

<論 文>

탄소성 접촉 해석법을 이용한 볼 압입시험의 시뮬레이션

이 병 채* · 광 병 만**

(1987년 12월 8일 접수)

Simulation of Ball Indentation Process by Elasto-Plastic Contact Analysis

Byung Chai Lee and Byung Man Kwak

Key Words : Ball Indentation Test(볼 압입 시험), Simulation(시뮬레이션), Contact Analysis(접촉 해석), FEM(유한요소법), Elasto-Plastic Analysis(탄소성 해석)

Abstract

Computation of the elasto-plastic solution of ball indentation was carried out by the quadratic programming method. The problem was formulated as an elasto-plastic contact problem under the assumption of small displacement and small deformation and then transformed into a minimization problem. Finite element approximation resulted in a quadratic programming problem. Numerical and experimental study were done with aluminium Al 2024-T351 and commercially pure copper. The computed load-displacement curves were in good agreement with those obtained from experiments. Tabor's relationship for representative strains was also examined. Stress distributions were found to resemble closely those results available in the literature.

기 호 설 명

<p>a : 압입부의 반경</p> <p>E : 재료의 탄성 계수</p> <p>F, dF : 물체에 가해지는 외력과 그 증분량</p> <p>G : 재료의 종탄성 계수</p> <p>H, H' : 가공경화를 나타내는 함수와 기울기</p> <p>Hm : Meyer 정도</p> <p>J : 탄소성 접촉문제의 범함수</p> <p>k_1, m : 압입 하중 근사식의 계수와 지수</p> <p>k_2, m' : 대표 변형도 근사식의 계수와 지수</p>	<p>k_x, k_y : 접촉부의 단위 변위에 의한 간극 감소량</p> <p>n_i : 물체경계의 외향 법선 벡터</p> <p>R : 압입하는 구의 반경</p> <p>s, ds : 접촉압력과 그 증분량</p> <p>u_i, du_i : 물체의 변위와 그 증분량</p> <p>u_r, du_r : 물체의 강체운동 변위와 그 증분량</p> <p>V_p : 소성변형이 일어난 영역의 부피</p> <p>x, y : 좌표</p> <p>β : 접촉부의 초기간극</p> <p>Γ_c : 예상 접촉 영역</p> <p>Γ_u : 물체에서 변위가 고정된 경계</p> <p>$\epsilon_{ij}, d\epsilon_{ij}$: 물체의 변형도와 그 증분량</p> <p>ϵ_0 : 물체의 대표 변형도</p>
--	--

*정회원, 한국과학기술원 기계시스템 연구실

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

$\bar{\epsilon}_p$: 상당 소성 변형도
ν	: 프와송비
Ω	: 물체가 차지하고 있는 영역
Φ	: 접촉부의 변형후 간극
$\sigma_{ij}, d\sigma_{ij}$: 물체내의 응력과 그 증분량
$\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}$: 상당응력과 그 증분량
σ_0, n	: 가공경화식의 계수와 지수
σ_r	: 항복 응력

1. 서 론

경도시험은 시험의 간편성으로 인해 널리 사용되고 있는 재료시험법으로 최근에는 응력-변형도 곡선을 구하는 데⁽¹⁾, 변형속도의 영향을 규명하는 데⁽²⁾, 비등방성 소성이론을 연구하는 데⁽³⁾ 이용하는 등 적용범위가 넓어지고 있다. 이러한 응용을 위해서는 재료의 경도시험 자료와 기계적 성질을 나타내는 다른 재료 상수들과의 관계규명이 선결문제라 할 수 있다. 최근까지는 이론해석의 어려움 때문에 주로 실험에 의해 이를 규명하기 위한 연구가 이루어져 왔으나 미흡한 상태로서 실제 이용을 위해서는 더욱 많은 연구가 이루어져야 할 것이다. 본 논문의 해석 대상인 불압입 시험에 대한 대표적 실험식으로 Meyer의 식과 Tabor의 식이 있다.

불 압입 시험에서 Meyer는 압입하중 F 가 압입부 반경 a 의 지수승에 비례하여 이 지수는 재료의 가공 경화정도를 나타내는 양이라고 보고하였다⁽⁴⁾. 이 관계의 비례상수는 재료의 탄성상수, 항복응력 등에 의해 결정되는 값으로 재료마다 다르다. 이 지수와 등방가공 경화모델의 지수와의 관계는 어느 정도 밝혀져 있으나 비례상수의 규명에 관한 연구는 찾아 보기 힘들다. 또, Tabor는 평균 압입 응력 Hm 과 재료의 항복응력 σ_r 의 비가 거의 일정한 데 착안하여 이 관계를 가공경화가 있는 재료에까지 적용하였다⁽⁵⁾. 가공 경화 재료에 대해서는 압입부의 변형을 대표할 수 있는 상당 변형도를 대표 변형도(representative strain)로 정의하고 이 대표 변형도에 해당하는 소성 유동응력을 항복 응력으로 함으로써 여러가지 재료에 대해 전술한 비례관계를 근사하게 만족시킬 수 있게 하였다. 불압입 시험의 경우, 대표변형도는 압입부 변형 a 와 불의 반경 R 의 비에 비례한다고 보고하였다. 지금까지는 이 관계식들이 경도시험의 응용연구에 원용되고 있다.

그러나, 이와같은 실험에 의한 관계 규명은 실험

자체의 특성상 재료의 미시적 상태의 영향 측정이 어렵고 각 영향 인자들을 분리하기 어렵다는데 그 한계가 있다. 따라서, 적당히 가정된 상태의 이론 해석을 통해 재료내부의 변형거동을 분석함으로써 관계규명을 가속시킬 수 있을 것이다.

불 압입 문제에 대한 이론적인 해석은 극히 드물고 해석된 경우도 대개 탄성 변형과 가공경화를 무시한 것이 대부분이다. 그 예로는 Ishlinsky의 미끄럼장 이론을 이용한 해석⁽⁶⁾과 Richmond등의 유한차분법을 이용한 해석이 있다⁽⁷⁾. 탄 소성 변형영역에서 가공 경화를 고려하여 유한요소법을 적용한 경우^(8,9)도 있으나 접촉문제 해석에 축차적인 방법을 이용한 관계로 계산량이 과다하여 압입시험의 요인 분석에 이용하기에는 힘든 상태이다.

본 논문에서는 접촉문제를 보다 정교하게 수식화 함으로써 효율적인 불 압입 시험 시뮬레이션 방법을 제시하고 이를 실제에 적용하여 방법의 유용성을 보이고자 한다. 아울러 실험을 병행하여 결과를 비교함으로써 해석결과의 신뢰성을 검토한다.

2. 문제의 수식화

불 압입문제는 다음과 같이 탄 소성 접촉문제로 수식화할 수 있다. 압입하는 불은 강체인 것으로 가정하였고 소 변형, 소 변위 영역에서 마찰과 체적력을 무시하였다⁽¹⁾. 변형하는 물체가 차지하고 있는 영역을 Ω , 변위가 고정된 경계를 Γ_u 접촉이 예상되는 경계를 Γ_c 로 표현하고 증분이 고려되는 시점의 응력을 σ_{ij} , 변형도를 ϵ_{ij} , 접촉 압력을 s , 변위를 u , 증분량을 $d(\cdot)$ 의 형태로 나타낸다. 압입하는 물체인 불에는 강체운동이 허용되어 있고 그 양을 u_r 로, 외력을 F 로 표현한다. 경계에서의 단위 외향 법선 벡터를 n_i 라 표현하면 불 압입 문제의 증분형 지배 방정식은 다음과 같다.

(1) 불의 정적 평형식

$$F + dF = \int_{\Gamma_c} (s + ds) n_y dS \quad (1)$$

여기서, 접촉압력 s 는 강체변위 u_r 의 함수로 이 평형식을 고려하여야 불의 정적 평형을 이를 만큼의 강체변위가 생기게 된다. 식에서 n_y 는 외향 법선의 강체운동 방향인 y 방향 성분이다.

(2) 재료의 내부평형식

$$d\sigma_{i,j} = 0 \quad (2)$$

여기서, 반복된 첨자는 합을 나타내며, (), 는

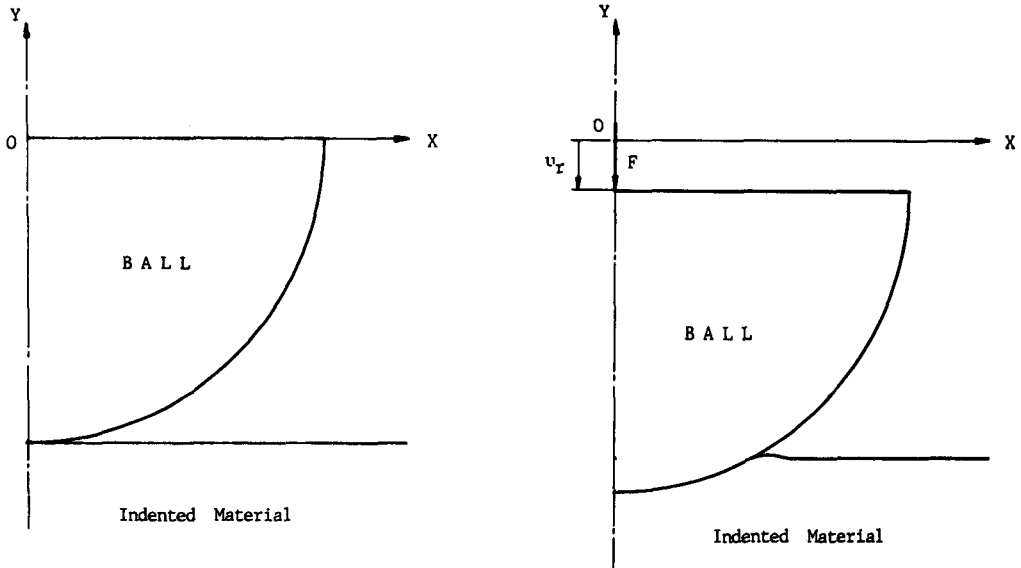


Fig. 1 Idealized model for ball indentation test

공간좌표 j 에 대한 미분을 나타낸다.

(3) 변형도 증분과 변위증분의 관계

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(dx_{i,j} + du_{j,i}) \quad (3)$$

(4) 응력증분과 변형도 증분의 관계

$$d\sigma_{ij} = C_{ijlm} d\epsilon_{lm} \quad (4)$$

여기서, C_{ijlm} 는 두양을 관계 지워주는 텐서로서 탄성변형에 의한 것은 선형 등방성 재료의 계수로 부터 쉽게 구할 수 있다. 탄소성 변형은 유동이론에 의해 고려되며 가공경화를 포함시킬 수 있다. 탄소성 변형에 대한 C_{ijlm} 은 von Mises 항복조건을 따르며 가공경화가 $\bar{\sigma} = H(\int d\bar{\epsilon}^p)$ 로 모델링 될 수 있는 재료의 경우

$$d\epsilon'_{ij} = \frac{3\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}H'} d\bar{\sigma} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} \quad (5)$$

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ij} \quad (6)$$

로 부터 구할 수 있다⁽¹⁰⁾.

(5) 변위 경계조건 (Γ_u 상에서)

$$du_i = 0 \quad (7)$$

(6) 접촉면에서의 조건

Fig. 1에서 볼의 방정식은,

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2 \quad (8)$$

로 표현되고, 중심점의 좌표(x_c, y_c)는 볼의 강제 운동에 따라 변한다. 증분후 원의 중심점은 ($0, -u_r - du_r$)이고 변형전 재료내의 (x, y)점은 증

분후 ($x+u_x+du_x, y+u_y+du_y$)점이 된다. 증분 후, 변형된 물체의 모든 점은 볼의 밖에 있어야 하므로

$$(x+u_x+du_x)^2 + (y+u_y+du_y+u_r+du_r)^2 \geq R^2 \quad (9)$$

이 식에서 증분량의 2차항들을 무시하면

$$-\beta + k_x du_x + k_y du_y + k_y du_r \leq 0 \quad (10)$$

이 되고

$$\beta = \frac{(x+u_x)^2 + (y+u_y+u_r)^2 - R^2}{2R} \quad (11)$$

$$k_x = \frac{x+u_x}{R} \quad (12)$$

$$k_y = -\frac{y+u_y+u_r}{R} \quad (13)$$

이다. 여기서 식(10)의 좌변을 $-\Phi$ 로 정의하면, Φ 는 접촉부의 간극을 나타낸다. 접촉부에서는 $s > 0$ 이면 반드시 $\Phi = 0$ 이며, $\Phi > 0$ 이면 $s = 0$ 이어야 한다⁽¹¹⁾. 이를 식으로 표현하면

$$\Phi(s+ds) = 0 \quad (14)$$

이 된다. 또, 접촉압력은 반드시 양이어야 하므로

$$s+ds \geq 0 \quad (15)$$

이다.

전술한 지배방정식을 정리하면 볼 압입문제는 식 (1)~(4)와 (7), (14) 부등식(10), (15)로 완전히 표현된다. 이 방정식을 직접 푸는 것은 거의 불가능하므로 수치해석의 기법을 사용한다. 전술한 지

배방정식들은 변분법의 기법을 이용하면 다음과 같은 최소화문제로 변환된다⁽¹²⁾.

$$\min J(du, du_r) \quad (16)$$

$$\text{subject to } -\phi \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (17)$$

$$du_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (18)$$

여기서

$$J = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} \right) d\epsilon_{ij} dV - (F + dF) du_r \quad (19)$$

이 최소화 문제에 유한요소 근사방법을 적용하면, 어떤 증분에서의 불 압입 해석 문제는 유한차원의 2차계획법 문제가 되고 Lemke의 방법을 이용하면 쉽게 해를 얻을 수 있다⁽¹³⁾.

3. 유한요소해석

불 압입 문제의 수치해석을 위해 Fig. 2와 같은 유한요소 모델을 사용하였다. 불은 강체로 가정되었으므로 불의 -y축 방향 강체운동 변위 u_r 만을 변수로 취하였다. 압입되는 물체에서 접촉조건은 x좌표가 1.75mm인 곳까지 검토되었으며 실제 수치 해석에서는 압입 반경이 1.25mm에 이를때까지 유한요소 해석하였다.

접촉조건은 유한요소 모델의 접촉 예상 경계에 있는 절점들에서 검토되었다. 사용된 유한요소는 축대칭 요소로서 2차의 보간함수를 갖는 사각형 등

매개변수(isoparametric) 요소이며 소성변형이 일어날 것이 예상되는 영역에서는 9개의 적분점을, 다른 영역에서는 4개의 적분점을 갖게 하였다. 변위 경계조건으로 모델의 하단부, 즉 $y = -5\text{mm}$ 인 절점들의 y방향 변위를 구속하였다.

소성변형은 적분점들에서 검토되었으며 가공경화를 고려하기 위해 소성변형을 하고 있는 재료내의 각 점에 대해 매 하중 증분마다 발생하는 소성변형의 상당 소성변형도 증분을 누적시켜 그점의 상당 소성변형도를 계산하였다. 또한, 하중 증분후의 응력이 항복조건을 보다 잘 만족하도록 하기 위해 각 적분점에서 매 변형도 증분을 Euler적분 방법으로 적분하였다. 이 경우 위배된 평형량은 초기응력이 범함수에 고려되어 있으므로 증분진행에 따라 보정되어 진다.

하중 증분량은 물체내에서 상당응력이 최대인 점이 항복조건을 정확히 만족하는 하중을 찾아 이 하중의 5%를 초기 증분량으로 하였다. 이러한 하중을 찾기위해 탄성 접촉문제를 수회 반복하여 풀었다. 본 문제의 경우 초기 증분량은 매우 작기 때문에 압입반경 1.25mm 정도까지 변형시키려면 1000회 이상의 증분이 필요하다. 따라서 본 논문에서는 계산량을 줄이기 위해 강체변위-하중관계의 기울기가 기준량이하 일때 마다 증분량을 2배로 증가시켰다.

가공경화가 있는 재료의 물체 평균 유동응력을

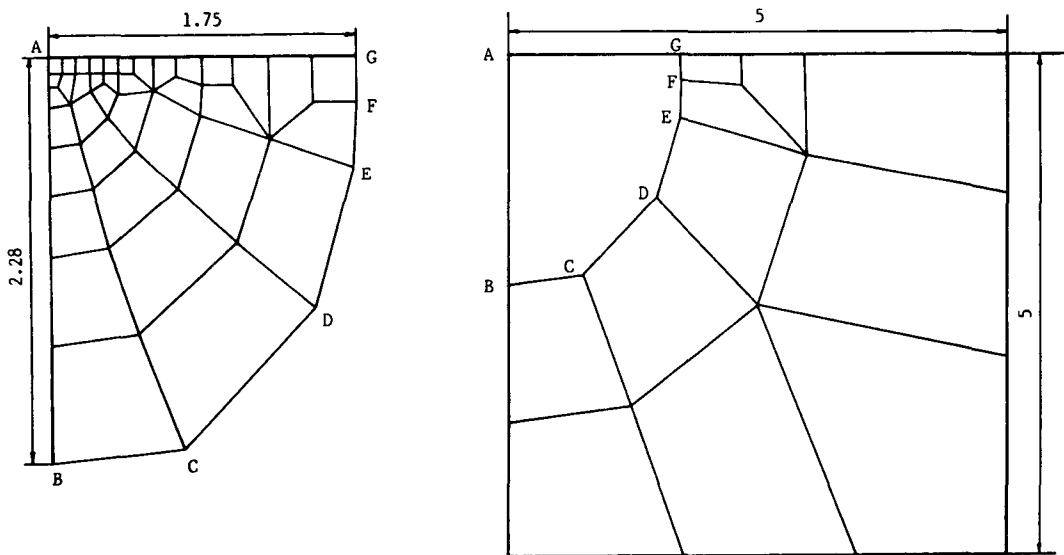


Fig. 2 Finite element mesh for the indented body. Dimensions in mm

계산하기 위해 제안된 대표 변형도는 상당 소성 변형도의 체적 평균치로

$$\int_0^{\epsilon_0} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}_p = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \int_0^{\epsilon_p} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} dV \quad (20)$$

로부터 구하였다⁽⁹⁾. 여기서 V_p 는 소성 변형이 일어난 영역의 부피로서 상당 소성 변형도가 0보다 큰 적분점들의 해당 면적에 적분점의 중심으로 부터의 거리 x 와 2π 를 곱해 전 물체에 대해 합산하여 근사적으로 구하였다.

4. 실험

이론 해석의 결과를 비교, 검토하기 위해 알루미늄(Al 2024-T351)과 순도 96%의 상업용 구리에 대해 압축시험과 볼 압입 시험을 행하였다. 압축시험으로 부터는 단축상태의 변형도-응력관계를 얻었으며 볼 압입 시험에서는 여러 외력하에서의 압입 자국의 크기를 측정하였다. 압축시험은 MTS810을 이용하였으며 마찰효과를 줄이기 위해 테플론 테이프를 부착한 후 그리이스로 윤활하였다. 실험은 $\phi 20 \times 20$ mm 시편을 1mm/min의 시험속도로 길이 감소율이 40%에 이를 때까지 행하였다. 시험 도중 길이 감소율이 20%에 이르렀을 때 테프론 테이프를 교체하고 그리이스로 재 윤활함으로써 금속간 마찰이 생기지 않도록 하였다.

시험으로부터 얻은 응력-변형도 관계는

$$\bar{\sigma} = \sigma_r + \sigma_0 (\bar{\epsilon}_p)^n \quad (21)$$

의 형태로 근사화하였다. 변형 경화를 이식으로 근사화 한 것은 이 식이 탄소성 해석에 적합하기 때문이다. 알루미늄의 경우 $\sigma_r = 392$ MPa, $\sigma_0 = 301$ MPa $n = 0.283$ 이었고 구리의 경우 $\sigma_r = 216$ MPa, $\sigma_0 = 70$ MPa, $n = 0.277$ 이었다. 항복응력, σ_r 는 0.2% 변형도 때의 응력으로 하였다.

볼 압입 시험은 Wilson Instrument의 브린넬 경도 시험기를 이용하였으며 원하는 하중에 도달한 후 10-15초 경과시킨 다음 해중하였다. 자국의 크기는 Werth의 Messprojektoren을 이용하여 측정하였다. 볼 압입 시험 시편은 Al_2O_3 분말로 표면 거칠기가 $3\mu m$ 정도가 되도록 연마하였다.

5. 결과 및 토의

압입 하중과 압입 반경의 관계를 알루미늄의 경우 Fig. 3에 구리의 경우 Fig. 4에 그렸다. 그림에

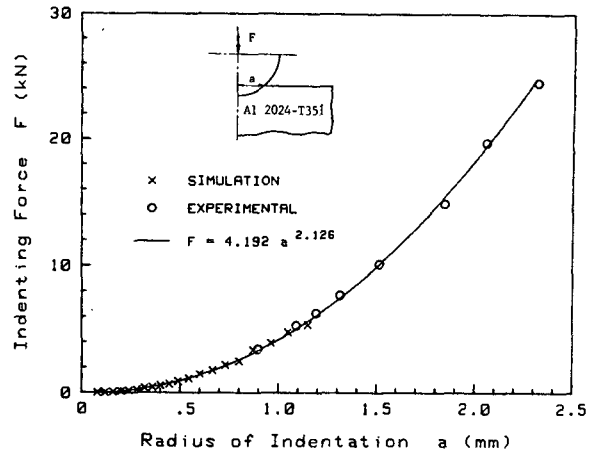


Fig. 3 Indenting force versus indented radius from computer simulation and hardness test with a ball diameter of 10mm.

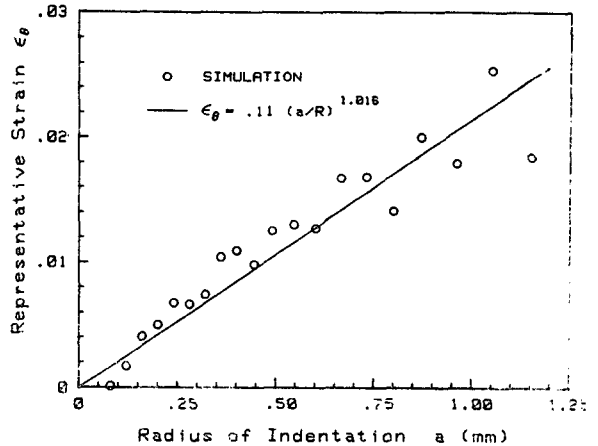


Fig. 4 Representative strain versus indented radius from computer simulation (Al 2024-T351)

서 알 수 있듯이 압입 하중과 압입 반경의 관계에 대한 실험과 해석결과는 아주 잘 일치하고 있다. 이 그래프를 $F = k_1 a^m$ 로 근사화하면 알루미늄의 경우 $k_1 = 4192$ N, $m = 2.126$ 이고, 구리의 경우 $k_1 = 2274$ N, $m = 2.058$ 이 된다. 유동응력을 $\bar{\sigma} = \sigma'_0 \bar{\epsilon}^{n'}$ 으로 표현했을 때의 Meyer 실험결과인 $m = 2 + n'$ 보다는 지수값이 작게 나온다. 이는 일반적으로 n 이 n' 보다 작다는 점에서 그 정당성이 뒷받침된다.

알루미늄과 구리의 압입 반경에 따른 대표변형도를 Fig. 5와 Fig. 6에 각각 그렸다. 이 그래프를 $\epsilon_0 = k_2 \left(\frac{a}{R}\right)^{m'}$ 의 형태로 근사화하면 알루미늄의 경

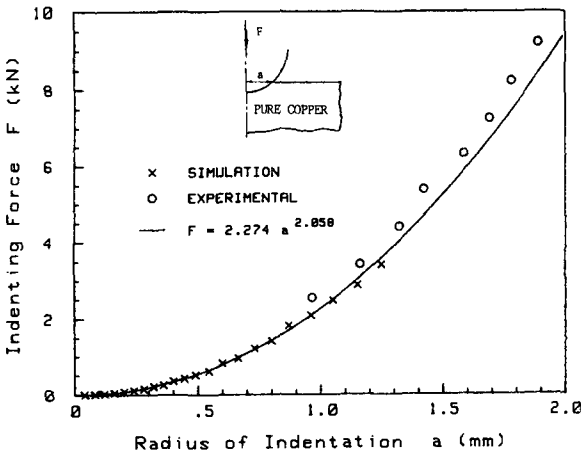


Fig. 5 Indenting force versus indented radius from computer simulation and hardness test with a ball diameter of 10mm.

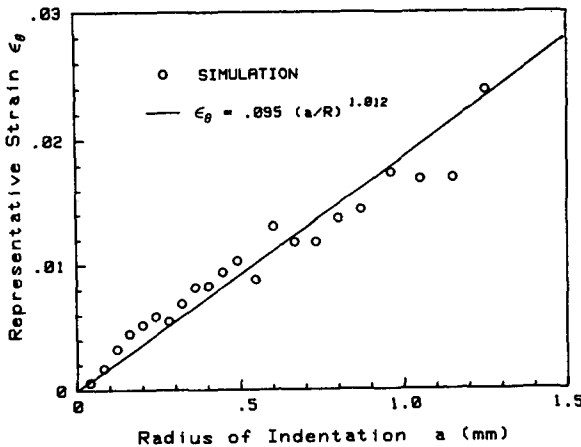


Fig. 6 Representative strain versus indented radius from computer simulation (commercially pure copper)

우 $k_2=0.11$, $m'=1.016$ 이고 구리의 경우 $k_2=0.095$, $m'=1.012$ 이다. 여기서 지수 m' 은 Tabor의 실험식의 값 1과 비교적 잘 일치하고 있다. 그러나, k_2 값은 Tabor의 제안값인 0.2에 비해 상당히 작다. 또, 그래프에서 압입 반경이 커질수록 근사식에 대한 편차가 커진다. 이것은 유한요소 모델에서 압입이 진행될수록 새로이 소성 변형하는 요소의 크기는 커지는 반면, 이러한 요소의 변형이 압입부 전체의 평균적인 변형거동에 미치는 영향은 요소의 위치가 멀어질수록 감소하기 때문에 생기는 것으로 판단된다. 따라서, 식 (20)으로부터 대표 변

형도를 구할때 접촉부로부터의 거리에 따른 가중치를 고려하면 이러한 현상이 감소되고 k_2 값도 더 커질 것으로 예상된다. 그러나, 계산으로부터 얻어진 대표 변형도로 부터 유동응력을 구해 표준 경도 시험범위인 $0.25 \leq a/R \leq 0.45$ 에서 Meyer 경도와와의 비 $H_m/\bar{\sigma}$ 값을 구해보면 2.7~3.36의 값을 가지고 있다. 이는 지금까지 알려진 연성 금속재료의 값 2.8~3.0과 비교적 잘 일치하고 있다.

알루미늄 재료의 각 하중하에서의 응력분포를 Fig. 7에서 Fig. 10까지에 그렸다. 원주 방향 응력은 반경 방향 응력과 탄성 변형점에서는 약간 차이가 났으나 탄소성 변형점에서는 거의 같았다. Fig.

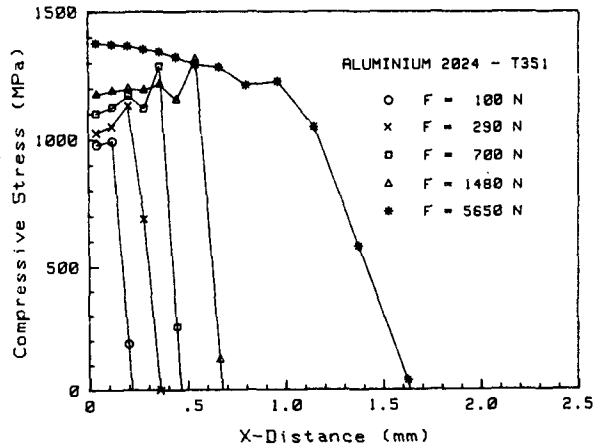


Fig. 7 Axial stresses along the contacting surface (Al 2024-T351)

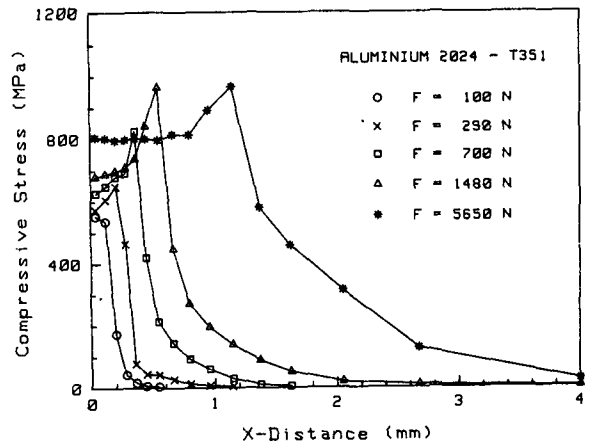


Fig. 8 Radial stresses along the contacting surface (Al 2024-T351)

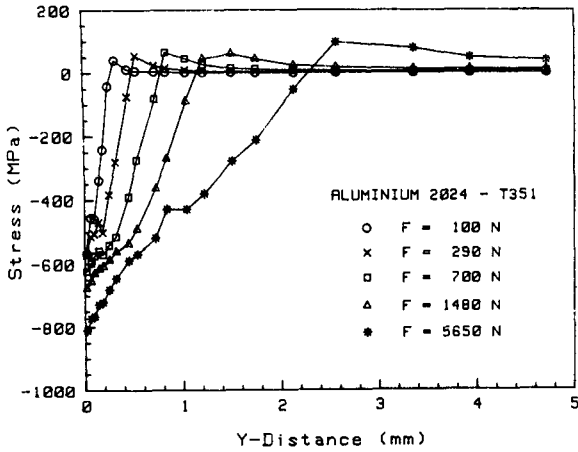


Fig. 9 Subsurface radial stresses along the axis of indentation (Al 2024-T351)

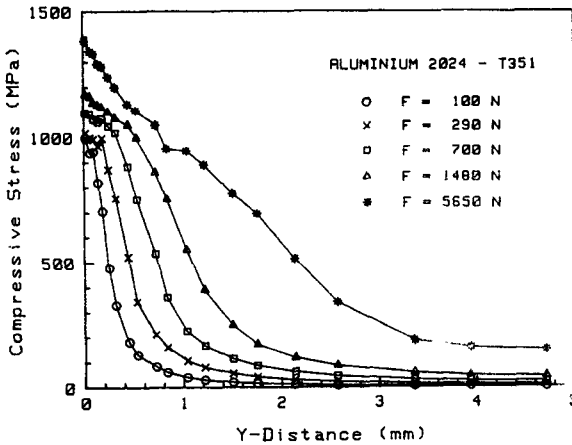


Fig. 10 Subsurface axial stresses along the axis of indentation (Al 2024-T351)

7은 접촉면을 따른 반경 방향 압축응력을 그린 것이고 Fig. 8은 접촉면을 따른 축방향 압축 응력을 그린 것이다. 접촉면에서 축방향 응력은 접촉응력과 평형을 이루고 있기 때문에 이 곡선이 접촉압력 분포를 근사적으로 나타낸다고 볼 수 있다. 접촉압력의 분포는 하중이 작을 때는 타원형의 분포를 보이다가 어느 정도의 소성 변형이 진행되면 장방형으로 바뀌고 더욱 소성변형이 진행되면 다시 타원형에 가깝게 된다^(6, 9). Fig. 9와 Fig. 10은 물체의 중심축에 따라 반경방향과 축방향 압축 응력의 분포를 그린 것으로 참고문헌과 비교적 잘 일치하고 있다⁽⁶⁾.

6. 결 론

볼 압입 시험을 탄소성 접촉문제에 수식화한 후 유한요소법을 적용하여 시뮬레이션하였다. 이 방법은 종래의 것에 비해 보다 효율적이고 해의 신뢰성도 높다. 압입 자국 반경의 관계를 실험과 비교한 결과 매우 잘 일치하였다. 대표 변형도 예측식의 지수는 실험식과 잘 일치하고 있으나 예측식의 계수는 실험식과 상당한 차이를 보인다. 이의 개선을 위해 대표 변형도 계산식에 대한 재고가 요청된다. 지속적인 연구를 실험과 해석을 병행하여 수행함으로써 실험식들의 상수와 재료 상수와의 관계를 규명하면 압입 시험의 응용범위를 크게 넓힐 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- (1) Beeuwkes R. Jr., Chait R. and Lin H.H., 1973, "The Practical Determination of Flow Curves by Indentation Hardness Methods", The Science of Hardness Testing and Its Research Applications, Ed. Westbrook J.H. and Conrad H., American Society for Metals, Ohio, pp.75~90.
- (2) Chi-Hung Mok, 1966, "The Dependence of Yield Stress on Strain Rate as Determined from Ball Indentation Tests", Experimental Mechanics 6, pp. 87~92.
- (3) Lee D., 1973, "Plasticity Consideration for Anisotropic Materials in Hardness Indentation", The Science of Hardness Testing and its Research Applications, Ed. Westbrook J.H. and Conrad H., American Society for Metals, Ohio, pp.147~166.
- (4) Meyer E., 1908, "Untersuchungen ueber Haerte Pruefung und Haerte", Z. Ver Deut. Ing. 52, pp. 645~654.
- (5) Tabor D., 1951, The Hardness of Metals, Clarendon Press, Oxford.
- (6) Ishlinsky A.I., 1944, "The Problem of Plasticity with Axial Symmetry and Brinell's Test", J. Appl. Math. Mech. 8, pp.201.
- (7) Richmond O., Morrison H.L. and Devenpark M.L., 1974, "Sphere Indentation with Application to the Brinell Hardness", Int. J. Mech. Sci. 16, pp.75~82.
- (8) Hardy C., Baronet C.N. and Tordion G.V., 1971, "The Elasto-Plastic Indentation of a Half Space by a Rigid Sphere", Int. J. Num. Meth. Engng. 3, pp.

- 451~462.
- (9) Lee C.H., Masaki S. and Kobayashi S., 1972, "Analysis of Ball Indentation", *Int. J. Mech. Sci.* 14, pp.417~426.
- (10) Hill R., 1950, "The Mathematical Theory of Plasticity," Oxford Univ. Press, pp. 38~45.
- (11) Chand R., Haug E.J. and Rim K., 1976, "Analysis of Unbonded Contact Problems by Means of Quadratic Programming", *J. of Optimization Theory and Applications* 20, pp.171~186.
- (12) Lee B.C. and Kwak B.M., 1984, "A Computational Method for Elasto-Plastic Contact Problems", *Computers and Structures*, Vol. 18, pp. 757~767.
- (13) Van de Panne and Whinston A., 1964, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming", *Operational Resesarch Quarterly* 15, pp.355~388.