

<論 文>

# 회전속도 의존 매개변수를 가진 회전체-베어링계의 동적 해석

홍 성 욱\* · 이 증 원\*

(1988년 3월 24일 접수)

## Dynamic Analysis of Spin Speed Dependent Parameter Rotor-Bearing Systems

Seong-Wook Hong and Chong-Won Lee

**Key Words :** Rotor-Bearing System(회전체-베어링계), Unbalance Response Analysis(불균형 응답 해석), Spin Speed Dependency(회전속도 의존성), Eigenvalue Problem(고유치 문제), Lambda Matrix(람다 행렬), Finite Element Model(유한요소 모델)

### Abstract

An efficient unbalance response analysis method for rotor-bearing systems with spin speed dependent parameters is developed by utilizing a generalized modal analysis scheme. The spin speed dependent eigenvalue problem of the original system is transformed into the spin speed independent eigenvalue problem by introducing a lambda matrix, assuming the bearing dynamic coefficients are well approximated by polynomial functions of spin speed. This method features that it requires far less computational effort in unbalance response calculations and that the influence coefficients are readily available. In addition, the critical speeds and the corresponding logarithmic decrements can be readily identified from the resulting eigenvalues.

### 1. 서 론

회전체-베어링계에 대한 강제진동 해석은 그 구조 동력학적 특성해석<sup>(1-6)</sup>이나 보다 적극적인 응용, 예를 들면 균형잡이(balancing)<sup>(7-9)</sup> 등을 위해 많이 활용되고 있다. 그 중에서도 특히 회전수에 동조되는 응답특성인 불균형 응답 해석(unbalance response analysis)은 회전체 설계 및 균형잡이에 있어 매우 유익한 정보를 제공하는 중요한 분야이다.

이와 같은 회전체-베어링계에 대한 불균형 응답 특성은 보편적으로 유한요소법<sup>(10-12)</sup>이나 전달행렬법<sup>(13-15)</sup>을 사용하여 구하게 되는데, 회전속도가 커

지거나 유체 윤활 베어링 등이 있을 경우에는 회전속도 의존성 (spin speed dependency) 때문에 계산상에 어려움이 따른다. 즉, 회전속도 의존성이 개입되면 회전수에 따라 계의 동특성이 변하므로 기존의 모우드 해석 방법을 적용하기 위해서는 계산하러 하는 매 속도 마다 새로운 고유벡터를 구해야 하므로 비효율적이다. 따라서 모우드 해석을 하는 경우는 회전속도 의존성이 무시될 수 있는 경우로 국한되어 왔고 대부분의 경우에는 직접 계산법에 의존해 왔다. 여기서 직접 계산법이란 주어진 조화 입력(harmonic input)에 대해 정상응답 형태를 가정하여 대입하여 만들어진 동강성 행렬(dynamic stiffness matrix)의 역행렬을 구함으로써 얻어 내는 방법을 말한다. 따라서 구하고자 하는 모든 회전속도에서 반복적으로 역행렬을 계산해야 하므로 대상 회전체-베어링계가 낮은 자유도로 모델링될

\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

수 있는 경우를 제외하고 거의 모든 경우에 있어 비효율적인 방법이라 할 수 있다. 또한 부수적으로는 모우드 매개변수를 비롯한 동특성 관련 정보를 직접적으로 얻지 못한다는 단점이 있게 된다.

본 논문에서는 회전체 베어링계에 대한 불균형 응답 계산시 회전속도 의존성을 손쉽게 고려할 수 있는 방법에 대해 논하고자 한다. 그 방법은 람다 행렬(lamda matrix)을 도입하여, 회전속도 의존성을 지닌 고유치 문제를 회전속도 의존성이 없는 문제로 변환시킨 후 기존의 모우드 해석기법을 적용하여 불균형 응답특성을 알아내는 방법이다. 이때 베어링의 회전속도 의존성을 다항식(polynomial)으로 근사화할 수 있다는 기본 가정을 두었는데, 이러한 가정은 실제 베어링이 관심있는 회전수 영역에서 고차의 다항식으로 충분히 정확하게 근사화될 수 있으므로 응용성을 크게 약화시키지는 않는다. 특별히 회전속도 의존성이 자이로 효과(gyroscopic effect)에 의해서만 기인할 때는 여기서 제시하는 방법은 전혀 오차를 주지 않게 된다.

여기서 제시한 방법은 계산이나 결과 해석상 기존의 방법에 비해 다음과 같은 주요한 장점을 갖는다. 먼저 고유치 문제를 한번만 풀면 여러가지 경우에 대한 반복 계산이 용이하고 그 계산 속도도 단순히 산술계산적인 것이므로 월등히 빠르다. 둘째로는 불균형 응답 특성을 계산하기 전에 불균형의 위치나 측정점의 위치에 따른 응답 민감도를 손쉽게 알아낼 수 있다. 즉, 별도의 계산 수행없이 영향계수(influence coefficients)를 쉽게 파악할 수 있다. 또한 회전속도 의존성이 전속도구간에 걸쳐 정확히 다항식으로 나타나거나 이와 유사하면 구해진 고유치, 고유벡터로부터 감쇠 임계속도 및 모우드벡터를 얻을 수 있다.

본 논문에서는 이론식의 전개를 위해 유한 요소 모델을 이용하였고, 제안된 방법의 검증을 위해 수지에제와 그결과를 기술하였다.

## 2. 운동 방정식<sup>(16)</sup>

회전체-베어링계에 대한 유한 요소 모델(finite elements model)은 3개의 요소 즉 유한 탄성 회전축(finite flexible shaft), 강성회전판(rigid disc), 그리고 베어링의 3요소들의 조합으로 표현한다. 유한 탄성 회전축을 모델링하기 위해서는 흔히 rayleigh보를 가정하며, 내부 및 외부 감쇠력을 무

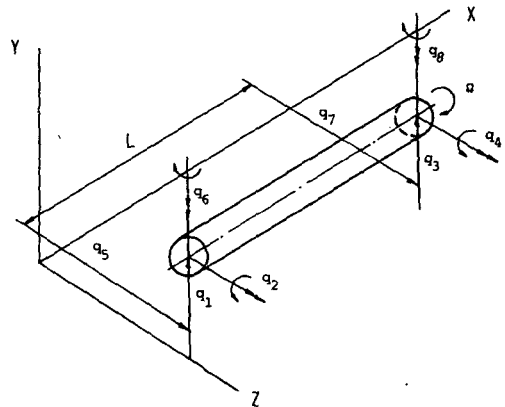


Fig. 1 Typical nodal coordinates system<sup>(16)</sup>

시할 때 유한 탄성 회전축에 대한 요소운동 방정식은 Fig. 1에 표시한 절점 좌표계를 사용할 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m^s & 0 \\ 0 & m^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^s \\ \dot{z}^s \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & g^s \\ -g^s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^s \\ z^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^s & 0 \\ 0 & k^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^s \\ z^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y^s \\ f_z^s \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $\{y^T \ z^T\}^T = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8\}^T$  여기서  $\Omega$ 는 회전속도, 상첨자  $T$  및  $s$ 는 각각 전치행렬(transpose) 및 축요소를 의미한다.  $y^s, z^s$ 는 각  $XY$  및  $XZ$ 평면에서의 절점 좌표벡터 들이고  $f_y^s, f_z^s$ 는 그 평면에서 작용하는 여러 형태의 힘을 나타내는  $4 \times 1$ 벡터이다. 축요소 행렬  $m^s, g^s$ 는 대칭인 동시에 양정치(positive definite),  $k^s$ 는 반양정치(positive semidefinite)이며 부록에 그 요소들을 열거하였다.

회전축에 대해 축대칭인 강성 회전판은 다음과 같은 운동방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m^d & 0 \\ 0 & m^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^d \\ \dot{z}^d \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & g^d \\ -g^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^d \\ z^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y^d \\ f_z^d \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 상첨자  $d$ 는 회전 원판을 의미하고  $y^d, z^d$ 는 각각  $XY$  평면 및  $XZ$ 평면에서 절점 좌표벡터이다. 또한  $f_y^d, f_z^d$ 는 원판에 미치는  $2 \times 1$ 힘벡터이다. 회전판에서의 요소행렬  $m^d, g^d$  역시 부록에 그 요소들을 열거하였다.

베어링은 선형이며 단순히 회전속도 의존성만을 갖는 8개의 계수, 즉 4개의 강성계수와 4개의 감쇠계수로 표현된다고 가정하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} C_{yy}^b(\Omega) & C_{yz}^b(\Omega) \\ C_{zy}^b(\Omega) & C_{zz}^b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^b \\ \dot{z}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy}^b(\Omega) & k_{yz}^b(\Omega) \\ k_{zy}^b(\Omega) & k_{zz}^b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^b \\ z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 상첨자  $b$ 는 베어링을 의미하며,  $C_{ij}^b, k_{ij}^b$ 는 선형화된 감쇠 및 강성 계수로서  $j$ 방향운동에 따른  $i$ 방향의 계수이다. 이때  $f_y^b, f_z^b$ 는  $XY$  및  $XZ$ 평면에서의 베어링에 미치는 힘벡터이다.

이와같은 요소행렬들을 적절히 조합하면, 전단변형 및 내부감쇠력을 무시한 경우의 회전체-베어링계에 대한 유한 요소 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M^{s+a} \ddot{q} + (C^b(\Omega) + \Omega G^{s+a}) \dot{q} + (K^s + K^b(\Omega)) q = f(t) \quad (4)$$

여기서  $q, f$ 는 각각 전체 좌표벡터와 전체 힘벡터를 나타낸다. 회전속도 의존성을 갖는 베어링 강성 및 감쇠행렬인  $K^b(\Omega), C^b(\Omega)$ 는 모두 일반적으로 비대칭인 동시에 비정치(indefinite)이고, 대칭성을 갖는 질량 및 축강성행렬,  $M^{s+a}, K^s$ 는 각각 양정치와 반양정치이며, 자이로 행렬  $G^{s+a}$ 는 교대행렬(skew symmetric)이다. 이와같은 행렬들의 크기는 좌표벡터가  $N$ 차일 때 모두  $N \times N$ 이다.

이론 전개상의 편의를 위해 베어링 요소절점만을 포함하는 좌표벡터를 다음과 같은 관계식을 정의하여 얻어내기로 한다.

$$q_b = \begin{bmatrix} q_{by} \\ q_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b & \\ & N \times N \end{bmatrix} q \quad (5)$$

여기서  $n_b$ 는 베어링의 수이고  $I_b$ 는 0과 1로 이루어진 변환벡터이다.

### 3. 불균형 응답 해석을 위한 일반화된 고유치 문제

먼저 회전속도 의존성을 갖는 베어링 계수들이 회전수,  $\Omega_{min} \leq \Omega \leq \Omega_{max}$  구간에서 실수이며 연속적이라 가정하면 주어진 충분히 작은  $\epsilon$ 에 대해 다음식을 만족하는 충분히 큰 다항식 차수  $n_c, n_k$ 를 찾을 수 있다<sup>(17)</sup>. 즉

$$\left| C^b(\Omega) - \sum_{i=0}^{n_c} C_i^b \Omega^i \right| \leq \epsilon \quad (6)$$

$$\left| K^b(\Omega) - \sum_{i=0}^{n_k} K_i^b \Omega^i \right| \leq \epsilon$$

여기서  $C_i^b, K_i^b$ 는  $N \times N$  실계수 행렬로서  $n_c, n_k$ 는 각각  $C^b$  및  $K^b$ 에 해당하는 차수를 의미하고

$\Omega_{min}, \Omega_{max}$ 는 관심있는 운전영역에서의 최소, 최대 회전속도이다. 식 (6)을 식 (4)에 대입하고 조화 입력  $f = f_0 e^{j\Omega t}$ 라 하고 이때의 정상응답을  $q = q_0 e^{j\Omega t}$ 라 하면 회전속도에 동조되는 입력이 가해질 때 응답은

$$q_0 = H(j\Omega) f_0 \quad (7)$$

로 나타나는데 이때  $j$ 는 단위허수이고

$$H(j\Omega) = [-\Omega^2 M^{s+a} + j\Omega^2 G^{s+a} + j \sum_{i=0}^{n_c} C_i^b \Omega^{i-1} + \sum_{i=0}^{n_k} K_i^b \Omega^i + K^s]^{-1}$$

로 나타난다. 여기서 전개상의 편의를 위해 다음과 같은 람다행렬<sup>(18)</sup>을 도입한다.

$$D_r(\lambda) = A_r \lambda^r + A_{r-1} \lambda^{r-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \quad (8)$$

여기서

$$r = \max(n_c + 1, n_k, 2)$$

$$A_0 = K^s + K^b$$

$$A_1 = (K^b + jC^b) / j$$

$$A_2 = M^{s+a} - jG^{s+a} + (K_z^b + jC_z^b) / j^2$$

$$A_i = (K_i^b + jC_{i-1}^b) / j^i, \quad i \geq 3$$

이때  $A_i$ 는 회전수에 관련없는  $N \times N$  복소행렬이다. 람다행렬의 차수는 항상 2보다 크거나 같고  $i \geq 3$ 인 경우는 베어링 계수만을 포함하고 있으므로 국부적인 요소만을 갖는 행렬이 된다. 람다행렬이 구성되면 다음과 같은 관계식이 만족된다.

$$H(j\Omega) = [D_r(\lambda)]_{\lambda=j\Omega}^{-1} \quad (9)$$

참고문헌 (18)에서 제시한 방법을 고려하여 람다행렬에 관련된 일반화된 고유치문제(latentvalue problem; generalized eigenvalue problem) 및 그 수반문제(adjoint problem)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D_r(\lambda) u = 0 \quad (10)$$

$$\bar{D}_r^T(\lambda) v = 0 \quad (11)$$

여기서  $u, v$ 는 각각 우고유벡터 및 좌고유벡터를 나타내고 '—'는 공액복소수를 의미한다.  $A_i, i \geq 3$ 인 경우에는 일반적으로 역행렬이 존재하지 않으므로  $D_r(\lambda)$ 는 비정칙(irregular) 람다행렬이 되나 그 계수(rank)는  $N$ 이며 고유치는  $s = 2N + 2(r - 2)n_b$ 개 존재하게 된다. 식 (10)과 (11)을 직접 푸는 방법보다는 다음과 같은 고유치 문제 및 그 수반 문제로 푸는 방법이 잘 알려져 있다.

$$(\lambda A + B) R = 0 \quad (12)$$

$$(\lambda \bar{A}^T + \bar{B}^T) L = 0 \quad (13)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} A'_r & A'_{r-1} & \cdots & A'_3 & A_2 & A_1 \\ I_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & I_b & 0 & 0 \\ & & & & I_2 & 0 \end{bmatrix}_{s \times s}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_0 \\ -I_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & -I_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & & & & -I_2 & 0 \end{bmatrix}_{s \times s}$$

이때  $k \geq 3$ 이면  $A'_k = A_k I_b$ 이며  $I_1, I_2$ 는 각각  $2n_b \times 2n_b$  및  $N \times N$ 인 항등행렬이다. 우고유벡터와 좌고유벡터인  $R, L$ 은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$R = [U^T \ u^T]^T \tag{14}$$

$$L = [v^T \ V^T]^T \tag{15}$$

여기서  $U, V$ 는 식 (12) (13)에 의해 결정되는  $(s-N)$  차의 벡터들이다. 식 (12) (13) 으로 표현되는 고유치 문제는 고유치 및 그에 해당되는 우고유벡터와 좌고유벡터  $R_i, L_i$ 를 주게 되는데 이는 다음과 같은 직교조건(orthogonality condition)을 갖도록 정규화할 수 있다.

$$\bar{L}_i^T A R_j = \delta_{ij} \tag{16}$$

$$\bar{L}_i^T B R_j = -\lambda_i \delta_{ij}$$

람다행렬의 역행렬은 고유치 및 고유벡터들을 이용하여 다음과 같이 대수식으로 쓸 수 있다.

$$[D_r(\lambda)]^{-1} = \sum_{i=1}^s \frac{H_i}{\lambda - \lambda_i} \tag{17}$$

이때 잉여 행렬(residue matrix)은

$$H_i = u_i v_i^T, \quad i=1, 2, \dots, s$$

로 쓸 수 있다. 식 (17)은 식 (12)에 의해 정의된 행렬  $A, B$ 를 사용하여 식 (7)을 표현한 후 식 (16)의 직교조건을 적용하여 얻을 수 있다. 식 (7), (9), (17)을 이용하면 회전속도에 동조되는 가진력에 대한 응답은 다음과 같이 표현할 수 있다,

$$q_0 = \sum_{i=1}^s \frac{H_i f_0}{j\Omega - \lambda_i} = \alpha(\Omega) f_0 \tag{18}$$

여기서  $\alpha(\Omega)\Omega^2$ 는 영향계수 행렬(influence coefficient matrix)이다.

식 (18)에 의하면 주어진 회전수에 대해 응답을 계산하기 위해서 오직 대수적으로 합하는 계산만이 필요하다. 이때 고유치 문제는 오직 한번 푸는 것으로 충분하다. 이와 같은 최종식은 회전속도가 변하는 경우 매번 복소 행렬의 역행렬을 계산해야 하

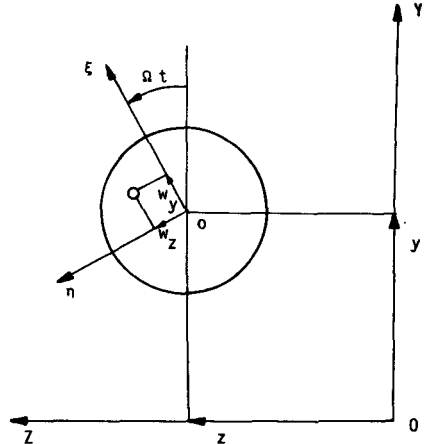


Fig. 2 Coordinates for unbalance representation

는 직접계산에 비교할 때 대부분의 경우 훨씬 편리하게 이용될 수 있다. 불균형 응답계산을 위해 식 (18)에 주어진 힘 벡터  $f_0$ 는 Fig. 2와 같은 좌표계를 따를 때 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_0 = \begin{bmatrix} W \\ -jW \end{bmatrix} \Omega^2 \tag{19}$$

여기서 불균형벡터  $W$ 는 다음과 같이 나타난다.

$$W = \begin{bmatrix} -w_{y1} + jw_{z1} \\ 0 \\ w_{y2} + jw_{z2} \\ 0 \\ \vdots \\ w_{yn} + jw_{zn} \\ 0 \end{bmatrix}$$

이때  $n$ 은 절점의 수, 그리고  $w_{yi}, w_{zi}$ 은 각각  $y, z$ 방향의 성분을 의미한다.

균형잡이나 매개변수 규명을 위해서는 센서나 균형잡이면의 위치에 관한 응답 민감도 특성을 조사할 필요가 있다. 일반적으로 불균형과 센서의 축방향 위치뿐만 아니라 센서의 방향도 측정된 응답 특성에 큰 영향을 주게되는데 여기서는 불균형응답의 타원체도의 장반경을 이용하여 다음과 같은 응답 민감도(response sensitivity)를 정의하도록 한다. 즉

$$S_{ij}(\Omega) = R_{maj}(\Omega) \tag{21}$$

$i$  : sensor locaton

$j$  : unbalance location

여기서

$$R_{maj}(\Omega)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(y_{ic}(\Omega) + z_{is}(\Omega))^2 + (z_{ic}(\Omega) - y_{is}(\Omega))^2} \right. \\ \left. + \sqrt{(y_{ic}(\Omega) - z_{is}(\Omega))^2 + (z_{ic}(\Omega) + y_{is}(\Omega))^2} \right\}$$

그리고

$$y_{ic}(\Omega) = \text{Re}\{y_i(\Omega)\}$$

$$y_{is}(\Omega) = -\text{Im}\{y_i(\Omega)\}$$

$$z_{ic}(\Omega) = \text{Re}\{z_i(\Omega)\}$$

$$z_{is}(\Omega) = -\text{Im}\{z_i(\Omega)\}$$

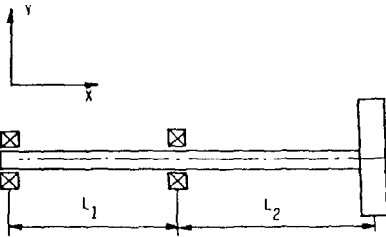
이와같은 응답민감도는 센서의 방향에 무관한 응답민감도를 나타내게 된다. 균형잡이를 위해, 센서 및 균형잡이면(balancing plane) 위치 결정을 하는데 이와같은 민감도를 사용하면 매우 편리하다.

### 4. 수치계산예

여기서는 제시한 방법에 대한 기본개념을 예시하기 위해 두개의 수치계산예를 들어 설명한다.

#### 【예제 1】 외팔 회전체-베어링계

본예제에서는 Fig. 3에 보인 바와 같은 회전체 베어링계에 대해 임계속도(critical speed)를 계산하는 것에 대해 다루었다. 고려된 계에 대한 자세한 제원은 Table 1에 주어진 바와 같다. 비감쇠이고 등방성(isotropy)이거나 직방성(orthotropy)를 갖는 베어링의 경우에 계산된 고유치는 기존의 방



#### Shaft

- Shaft length 1.2m ( $L_1 = L_2 = 0.6\text{m}$ )
- Shaft diameter 6cm
- Shaft density 7833kg/m<sup>3</sup>
- Young's modulus  $2.068 \times 10^{11}\text{N/m}^2$

#### Disk

- Mass 7.5kg
- Polar mass moment of inertia 0.0368kgm<sup>2</sup>
- Transverse mass moment of inertia 0.0190kgm<sup>2</sup>

#### Bearings

- Stiffness and damping coefficients  $k_{yy} = 2.548 \times 10^7\text{N/m}$   $k_{zz} = 3.806 \times 10^7\text{N/m}$   
 $c_{yy} = c_{zz} = 7000\text{Ns/m}$ , the others zero

Fig. 3 Overhung rotor bearing system

Table 1 Damped critical speeds/logarithmic decrements of overhung rotor system determined by the proposed method and the conventional method

Eigenvalue :  $\lambda_k = \sigma_k + jw_k$

Logarithmic decrement :  $\delta_k = -2\pi\sigma_k/w_k$

Mode	Present $w_k(\text{rpm})/\delta_k$	Conventional $w_k(\text{rpm})/\delta_k$
1	2454.41/0.0384	2454.54/0.0385
2	2535.33/0.0201	2535.44/0.0201
3	13100.16/0.9428	13104.37/0.9467
4	15367.07/0.6987	15365.14/0.7021
5	18195.42/0.2354	18188.98/0.2528
6	20733.53/0.3871	2075.93/0.3644

법<sup>(11,19)</sup>에서 구해지는 전진, 후진 임계속도(forward and backward critical speed)와 같다. 만일 임계속도가 기존의 방법에 의해 구해지지 않을 때, 즉 감쇠가 있거나 이방성(anisotropy)이 존재할 때 감쇠 임계속도(damped critical speed)는 회전속도와 동조되는 감쇠 고유진동수(damped natural frequency)로 정의한다<sup>(20~21)</sup>. 그러나 회전속도에 동조되는 응답의 경우를 고려하면 이와 같은 정의는 감쇠 임계속도가 회전수가 변할 때 같이 변화하므로 혼란이 야기될 뿐 아니라, 일반적으로 휘돌림 속도 선도(whirl speed chart)를 필요로 한다.

Fig. 4는 모우드 변환 방법<sup>(16)</sup>을 이용하여 얻어낸 휘돌림 속도 선도를 보여주고 있다. Table 1에서,

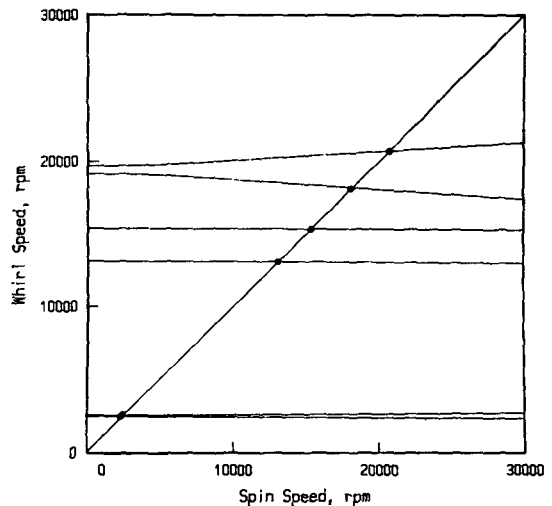


Fig. 4 Whirl speed chart of the overhung rotor bearing system

제시된 방법에 의한 결과와 Fig. 4를 이용하여 얻어낸 감쇠 임계속도 및 대수 감쇠율(logarithmic decrement)을 비교하였다. 기존의 방법에서 얻은 감쇠는 상대 안정도를 의미하는 반면 여기서 제시한 방법은 응답 확대율을 나타내게 된다.

### 【예제 2】 균일 축 회전체-베어링계

두개의 동일한 평저어널 베어링에 의해 양끝이 지지되고 있는 균일 축 회전체를 예제로 선택하였다. 자세한 제원은 Table 2와 같다. 여기서 베어링은 회전수 영역 1000~1200rpm에서 이상적인 폭이 좁은 베어링(ideal short bearing)으로 가정하였다. 참고문헌(21)에 주어진 식에 의해 얻어진 회전속도 의존 강성 및 감쇠계수들이 Fig. 5(a), 5(b)에 보여지고 있다. 축은 4개의 균등 분할된 유한 요소로 모델링하였고 계산을 위해  $r = n_c + 1 = n_h$ 로 두었다.

Fig. 6은 대표적인 불균형 응답 특성곡선으로서 각 절점에서의 응답을 정규화시켜 3차원적으로 나타내었다. 이와 같은 형태의 응답곡선들은 균형잡이나 매개변수 규명에 효과적으로 응용될 수 있다. 그림을 얻기 위해 베어링의 동특성 계수들을 강성은 회전수에 대해 4차, 감쇠는 3차로 최소오차자승법을 이용, 근사화하였다. 회전수 7000rpm에서의 응답민감도를 Table 3에 나타내었다. Table 3에서 볼 수 있는 바와 같이 7000rpm은 첫번째 임계속도 근처에 있으므로 첫번째 모우드 형상을 많이 반영하고 있음을 알 수 있다. 한편 행렬을 살펴보면 대칭이 아님을 알 수 있는데 이는 계가 비자기수반

(non-self-adjoint)임을 나타내고 있다. 표에 의하면 7000rpm에서는 센서 및 균형잡이편은 축의 가운데에 위치시키는 것이 유리함을 알 수가 있다.

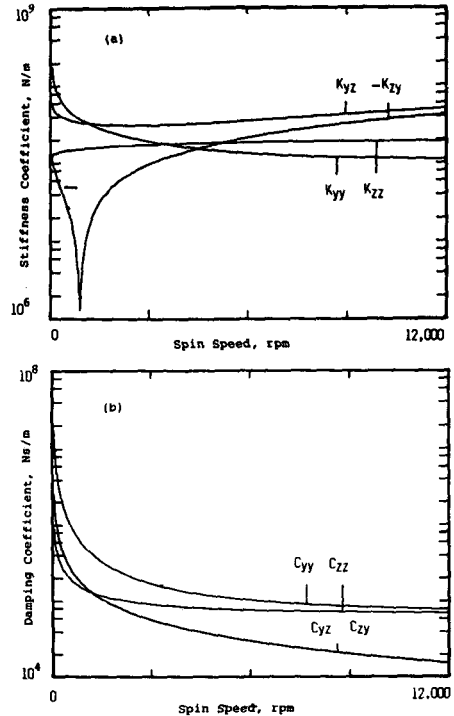


Fig. 5 Spin speed dependent bearing dynamic coefficients

(a) Stiffness Coefficients  
(b) Damping Coefficients

Table 2 Specifications for uniform shaft bearing system

Shaft	
Shaft length	1.27m
Shaft diameter	10.16cm
Shaft density	7833kg/m <sup>3</sup>
Young's modulus	2.068 × 10 <sup>11</sup> N/m <sup>2</sup>
Bearings (assume ideal short bearing ; L/D=1/4)	
Bearing length	2.54cm
Journal diameter	10.16cm
Oil viscosity	6.9cp
Bearing clearance	0.051mm
Static bearing load	395N

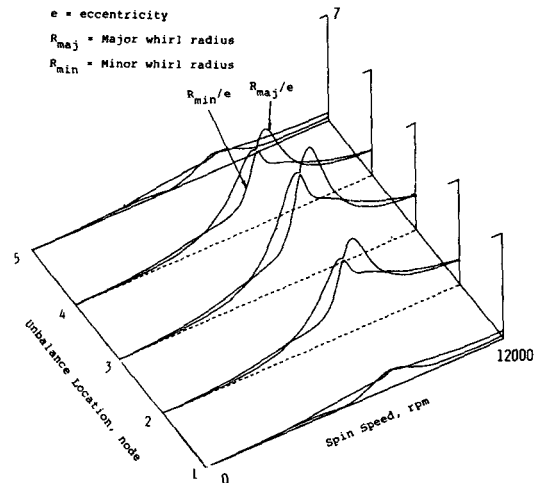


Fig. 6 Normalized unbalance response at the mid-span with changing the unbalance location

Table 3 Response sensitivity matrix w.r.t. sensor and unbalance locations

$N_u$	$N_s$				
	1	2	3	4	5
1	.581E-2*	.134E-1	.171E-1	.136E-1	.552E-2
1	.134E-1	.610E-2	.833E-1	.591E-1	.137E-1
3	.173E-1	.831E-1	.166E-0	.831E-1	.173E-1
4	.137E-1	.591E-1	.831E-1	.610E-1	.134E-1
5	.551E-2	.136E-1	.171E-1	.134E-1	.581E-2

$N_u$  : unbalance location (node) ;

$N_s$  : sensor location (node)

\* Denotes the major whirl radius at the sensor location when a unit unbalance (kg. m) is attached to the selected unbalance location at the rotation speed of 7000 rpm (unit = m/(kg.m)).

## 5. 결 론

## 참 고 문 헌

본 논문에서는 회전체 베어링계에 회전속도 의존성이 개입되는 경우, 그중에서도 특히 베어링과 자이로 효과에 의한 특성을 쉽게 고려하도록 하는 방법을 개발하였다. 이 방법의 가장 중요한 요점은 회전속도 의존성을 포함한 일반화된 고유치 문제를 이용하여 불균형응답식을 모두드 해석기법을 사용하여 회전수에 관한 1차의 분리된 대수식으로 재구성하는데 있다. 이때 회전속도 의존성들을 회전속도의 다항식으로 근사화하였는데 이는 결국 고유치 문제의 차수만을 증가시키는 효과로 나타난다.

이와 같은 방법은 두가지의 중요한 특징을 갖게 된다. 즉 불균형 응답을 회전수에 대한 해석적 대수적으로 표현할 수 있으므로 계산상의 효율성을 가져오고 불균형 응답 특성을 통한 물리적 이해를 쉽게 하도록 유도한다. 또한 이 방법에서는 변환행렬을 이용하여 베어링의 회전속도 의존성만을 추가하였기 때문에 계산상의 어려움 없이 높은 차수의 회전속도 의존성도 고려할 수 있다. 아울러 비교적 회전속도 의존성이 급변하지 않는 경우에는 구해진 고유치 및 고유벡터들이 곧 임계속도 및 그 속도에서의 실제 고유벡터를 잘 근사화할 수 있다. 여기서는 비록 단순한 모델에 대해 적용을 하였지만 복잡한 모델의 경우도 쉽게 확장될 수 있으며 특히 조화 응답 해석(harmonic response analysis)에 직접 응용가능하다. 또한 주파수 의존성(frequency dependency)을 갖는 계에 대해서도 이 방법이 쉽게 적용될 수 있다<sup>(22)</sup>.

- (1) Lund, J.W. and Orcutt, F.R. 1967, "Calculations and Experiments on the Unbalance Response for a Flexible Rotor", Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol. 89, No. 4, pp. 785~796.
- (2) Dimentberg, F.M. 1961, "Flexural Vibrations of Rotating Shafts", Butterwords, London.
- (3) Gladwell, G.M.L. and Bishop, R.E.D. 1959. "The Vibration of Rotating Shafts in Flexible Bearings", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 1 No. 3, pp. 195~206.
- (4) Lund, J.W. May 1974, "Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid Film Bearings," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 525~533.
- (5) Gasch, R. 1976, "Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid Film Bearings on an Elastic Foundation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 47, No. 1, pp. 53~73.
- (6) Rieger, N.F. April 1971, "Unbalance Response of an Elastic Rotor in Damped Flexible Bearings at Supercritical Sppeeds", Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, pp. 265~278.
- (7) Saito, S. and Azuma, T. Jan. 1983, "Balancing of Flexible Rotors by the Complex Modal Method", Trans. ASME, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 105, pp. 94~100.
- (8) Parkinson, A.G., Darlow, M.S. and Smalley, A.J. 1980, "A Theoretical Introduction to the Development of a Unified Approach to Flexible Rotor Balancing", Journal of Sound and Vibration, Vol. 68, No. 4.

- pp. 489~506.
- (9) Shimada, K. and Miwa, S. Oct. 1979, "Balancing of a Flexible Rotor", Bulletin of the JSME, Vol. 22, No. 172, pp. 1463~1470.
- (10) Nordman, R. 1984, "Modal Analysis in Rotor Dynamics", Dynamics of Rotors; Stability and System Identification Chap. 1, edited by Mahrenholtz, International Center for Mechanical Science.
- (11) Nelson, H.D. and McVaugh, J.H. May 1976, "The Dynamics of Rotor Bearing System Using Finite Elements", Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 593~600.
- (12) Özgüven, H.N. and Özkan, Z.L. Jan. 1984, "Whirl Speeds and Unbalance Response of Mutibearing Rotors Using Finite Elements", Trans. ASME, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 72~79.
- (13) Rao, J.S. 1983, Rotor Dynamics, John Wiley & Sons.
- (14) Rieger, N.F. Nov. 1977, Vibrations of Rotating Machinery, The Vibration Insitute, Clarendon Hills, Illinois.
- (15) Wang, Z. and Lund, T.W. 1984, "Calculations of Long Rotors with Many Bearings on a Flexible Foundation", Third International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, England.
- (16) Kim, Y.D. and Lee, C.W. 1986, "Finite Elements Analysis of Rotor Bearing System Using a Modal Transformation Matrix", Journal of Sound and Vibration, Vol. 111., pp. 441~456
- (17) Lancaster, P. 1966, "Lambda Matrices and Vibrating Systems," Pergamon Press.
- (18) Davis, P.J. 1975, "Interpolation and Approximation," Dover Publication, Inc., New York.
- (19) Childs, D.W. and Graviss, K. April 1982, "A Note on Critical Speed Solutions for Finite-element-based Rotor Model", Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 412~416.
- (20) Lund, J.W. May 1974, "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid Film Bearings", Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 509~517.

- (21) Kirk, R.G. and Gunter, E.J. May 1976, "Stability and Transient Motion of a Plain Journal Mounted in Flexible Damped Supports", Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 576~592.
- (22) Hong, S.W and Lee, C.W. 1988, "Frequency and Time Domain Analysis of Linear Systems with Frequency Dependent Parameters", To appear in Journal of Sound and Vibration.

## Appendix Element Matrices

### Finite rotor shaft element

$$m^s = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & \\ & 22l & & 4l^2 & & \\ & & 54 & & 13l & 156 \\ & & & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \text{ sym.} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 156 \\ 22l \\ 54 \\ -13l \end{bmatrix}} \right\} + \frac{1}{2} g^s$$

$$g^s = \frac{mr^2}{60l} \begin{bmatrix} 36 & & & & & \\ & 3l & & 4l^2 & & \\ & & -36 & & -3l & 36 \\ & & & 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \text{ sym.}$$

$$k^s = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ & 6l & & 4l^2 & & \\ & & -12 & & -6l & 12 \\ & & & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \text{ sym.}$$

Here

$m$  : mass per unit length

$l$  : length of the finite rotor element

$r$  : radius of the finite rotor element

### Rigid disk

$$m^d = \begin{bmatrix} m^d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \quad g^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Here

$m_d$  : disk mass,

$I_d$  : diametral mass moment of inertia

$I_k$  : polar mass moment of inertia.