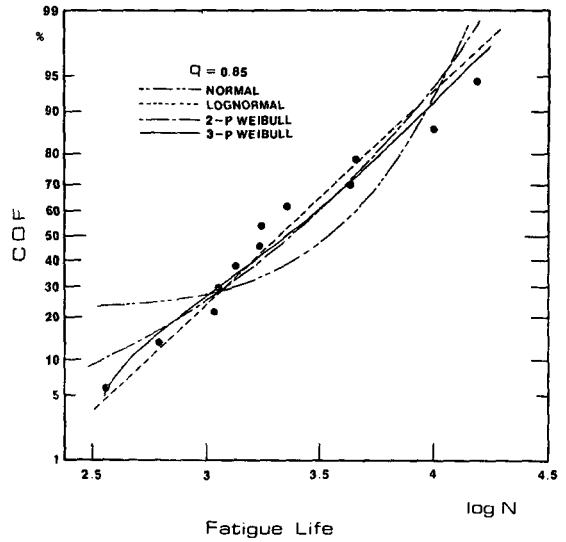


Fig. 3 Fatigue life distribution, $q = 0.85$

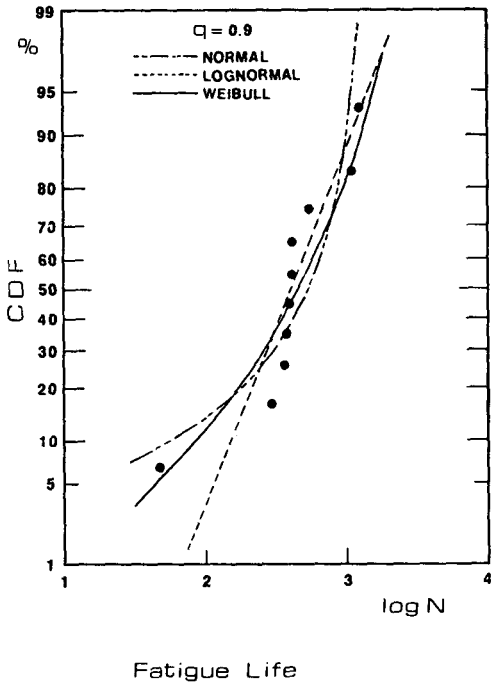


Fig. 2 Fatigue life distribution, $q = 0.9$

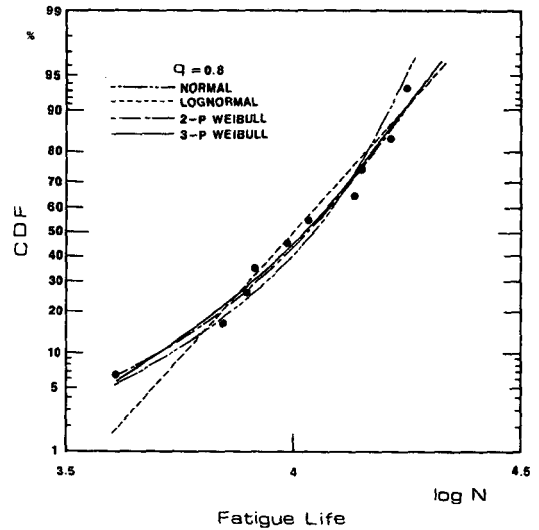


Fig. 4 Fatigue life distribution, $q = 0.8$

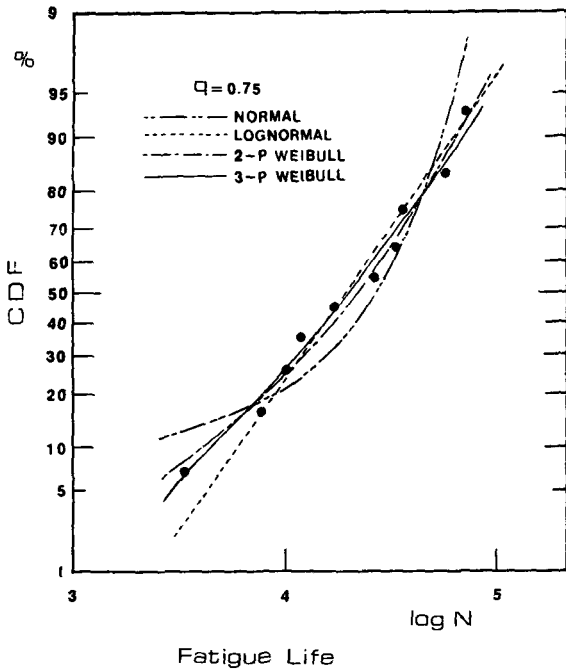


Fig. 5 Fatigue life distribution, $q=0.75$

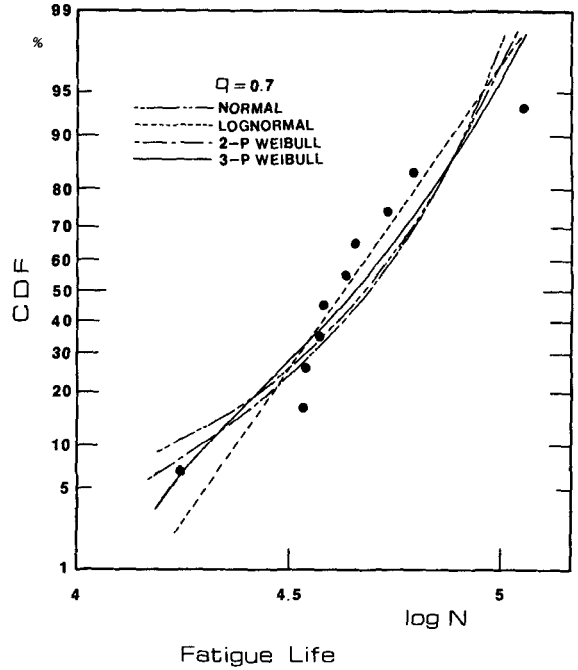


Fig. 6 Fatigue life distribution, $q=0.5$

Fig. 6까지는 피로 수명 분산을 나타내고 있다. 이 비교에서 실험치는 아래와 같이 정의된 중앙 순위 (median rank)를 이용하여 파손 확률(probability of failure)로 환산하였다.

$$P_{mr} = \frac{m_i - 0.3}{m + 0.4} \quad (14)$$

여기서,

P_{mr} : 파손 확률

m : 전체 시편 갯수

m_i : 파손 순위 (failure order)

2모수 및 3모수 Weibull 분포 함수들의 모수는 각

각 선형(linear) 및 비선형(nonlinear) 최소제곱법 (least squares method)을 이용하여 결정하였다. 평가한 모수들의 값을 Table 2에 나타냈다. 최대 하중이 0.9인 경우에 3모수 Weibull 분포 함수의 위치 모수가 영이 되어 2모수와 3모수의 Weibull 분포 함수가 일치하게 되었다. Fig. 1~6 이외에 관찰한 파단 확률과 예측한 파손 확률의 잔차 제곱합(residual sum of squares 이하 SSR로 약)을 이용하여 전 분산을 간략하게 비교할 수 있다. (물론 SSR 하나만으로 분포 함수의 우월을 결정할 수는 없다) 파단 확률의 SSR은 다음과 같이 표현 할 수

Table 2 Parameters of Weibull distribution function

| Parameters of Weibull distribution function | | | | | |
|---|------|-------|------|-------|------|
| q | | | a | b | c |
| Static | 17.2 | 791 | 1.92 | 110 | 671 |
| 0.9 | 1.16 | 616 | 1.16 | 616 | 0 |
| 0.85 | 0.99 | 3586 | 0.76 | 3059 | 292 |
| 0.8 | 2.44 | 12442 | 2.03 | 10984 | 1417 |
| 0.75 | 1.15 | 30356 | 0.95 | 28233 | 1781 |
| 0.7 | 2.15 | 56217 | 1.58 | 43840 | 9794 |

Table 3 Residual Sum of squares, static and one-stress level fatigue test

| Residual Sum of squares | | | | |
|-------------------------|--------|-----------|-------------|-------------|
| q | Normal | Lognormal | 2-p Weibull | 3-p Weibull |
| Static | 0.0516 | 0.0426 | 0.1131 | 0.0260 |
| 0.9 | 0.1784 | 0.1257 | 0.1299 | 0.1299 |
| 0.85 | 0.2455 | 0.0345 | 0.721 | 0.0383 |
| 0.8 | 0.0362 | 0.232 | 0.0152 | 0.0141 |
| 0.75 | 0.0643 | 0.0243 | 0.0130 | 0.0095 |
| 0.7 | 0.1248 | 0.507 | 0.1195 | 0.871 |

있다.

$$SSR = \sum_{i=1}^m (P_{mr} - P_{pred})^2 \quad (14)$$

여기서, P_{pred} 는 분포 함수들에 의해서 결정된 예측 파단 확률치이다. SSR을 계산한 결과를 Table 3에 나타냈다.

비교 분석 결과는 여기서 고찰한 분포 함수들이 인장 강도 및 피로 수명 실험 결과와 잘 일치함을 보여주고 있다. 그러나 다음과 같은 점들을 지적할 수 있다. 여기서 사용한 분포 함수중 2모수 Weibull 분포가 인장 강도 분포 예측에 가장 뒤떨어지고; 피로 수명 분포는 정규 분포보다 로그 정규 분포나 Weibull 분포를 잘 따른다는 일반적인

경향을 나타내고 있고; 3모수 Weibull분포는 인장 강도 및 피로 수명 분포의 낮은 파손 확률에서 아주 잘 맞으며(이것은 분포 함수의 위치를 변화시킬 수 있는 위치 모수의 영향으로 믿어진다); 전 비교를 통하여 항상 3모수 Weibull 분포가 2모수 Weibull분포보다 잘 맞는다.

타당한 특성 피로 수명을 결정하기 위해서, 정규 분포의 평균, 로그 정규 분포의 평균과 2모수 및 3모수 Weibull 분포의 기대값을 2모수 Weibull 분포의 규모 모수와 3모수 Weibull 분포의 규모 모수와 위치 모수의 합인 $b+c$ 를 비교하였다. $x=\beta$ 와 $b+c$ 인 점에서 각각 2모수 및 3모수 Weibull 분포는 63.2%의 파손 확률을 갖는다. Fig. 7은 이러한 값들을 기초로한 특성 피로 수명과 적용한 응력과 관계를 나타내고 있다. 정규 분포 및 로그 정규 분포의 평균 수명을 참고문헌 (45)와 (46)에서 제안된 다음과 같은 피로 수명 예측식에서 적용하였다.

$$N = [M(1 - q^B)]^{1/C} \quad (15)$$

여기서,

N : 피로 수명

q : 최대 응력과 인장강도비

M, B, C : 물질 상수

상수 M, B, C 는 정규 및 로그 정규 분포에서 각각 7.6845, 4.4023, 0.1676과 4.5979, 6.4639, 0.1389로 구해졌다. 또한 로그 정규 분포의 평균이 가장 작은 피로 수명을 예측하고 β 는 항상 $b+c$ 보다 크다는 것이 밝혀졌다. 정규분포의 평균과 Weibull 분포들의 기대값에서 어떤 일반적인 경향은 발견되지 않았으나 간혹 β 나 $b+c$ 보다 큰 경우가 있었다. 각 분포 함수의 표준 편차는 표 4에 나타내었다.

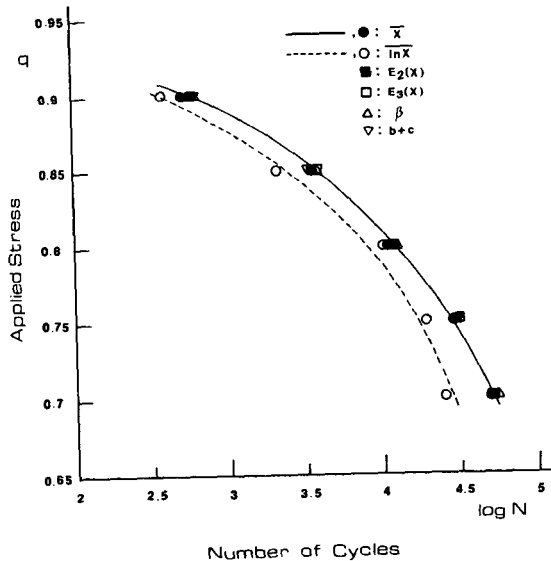


Fig. 7 Applied stress versus characteristic fatigue life

Table 4 Standard deviation

| Standard deviation | | | | |
|--------------------|--------|-----------|-------------|-------------|
| q | Normal | Lognormal | 2-p Weibull | 3-p Weibull |
| Static | 48.9 | 0.0631 | 55.1 | 52 |
| 0.9 | 346 | 0.8403 | 509 | 509 |
| 0.85 | 4322 | 1.0489 | 3648 | 4851 |
| 0.8 | 4194 | 0.4295 | 4830 | 5013 |
| 0.75 | 21382 | 0.9132 | 25222 | 30257 |
| 0.7 | 24642 | 0.4554 | 24369 | 25443 |

4. 퍼센트 파손 법칙에 의한 2연속 응력 수위 하에서의 피로 수명 예측

2응력 수위 (low-high 및 high-low)의 피로 수명은 퍼센트 파손 손상 법칙⁽³⁴⁾과 로그 정규 분포, 2모수 및 3모수 Weibull 분포 함수를 사용하여 분석하였다. 퍼센트 파손 법칙에 의거하면 전 분포 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & x \leq n_1 \\ F_2(x - n_1 + n_{12}) & x > n_1 \end{cases} \quad (16)$$

여기서,

$$F_1(n_1) = F_2(n_{12}) \quad (17)$$

윗 식들에서 n_1 은 응력 수위 q_1 에서 피로실험한 사이클수이고 n_{12} 는 응력 수위 q_1 에서 n_1 사이클만큼 생성된 손상을 갖게 하는 응력 수위 q_2 에서의 동등한 사이클수이다.

로그 정규 분포 :

$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left[\frac{\ln x - \overline{\ln x_1}}{\sigma_{\ln,1}}\right] & x \leq n_1 \\ \Phi\left[\frac{\ln(x - n_1 + n_{12}) - \overline{\ln x_2}}{\sigma_{\ln,2}}\right] & x > n_1 \end{cases} \quad (18)$$

여기서,

$$n_{12} = \exp\left\{\overline{\ln x_2} + \sigma_{\ln,2} \left[\frac{\ln n_1 - \overline{\ln x_1}}{\sigma_{\ln,1}} \right]\right\} \quad (19)$$

$\overline{\ln x_1}$: 응력 수위 q_1 에서의 평균 로그 피로 수명

$\overline{\ln x_2}$: 응력 수위 q_2 에서의 평균 로그 피로 수명

$\sigma_{\ln,1}$: 응력 수위 q_1 에서의 $\ln x$ 의 표준 편차

$\sigma_{\ln,2}$: 응력 수위 q_2 에서의 $\ln x$ 의 표준 편차

2모수 Weibull 분포 :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right] & x \leq n_1 \\ 1 - \exp\left\{-\left[\frac{(x - n_1 + n_{12})}{\beta_2}\right]^{\alpha_2}\right\} & x > n_1 \end{cases} \quad (20)$$

여기서,

$$n_{12} = \beta_2 \left(\frac{n_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1/\alpha_2} \quad (21)$$

3모수 Weibull 분포 :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left[\frac{(x - c_1)}{b_1}\right]^{\alpha_1}\right\} & x \leq n_1 \\ 1 - \exp\left\{-\left[\frac{(x - n_1 + n_{12} - c_2)}{b_2}\right]^{\alpha_2}\right\} & x > n_1 \end{cases} \quad (22)$$

여기서,

$$n_{12} = c_2 + b_2 \left[\frac{(n_1 - c_1)}{b_1}\right]^{\alpha_1/\alpha_2} \quad (23)$$

2연속 응력 수위 피로 수명은 4시리즈 실험 (0.7-0.85, 0.85-0.7, 0.75-0.85 및 0.85-0.75 실험)을 통하여 측정하였다. 2연속 응력수위 피로 실험은 첫번째 응력 수위에서 시편에 미리 결정한 n_1 사이클의 반복 하중을 가한후 살아남은 시편에 두번째 응력 수위에서 파손될때까지 반복 하중을 가하여 잔류 수명 n_2 를 측정하였다.

실험 파손 확률은 첫번째 응력 수위에서 n_1 사이클때문에 발생한 파손 확률을 고려하여 수정된 중앙 순위로 결정하였다. low-high 실험에서 구한 실험 자료가 정규 분포에 잘 맞지 않아 2응력 피로 실험 분석에서 정규 분포는 사용하지 않았다. 실험 결과와 예측한 값들을 비교한 것을 Fig. 8에서 Fig. 11까지 나타냈다. 이 그림들에서 x 축은 두번째 응력 수위에서 측정된 잔류 수명들이다. 관측한 파손 확률과 예측한 파손 확률에서 구한 SSR 값을 Table 5에 나타냈다. 비교 결과는 모든 분포 함수

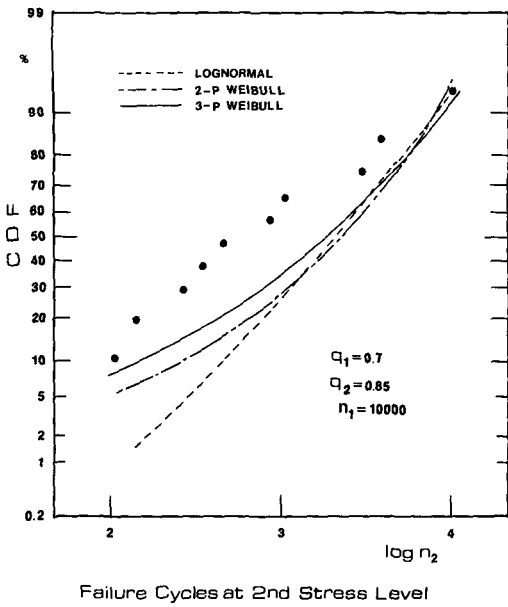


Fig. 8 Two-stress level fatigue life distribution by percent failure rule, low-high (0.7-0.85) test

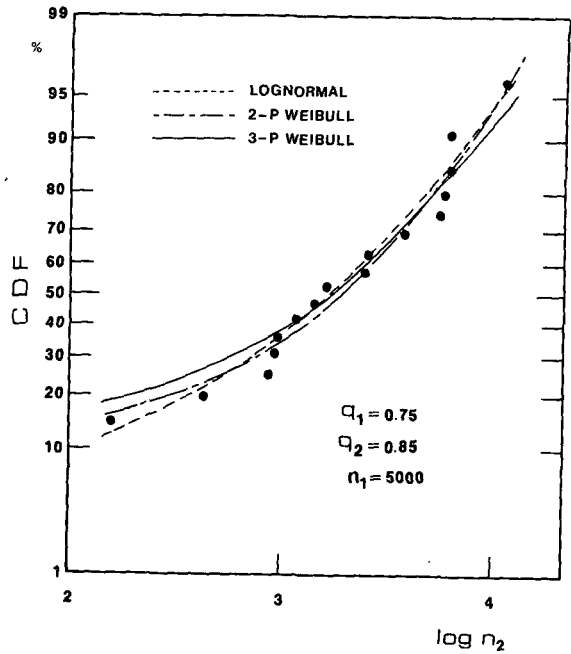


Fig. 10 Two-stress level fatigue life distribution by percent failure rule, low-high (0.75-0.85) test

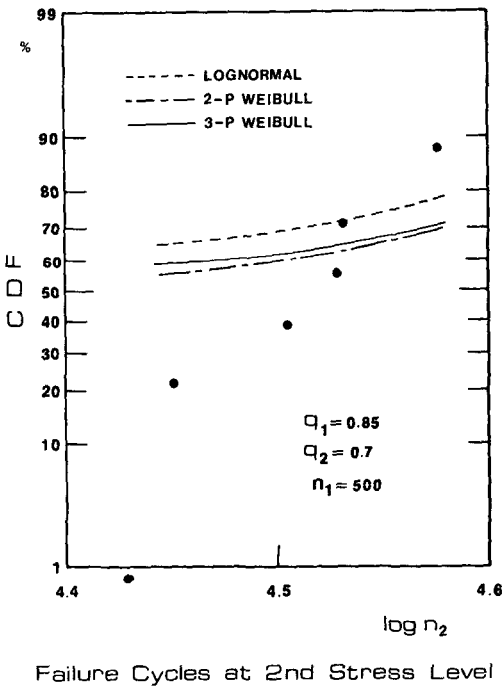


Fig. 9 Two-stress level fatigue life distribution by percent failure rule, high-low (0.85-0.7) test

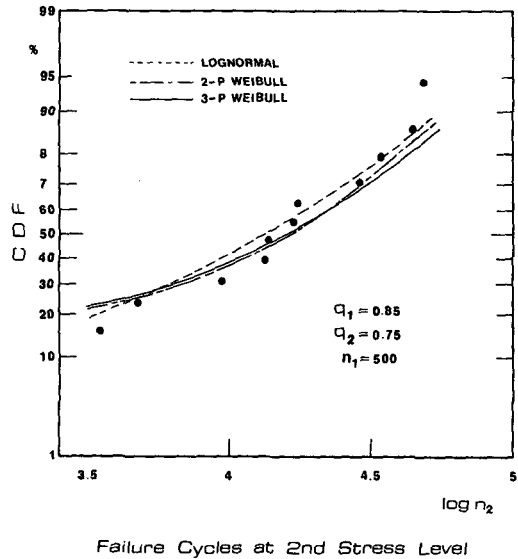


Fig. 11 Two-stress level fatigue life distribution by percent failure rule, high-low (0.85-0.75) test

Table 5 Residual Sum of squares, two-stress level fatigue test

| Residual Sum of squares | | | |
|-------------------------|-----------|-------------|-------------|
| | Lognormal | 2-p Weibull | 3-p Weibull |
| 0.7 -0.85 | 0.6394 | 0.5546 | 0.3304 |
| 0.85-0.7 | 0.3400 | 0.2186 | 0.2456 |
| 0.75-0.85 | 0.0311 | 0.0354 | 0.0385 |
| 0.85-0.75 | 0.0305 | 0.0360 | 0.0461 |

가 high-low 실험보다 low-high에서 잘 맞는 것을 보여준다. 0.85-0.7 실험에서 극심한 산재 현상이 발생하였다. 10개의 시편중 5개의 시편이 첫번째 응력 수위 0.85에서 500 사이클에 도달하기전에 파손되었다. 그러나 이 응력 수위에서 살아남은 시편들은 두번째 응력 수위 0.7에서 상당한 피로 수명을 갖었다. 이 경우 Fig. 9에서 볼 수 있듯이 실험 결과가 예측한 것들과 잘 맞지 않았다. 파괴강도와 한 응력 수위 피로 수명에서 2모수 Weibull 분포보다 항상 잘 맞던 3모수 Weibull 분포가 2응력 수위 피로 수명 예측에서는 2모수 Weibull 분포보다 뛰어난 점을 발견할 수 없었다. 사실 3모수 Weibull 분포는 0.75-0.85 실험에서만 2모수 Weibull 분포보다 정확한 예측을 하였다.

5. 비통계학적 누적 손상법칙을 2응력 수위 피로 수명 분산에 적용하기 위한 수정

대부분의 누적 손상 이론들은 통계학적 분석에 그 기초를 두지 않아서, 다 응력 수위 피로수명 분포 연구에 직접적으로 적용할 수 없다. 이러한 누적 손상 이론들을 수명 분포 연구에 적용하기 위해서는 특별한 수정이 필요한데 Monte Carlo Simulation 방법⁽⁴¹⁾을 쓰기도 한다. 여기서는 강도-수명 동등 순위 가정(strength-life equal rank assumption)^(5,6)을 확장하여 비통계학적 누적손상 법칙들을 다 응력 수위 피로 수명 분산 분석에 적용하기 위해서 수정하였다. 그 수정 방법은 다음과 같다.^(36,37)

(1) 한 응력 수위 피로 수명 분포를 잘 예측하는 분포 함수를 결정한다.

(2) 강도-수명 동등 순위 가정을 다음과 같이 확장하였다. 즉 어떠한 한 시편은 파손 강도, 한 응력 수위 피로 및 다 응력 수위 피로에서 유일하고 또한 같은 순위를 갖는다. 다시 말하면, 어떠한 시

편이 파손 강도에서의 파손 확률이 0.5이면 한 응력 수위 피로 수명뿐 아니라 다 응력 수위 피로수명에서도 그 파손 확률이 0.5일 것이다.

(3) 파손 확률 0.5를 갖는 다 적용 응력 수위에서의 피로 수명을 결정할 수 있다. 그러므로 비 통계학적 누적 손상 법칙이 적용되어 잔여 수명을 구할 수 있다. 이렇게 예측한 잔여 수명은 윗 가정에 의하여 다 응력 수위 피로에서 파손 확률 0.5를 갖는다고 판단할 수 있다. 이러한 방법으로 다른 경우의 잔여 수명도 예측할 수 있다.

본 연구에서는 2응력 수위 피로 수명 분포를 2모수 및 3모수 Weibull 분포 함수들을 사용하여 분석하였다. 적용한 누적 손상 모형은 Miner법칙⁽⁴²⁾, Broutman과 Sahu손상 모형⁽⁴⁾과 Hashin과 Rotem 모형^(43,44) 등이다. 통상 손상 함수(damage function)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = f(q_i, n_i, N_i) \quad (24)$$

여기서,

q_i : 적용한 응력 수위, $\sigma_{a,i}/\sigma_u$

n_i : 피로 사이클 수

N_i : 파손될 때까지의 피로 사이클 수

2응력 수위 피로에서 손상 함수는 다음과 같다.

$$D = f(q_1, q_2, n_1, n_2, N_1, N_2) \quad (25)$$

여기서, n_1 은 첫번째 응력 수위에서 적용한 피로 사이클 수이고, n_2 는 두번째 응력 수위에서의 잔류 수명이다. N_1 과 N_2 는 각각 첫번째와 두번째 응력 수위에서의 피로 수명이다. 윗 식의 7개 변수들 중 $\sigma_{a,1}$, $\sigma_{a,2}$ 와 n_1 은 실험전에 미리 결정되는 것으로 상수로 간주할 수 있는 반면 σ_u , n_2 , N_1 및 N_2 는 확률변수(random variable)들이다. 3모수 Weibull 분포 함수를 이용하면 파손 강도를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_u(P) = b_s [-\ln(1-P)]^{1/a_s} + c_s \quad (26)$$

여기서, a_s , b_s 및 c_s 는 파괴 강도에서의 Weibull 모수들이다. 그러므로 적용 응력 수위는 다음과 같

다.

$$q_i(P) = \sigma_{a,i} / \sigma_u(P) = \sigma_{a,i} / \{b_s[-\ln(1-P)]^{1/a_s} + c_s\} \quad (27)$$

3모수 Weibull 분포 함수를 적용하면, 피로 수명은 다음과 같이 표현된다.

$$N_i(P) = b_i[-\ln(1-P)]^{1/a_i} + c_i \quad (28)$$

여기서 a_i , b_i 및 c_i 는 한 응력 수위 피로 수명 분포의 Weibull 모수이다.

2연속 응력 수위 피로에서 누적 손상 모형들은 다음과 같다.

Miner 법칙 :

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (29)$$

Broutman과 Sahu 모형 :

$$\frac{1-q_1}{1-q_2} \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (30)$$

Hashin과 Rotem 모형 :

$$\left(\frac{n_1}{N_1}\right)^{\ln N_2 / \ln N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (31)$$

동등 순위 가정은 다음과 같은 식을 제공한다.

$$F_s[\sigma_u(P)] = F_1[N_1(P)] = F_2[N_2(P)] = P \quad (32)$$

여기서, F_s , F_1 과 F_2 는 각각 인장 강도, 첫번째 및 두번째 응력 수위 피로 수명의 3모수 Weibull 분포 함수들이다. 식(32)를 고려하여 식(27)과 (28)을 식(29), (30) 및 (31)에 대입하면 다음과 같은 두번째 응력 수위에서의 잔여 피로 수명 예측식을 구할 수 있다.

Miner 법칙 :

$$n_2 = \{b_2[-\ln(1-P)]^{1/a_2} + c_2\} \times \left\{1 - \frac{n_1}{b_1[-\ln(1-P)]^{1/a_1} + c_1}\right\} \quad (33)$$

Broutman과 Sahu's 모형 :

$$n_2 = \{b[-\ln(1-P)]^{1/a_2} + c_2\} \times \left\{1 - \frac{1 - \sigma_{a,1} / \{b_s[-\ln(1-P)]^{1/a_s} + c_s\}}{1 - \sigma_{a,2} / \{b_s[-\ln(1-P)]^{1/a_s} + c_s\}}\right\} \times \frac{n_1}{b_1[-\ln(1-P)]^{1/a_1} + c_1} \quad (34)$$

Hashin과 Rotem's 모형 :

$$n_2 = \{b_2[-\ln(1-P)]^{1/a_2} + c_2\} \times \left\{1 - \frac{n_1}{b_1[-\ln(1-P)]^{1/a_1} + c_1}\right\}^{\frac{\ln(b_2[-\ln(1-P)]^{1/a_2} + c_2)}{\ln(b_1[-\ln(1-P)]^{1/a_1} + c_1)}} \quad (35)$$

파손 확률 P 에서 퍼센트 파손 손상 법칙 [식(21)]은 다음과 같은 잔류 수명을 예측한다.

$$n_2 = b_2[-\ln(1-P)]^{1/a_2} + c_2 - n_{12} \quad (36)$$

2모수 Weibull 분포의 적용은 아래 기술한 관계식들을 식 (26)에서 (28)과 식 (33)에서 (36)까지 대입하면 된다.

$$\begin{aligned} c_s &= c_1 = c_2 = 0 \\ a_s &= a_1, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2 \\ b_s &= \beta_s, \quad b_1 = \beta_1, \quad b_2 = \beta_2 \end{aligned} \quad (37)$$

예측한 값들을 Table 6에서 Table 13까지 실험치와 비교하였다. 모든 경우에 다른 모형보다 뛰어난 모형은 결정할 수 없었으나 비교 결과 다음과 같은 견해를 제시한다. 선형 잔류 강도 저하 가정 (linear residual strength degradation)에서 출발한

Table 6 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using two-parameter Weibull distribution, low-high (0.7-0.85) test, $n_1 = 10000$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent Failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.10331 | 105 | 297 | 191 | - * | 130 |
| 0.19575 | 139 | 683 | 490 | 29 | 371 |
| 0.28819 | 268 | 1120 | 850 | 388 | 680 |
| 0.38064 | 345 | 1619 | 1276 | 800 | 1059 |
| 0.47308 | 445 | 2202 | 1785 | 1289 | 1521 |
| 0.56552 | 856 | 2899 | 2405 | 1885 | 2094 |
| 0.65796 | 1053 | 3767 | 3187 | 2639 | 2826 |
| 0.75041 | 3003 | 4913 | 4233 | 3652 | 3816 |
| 0.84285 | 3920 | 6601 | 5792 | 5167 | 5307 |
| 0.93529 | 10179 | 9853 | 8830 | 8136 | 8246 |

* Broutman and Sahu's model can not predict remaining fatigue life at this probability of failure

Table 7 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using three-parameter Weibull distribution, low-high (0.7-0.85) test $n_1=10000$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.10331 | 105 | 163 | 234 | - * | 164 |
| 0.19575 | 139 | 408 | 436 | - * | 326 |
| 0.28819 | 268 | 734 | 705 | 237 | 554 |
| 0.38064 | 345 | 1156 | 1060 | 570 | 866 |
| 0.47308 | 445 | 1698 | 1526 | 1009 | 1284 |
| 0.56552 | 856 | 2405 | 2145 | 1598 | 1852 |
| 0.65796 | 1053 | 3357 | 2993 | 2413 | 2643 |
| 0.75041 | 3003 | 4719 | 4225 | 3607 | 3808 |
| 0.84285 | 3920 | 6904 | 6230 | 5566 | 5729 |
| 0.93529 | 10179 | 11593 | 10600 | 9868 | 9970 |

* Broutman and Sahu's model can not predict remaining Fatigue life at these probabilities of failure

Table 8 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using two-parameter Weibull distribution, high-low (0.85-0.7) test, $n_1=500$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.21641 | 28200 | 6429 | 12208 | 22541 | 16387 |
| 0.38313 | 31944 | 17340 | 28416 | 34566 | 33162 |
| 0.54985 | 33747 | 27877 | 41758 | 45996 | 45901 |
| 0.71657 | 33900 | 39861 | 55705 | 58741 | 59138 |
| 0.88329 | 37458 | 57454 | 75045 | 77114 | 77679 |

Table 9 Comparison of predicted remaining fatigue life using three-parameter Weibull distribution, high-low (0.85-0.7) test, $n_1=500$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.21641 | 28200 | 5848 | 9630 | 20965 | 13361 |
| 0.38313 | 31944 | 15560 | 24649 | 31793 | 29517 |
| 0.54985 | 33747 | 25900 | 38484 | 43172 | 42740 |
| 0.71657 | 33900 | 38640 | 53746 | 56816 | 57102 |
| 0.88329 | 37458 | 58969 | 76234 | 78048 | 78578 |

Table 10 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using two-parameter Weibull distribution, low-high (0.75-0.85) test, $n_1=5000$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.14205 | 157 | 97 | 84 | - * | 62 |
| 0.19670 | 433 | 331 | 295 | - * | 231 |
| 0.25135 | 863 | 582 | 527 | 59 | 429 |
| 0.30599 | 928 | 853 | 782 | 351 | 653 |
| 0.36064 | 965 | 1148 | 1061 | 657 | 906 |
| 0.41528 | 1180 | 1469 | 1369 | 985 | 1189 |
| 0.46993 | 1416 | 1823 | 1710 | 1342 | 1507 |
| 0.52458 | 1649 | 2216 | 2090 | 1736 | 1865 |
| 0.57922 | 2454 | 2658 | 2520 | 2177 | 2273 |
| 0.63387 | 2541 | 3162 | 3012 | 2679 | 2744 |
| 0.68852 | 3777 | 3750 | 3587 | 3263 | 3297 |
| 0.74316 | 5746 | 4452 | 4275 | 3960 | 3963 |
| 0.79781 | 6057 | 5324 | 5133 | 4826 | 4797 |
| 0.85245 | 6087 | 6475 | 6268 | 5969 | 5905 |
| 0.90710 | 6191 | 8169 | 7942 | 7652 | 7547 |
| 0.96175 | 11401 | 11429 | 11172 | 10893 | 10729 |

* Broutman and Sahu's model can not predict remaining fatigue life at these probabilities of failure

Table 11 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using three-parameter Weibull distribution, low-high (0.75-0.85) test, $n_1=500$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.14205 | 157 | 58 | 70 | - * | 52 |
| 0.19670 | 433 | 213 | 236 | - * | 182 |
| 0.25135 | 863 | 396 | 418 | - * | 334 |
| 0.30599 | 928 | 610 | 626 | 178 | 514 |
| 0.36064 | 965 | 858 | 864 | 444 | 726 |
| 0.41528 | 1180 | 1145 | 1139 | 741 | 976 |
| 0.46993 | 1416 | 1479 | 1459 | 1079 | 1272 |
| 0.52458 | 1649 | 1869 | 1835 | 1470 | 1623 |
| 0.57922 | 2424 | 2330 | 2279 | 1927 | 2043 |
| 0.63387 | 2541 | 2880 | 2812 | 2472 | 2552 |
| 0.68852 | 3777 | 3552 | 3464 | 3136 | 3179 |
| 0.74316 | 5746 | 4393 | 4284 | 3967 | 3972 |
| 0.79781 | 6057 | 5491 | 5358 | 5052 | 5016 |
| 0.85245 | 6087 | 7019 | 6857 | 6563 | 6482 |
| 0.90710 | 6191 | 9412 | 9213 | 8932 | 8797 |
| 0.96175 | 11401 | 14423 | 14163 | 13901 | 13686 |

* Broutman and Sahu's model can not predict remaining fatigue life at these probabilities of failure

Table 12 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using two-parameter Weibull distribution, high-low (0.85-0.75) test, $n_1=500$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.15498 | 3514 | 862 | 991 | 4082 | 1322 |
| 0.23396 | 4775 | 4026 | 4497 | 7033 | 5482 |
| 0.31293 | 9422 | 7359 | 8072 | 10278 | 9366 |
| 0.39190 | 13588 | 10953 | 11856 | 13832 | 13325 |
| 0.47088 | 13882 | 14911 | 15974 | 17774 | 17553 |
| 0.54985 | 16854 | 19372 | 20577 | 22233 | 22228 |
| 0.62882 | 17355 | 24545 | 25882 | 27414 | 27582 |
| 0.70780 | 28916 | 30784 | 32248 | 33667 | 33980 |
| 0.78677 | 34693 | 38767 | 40362 | 41673 | 42113 |
| 0.86574 | 44769 | 50121 | 51861 | 53060 | 53619 |
| 0.94472 | 48190 | 71016 | 72949 | 74012 | 74696 |

Table 13 Comparison of predicted remaining fatigue life with experimental data using three-parameter Weibull distribution, high-low (0.85-0.75) test. $n_1=500$ cycles

| Two-stress level fatigue life prediction | | | | | |
|--|-------|-----------------|-------|-----------------|--------------|
| P | Data | Percent failure | Miner | Broutman & Sahu | Hashin Rotem |
| 0.15498 | 3514 | 1015 | 868 | 3832 | 1158 |
| 0.23396 | 4775 | 3711 | 3478 | 6252 | 4346 |
| 0.31293 | 9422 | 6758 | 6622 | 9162 | 7879 |
| 0.39190 | 13588 | 10230 | 10261 | 12569 | 11766 |
| 0.47088 | 13882 | 14236 | 14461 | 16553 | 16120 |
| 0.54985 | 16854 | 18944 | 19374 | 21264 | 21125 |
| 0.62882 | 17355 | 24625 | 25264 | 26966 | 27062 |
| 0.70780 | 28916 | 31743 | 32598 | 34121 | 34411 |
| 0.78677 | 34693 | 41222 | 42305 | 43650 | 44105 |
| 0.86574 | 44769 | 55306 | 56648 | 57806 | 58405 |
| 0.94472 | 48190 | 82744 | 84430 | 85360 | 86094 |

Broutman과 Sahu모형은 low-high 실험의 낮은 파손 확률에서 잔여피로 수명은 예측하지 못하는 경우가 있었으며; 4가지 예측 방법중 Broutman과 Sahu의 모형은 low-high 실험에서는 가장 작은, 또 high-low 실험에서는 가장 큰 잔여 피로 수명을 예측하며; 통상 Miner법칙의 예측 피로 수명은 파센트 파손 법칙의 예측과 Hashin과 Rotmen모형의 예측 사이에 있었으며; 누적 손상 모형의 응용에 3모수 Weibull 분포가 2모수 Weibull보다 나은 이

점이 없음이 발견되었다.

6. 결 론

(1) 파괴 강도와 일 응력 수위 피로 수명 분포는 정규 분포, 로그 정규 분포 혹은 Weibull 분포로 분석될 수 있다.

(2) 3모수 Weibull 분포가 파괴 강도 및 일 응력 수위 피로 수명 분포 모든 경우에 2모수 Weibull

분포보다 예측 결과가 좋았다.

(3) 피로 수명의 평균값들은 식(15)로 나타낸 피로 수명 예측식으로 분석할 수 있었다. 평균값들의 비교 결과 평균 로그 수명이 가장 작은 피로 수명 값을 가지며 β 가 항상 $b+c$ 보다 크다는 것이 밝혀졌다. 평균 피로 수명과 Weibull분포의 기대값들은 β 나 $b+c$ 보다 큰 경우가 있어 안전을 고려하면 이런 값들을 피로 수명의 평균값으로 사용하지 않아야 된다.

(4) 2응력 수위 피로 수명 분산은 로그 정규 분포와 Weibull 분포로 해석할 수 있었으며 2응력 수위 피로 수명 예측에서 3모수 Weibull분포 함수가 2모수 Weibull분포 함수보다 나은 이점이 없었다.

(5) 비통계학적 누적 손상 이론들은 다 응력 피로 수명 예측 응용에 확장된 강도-수명 동등 가정에 의해서 성공적으로 수정되었다.

참 고 문 헌

- (1) Weibull, W., 1951, "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability", *J. Applied Mechanics*, pp. 293~297.
- (2) Halpin, J. C., Kopf, J. R., and Goldberg, W., 1970, "Time Dependent Static Strength and Reliability for Composites", *J. Composite Materials*, Vol. 4, pp. 462~474.
- (3) Halpin, J. C., Jerina, K. L., and Johnson, T. A., 1973, "Characterization of Composites for the Purpose of Reliability Evaluation", *Analysis of Test Methods for High Modulus Fibers and Composites*, ASTM STP 521, pp. 5~64.
- (4) Broutman, L. J., and Sahu, S., 1972, "A New Theory to Predict Cumulative Fatigue Damage in Fiberglass Reinforced Plastics", *Composite Materials: Testing and Design(2nd conference)*, ASTM STP 497, pp. 297~311.
- (5) Hahn, H. T., and Kim, R. Y., 1975, "Proof Testing of Composite Materials", *J. Composite Materials*, Vol. 9, pp. 297~311.
- (6) Chou, P. C., and Croman, R., 1978, "Residual Strength in Fatigue Based on the Strength-Life Equal Rank Assumption", *J. Composite Materials*, Vol. 12, pp. 177~194.
- (7) Awerbuch, J., and Hahn, H. T., 1977, "Fatigue and Proof-Testing of Unidirectional Graphite/Epoxy Composite", *Fatigue of Filamentary Composite Materials*, ASTM STP 636, K. L. Reifsnider and K. N. Lauraitis, eds., pp. 248~266.
- (8) Hahn, H. T., 1981, "Proof Load Determination for Pressure Vessels Wound with Aramid Fiber", *Test Methods and Design Allowables for Fibrous Composites*, ASTM STP 734, C. C. Chamis, ed., pp. 361~375.
- (9) Hahn, H. T., and Hwang, D. G., 1982, "Failure Characterization of a Graphite/Epoxy Laminate Through Proof Testing", *Composite Materials: Testing and Design (6th Conference)*, ASTM STP 787, I. M. Daniel, ed., pp. 247~273.
- (10) Kim, R. Y., and Park, W. J., 1980, "Proof Testing Under Cyclic Tension-Tension Fatigue", *J. Composite Materials*, Vol. 14, pp. 69~79.
- (11) Yang, J. N., 1977, "Reliability Prediction for Composites Under Periodic Proof Tests in Service", *Composite Materials, Testing and Design (4th Conference)*, ASTM STP 617, pp. 272~295.
- (12) Yang, J. N., and Liu, M. D., 1977, "Residual Strength Degradation Model and Theory of Periodic Proof Tests for Graphite/Epoxy Laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 11, pp. 176~203.
- (13) Yang, J. N., and Sun., C. T., 1980, "Proof Test and Fatigue of Unnotched Composite Laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 14, pp. 168~176.
- (14) Wang, A. S. D., Chu, P. C., and Alper, J., 1981, "Effects of Proof Test on the Strength and Fatigue Life of a Unidirectional Composite", *Fatigue of Fibrous Composite Materials*, ASTM STP 723, pp. 116~132.
- (15) Hahn, H. T., 1979, "Fatigue Behavior and Life Prediction of Composite Laminates", *Composite Materials, Testing and Design (5th Conference)*, ASTM STP 674, S. W. Tsai, ed., pp. 383~417.
- (16) Hahn, H. T., and Kim, R. Y., 1976, "Fatigue Behavior of Composite Laminate", *J. Composite Materials*, Vol. 10, pp. 156~180.
- (17) Park, W. J., and Kim, R. Y., 1982, "Statistical Analysis of Composite Fatigue Life", *Progress in Science and Engineering of Composites*, T. Hayashi, et al., eds., ICCM-IV, Japan, pp. 709~716.
- (18) Yang, J. N., 1978, "Fatigue and Residual Strength Degradation for Graphite/Epoxy Composites Under Tension-Compression Cyclic Loadings", *J. Composite Materials*, Vol. 12, pp. 19~39.
- (19) Yang, J. N., and Jones, D. L., 1978, "Statistical Fatigue of Graphite/Epoxy Angle-Ply Laminates in Shear", *J. Composite Materials*, Vol. 12, pp. 371~389.

- (20) Yang, J. N., and Miller, R. K., and Sun, C. T., 1980, "Effect of High Load on Statistical Fatigue of Unnotched Graphite/Epoxy Laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 14, pp. 82~94.
- (21) Whitney, J. N., 1981, "Fatigue Characterization of composite Materials", *Fatigue of Fibrous Composite Materials*, ASTM STP 723, pp. 133~151.
- (22) Radhardrishan, K., 1984, "Fatigue and Reliability Evaluation of Unnotched Carbon Epoxy Laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 18, pp. 21~31.
- (23) Chou, P. C., and Croman, R., 1979, "Degradation and Sudden-Death Models of Fatigue of Graphite/Epoxy Composites", *Composite Materials: Testing and Design (5th conference)*, ASTM STP 674, S. W. Tsai, ed., pp. 431 ; 454.
- (24) Chou, P. C., and Croman, R., 1979, "Scale Effect in Fatigue of Composite Materials", *J. Composite Materials*, Vol. 13, pp. 178~194.
- (25) Branard, P. M., Butler, R. J., and Curtis, P. T., 1985, "Fatigue Scatter of UD Glass Epoxy, a Fact or Fiction?", *Composite Structures 3*, I. H. Marshall, ed., *Proceedings of the 3rd International Conference on Composite Structures*, Scotland, pp. 69~82.
- (26) Chou, P. C., and Miller, H., 1981, "Maximum Likelihood Estimation of a Two-Segment Weibull Distribution for Fatigue Life", *Statistical Analysis of Fatigue data*, ASTM STP 744, R. E. Little, and Ekvall, J. C., eds., pp. 114~128.
- (27) Han, K. S., 1983, "Compressive fatigue behavior of a glass fibre-reinforced polyester composite at 300K and 77K", *Composites*, Vol. 14, pp. 145~150.
- (28) Sendeckyj, G. P., 1981, "Fitting Models to Composite Materials Fatigue Data", *Test Methods and Design Allowables for Fibrous Composites*, ASTM STP 734, C. C. Chamis, ed., pp. 245~260.
- (29) Ryder, J. T., and Walke, E. K., 1977, "Effect of Compression on Fatigue Properties of a Quasi-Isotropic Graphite/Epoxy Composite", *Fatigue of Filamentary Composite Materials*, ASTM STP 636, pp. 3~26.
- (30) Yang, J. N., and Jones, D. L., 1980, "Effect of Load Sequence on the Statistical Fatigue of Composites", *AIAA Journal*, Vol. 18, pp. 1525~1531.
- (31) Yang, J. N., and Jones, D. L., 1981, "Load Sequence Effects on the fatigue of Unnotched Composite Materials", *Fatigue of Fibrous Composite Materials*, ASTM STP 723, pp. 213~232.
- (32) Yang, J. N., Du, S., 1983, "An Exploratory Study Into the Fatigue of Composites Under Spectrum Loading". *J. Composites Materials*, Vol. 17, pp. 511~526.
- (33) Yang, J. N., and Jones, D. L., 1983, "Load Sequence Effects on Graphite/Epoxy [35] Laminates", *Long-Term Behavior of Composites*, ASTM STP 813, T. K. O'Brien, ed., pp. 246~262.
- (34) Chou, P. C., 1979, "A Cumulative Damage Rule for Fatigue of Composite Materials", *Modern Developments in Composite Materials and Structures*, J. R. Vinson, ed., ASME, pp. 343~355.
- (35) Han, K. S., and Hamid, M., 1983, "Fatigue Life Scattering of RP/C", *38th Annual RP/CI Conference*, SPI.
- (36) Hwang, W., and Han, K. S., 1987, "Statistical Study of Strength and Fatigue Life of Composite Materials", *Composites*, Vol. 18, pp. 47~53.
- (37) Hwang, W., 1984, "Analysis on Fatigue of Composite Materials", M. S. Thesis, State University of New York at Buffalo.
- (38) Shimokawa, T., and Hamaguchi, Y., 1983, "Distributions of Fatigue Life and Fatigue Strength in Notched Specimens of a Carbon Eight-Hardness-Satin Laminate", *J. composite Materials*, vol. 17, pp. 64~76.
- (39) Whitney, J.M., 1982, "Use of the Lognormal Distribution for Characterizing Composite Materials", *Composite Materials: Testing and Design (6th Conference)*, ASTM STP 787, I. M. Daniel, ed., pp. 483~497.
- (40) Whitney, J. M., 1983, "A Residual Strength Degradation Model for Competing Failure Modes", *Long-Term Behavior of Composites*, ASTM STP 813, T. K. O'Brien, ed., pp. 225~245.
- (41) Johnsen, S. E. J., and Doner, M. A., 1981, "A Statistical Simulation Model of Miner's Rule", *J. Engineering Materials and Technology*, Vol. 103, pp. 113~117.
- (42) Miner, M. A., 1945, "Cumulative Damage in Fatigue", *J. Applied Mechanics*, pp. A-159~164.
- (43) Hashin, Z., and Rotem, A., 1978, "A Cumulative Damage Theory of Fatigue Failure", *Materials Science and Engineering*, Vol. 34, pp. 147~160.
- (44) Hashin, Z., 1985, "Cumulative Damage Theory for Composite Materials: Residual Life and Residual Strength Methods", *Composites Science and Technology*, Vol. 23, pp. 1~19.
- (45) Han, K. S. and Hwang, W., 1987, "Fatigue of Composite Materials-Damage Model and Life Prediction". *Symposium on Composite Materials:*

Fatigue and Fracture, ASTM, April 27-28, Cincinnati, Ohio, U.S.A.

(46) Hwang, W., 1987, "Interlaminar Fracture and

Damage of Composite Materials", Ph. D. Dissertation, State University of New York at Buffalo.