

<論 文>

단열실린더내에서 톱날파형 피스톤운동을 하는 스터링기관에 대한 해석적인 해

유 호 선*

(1988년 7월 12일 접수)

An Analytic Solution for the Stirling Engines with Saw-Toothed Piston Motions in Adiabatic Cylinders

Hoseon Yoo

Key Words : Stirling Engines(스터링 기관), Adiabatic Analysis(단열해석), Dead Volume(불용체적), Phase Angle(위상각), Swept-Volume Ratio(행정체적비)

Abstract

An analytical method to predict qualitative performance characteristics of the Stirling Engines in the preliminary design stages is investigated. Both the expansion and the compression cylinder are treated as adiabatic and piston motions are approximated as saw-toothed waves. Basic equations which were originally proposed by Finkelstein consist of mass conservation and energy balances for each adiabatic cylinder. The approximation on piston motions and physical conditions make it possible to divide an engine cycle into four fundamental processes. In each process, first, pressure can be expressed as a function of the crank angle by solving a nonlinear first order ordinary differential equation and other thermodynamic variables are determined in turn. Application of the cyclic steady condition to the whole processes can complete a cycle. Also, further analysis results in analytic expressions for cyclic work and heat transfer in terms of the engine parameters and thermodynamic variables at boundary points. The results are expected useful as a quick reference for the engine performances. Finally, the present method can be applied to the other adiabatic analyses on the Stirling Engines with piecewise linear piston motions, if mass variations are predictable.

기 호 설 명

A, B, C, D : 상수	P, p : 압력, 무차원압력
$a_1, \dots, a_4, b_1, b_2, c_1, c_2$: 상수	Q, q : 열량, 무차원열량
C_p : 작동유체의 정압비열	R : 작동유체의 기체상수
f, g, h : 함수	T : 온도
M, m : 작동유체의 전질량, 질량	t : 무차원 크랭크각도
n : $(\gamma - 1)/\gamma$	V, v : 체적, 무차원체적
	V_c, V_E : 압축 및 팽창실린더의 행정체적
	W, w : 일량, 무차원일량
	w_0 : 비출력

*정회원, 경상대학교 공과대학 기계공학과

- x : 불용체적비
- α : 무차원위상각
- γ : 작동유체의 비열비
- θ : 크랭크각도
- λ : 행정체적비
- η : 열효율
- τ : 무차원온도
- ϕ : 위상각
- ψ : 함수

하 첨 자

- c : 압축실린더
- d : 불용체적
- e : 팽창실린더
- h : 가열기
- i : 입구조건
- k : 냉각기
- o : 출구조건
- r : 재생기
- 1, 2, 3, 4 : 상태점
- 12, 23, 34, 41 : 과정

1. 서 론

일반적으로 열기관은 작동유체가 각각 다른 상태에 있는 기관구성요소를 순환하거나 또는 작동유체의 전 질량이 순차적인 과정으로 상태변화하면서 열을 일로 변환한다. 따라서, 열기관내 작동유체의 상태변화는 열역학적으로 하나의 사이클을 구성하게 된다. 이에 비하여, 스테링기관은 Fig. 1에 표시한 바와 같이 일의 교환이 이루어지는 팽창 및 압축실린더, 가열기·냉각기·재생기를 포함한 열교환기로 구성되며 밀폐사이클로 작동되는 외연기관으로서, 작동유체가 주기적으로 팽창실린더—열교환기—압축실린더 사이를 피스톤(기관형태에 따라 displacer) 운동에 의해 왕복유동하는 특성 때

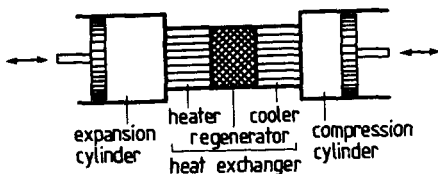


Fig. 1 Generalized Stirling Engine configuration

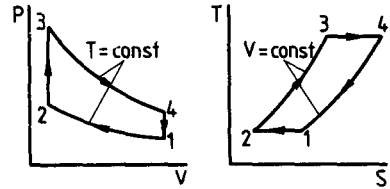


Fig. 2 Ideal Stirling Cycle

문에 다른 열기관과는 구별된다. 즉, 특정시간에서 작동유체의 상태는 구성요소별로 상이하하며, 시간에 따라 각 구성요소에 존재하는 작동유체의 질량도 변화하므로 하나의 선도로 표시될 수 없다. 그럼에도 불구하고, 피스톤운동이 이상적이고 실린더가 등온으로 유지되며 불용체적(dead volume)이 0이라는 가정하에서는 작동유체의 상태변화는 하나의 사이클로 표시될 수 있으며 이 이상적인 사이클(Fig. 2)로서 기관의 성능조건(performance criteria)⁽¹⁾을 쉽게 해석할 수 있다는 점에 의의가 있다. 따라서, 이러한 개념적인 사이클에 재생기의 효율, 실린더의 단열 등을 고려한 여러 가지 변형된 형태들(집합적으로 pseudo-Stirling cycles)이 제안되어 왔으며 Reader와 Cross⁽²⁾가 종합적으로 고찰한 바 있다.

그러나, 실제기관에서 필수적인 재생기를 감안할 때 불용체적은 0이 아니며 기구학적으로 피스톤운동은 제한되므로, 열역학적 사이클로부터 작동유체 종류, 작동온도 및 평균압력, 체적비, 불용체적비, 위상각(phase angle) 등 스테링기관의 설계에 필요한 성능인자(performance parameters)를 파악하는 것은 불가능하다. 또한, 실제 작동조건하에서 컴퓨터에 의한 기관의 시뮬레이션은 제 인자가 기관 성능에 미치는 영향을 보다 정확하게 해석할 수 있으나, 충분한 실험자료, 계산시간 및 노력이 요구되므로 예비설계단계에서 기관성능을 정성적으로 예측하는 수단으로서는 부적합하다. 따라서, 전술한 스테링기관의 특성이 고려되면서 기관성능을 근사적이지만 경제적으로 해석할 수 있는 방법이 요구되며, 실린더의 취급방법에 따라 등온해석(isothermal analysis) 및 단열해석(adiabatic analysis)으로 대별된다⁽³⁾. 이상적인 스테링사이클로 작동되기 위해서는 Fig. 2에서와 같이 실린더가 등온으로 유지되고 여기서 외부와의 열교환이 이루어져야 하지만 가변체적의 실린더를 등온으로 유지하는 것보다는 이것을 단열하고 별도의 가열기 및 냉각기를 통

하여 외부와 열교환하는 것이 효율적이므로 대부분의 실제기관에서는 단열실린더 방식을 채용하고 있다⁽⁹⁾. 이와 같이 단열해석이 보다 실제적이지만 일반적으로 해석적인 해가 존재하지 않음에 비하여, 등온해석의 경우, 피스톤운동을 정현파로 취급한 고전적인 Schmidt 해석⁽⁴⁾과 같이 기관성능에 관한 모든 물리량들이 해석적으로 표현되는 장점 때문에 근사적인 기관성능예측시에 널리 사용되어 왔으며 유사한 연구⁽⁵⁾도 발표된 바 있다.

단열해석에 대한 수학적 모델은 Finkelstein⁽⁶⁾에 의해 최초로 제안되었으며, West⁽⁷⁾가 하나의 실린더는 단열되고 다른 하나는 등온으로 유지되는 경우에 대하여 해석적인 해를 구한 바 있으나 적용 대상이 Fluidyne에만 제한된다. 본 연구에서는 피스톤운동을 톱날과로 근사하였을 때 단열된 실린더를 갖는 스팀링기관에 대한 해석적인 해를 구하고자 한다. 실제기관에서 피스톤운동은 기구학적 구동기구에 따라 상이하지만 대략적으로 정현파가 되며, 이 경우에는 해석적인 해가 존재하지 않으므로 수학적으로 구간선형적인 톱날과로 근사하였다. 비록 이러한 근사를 도입한 단열해석이라 하더라도 해석적인 해가 존재한다면 등온해석보다는 기관성능의 예측에 더욱 적합함은 당연하다.

2. 단열해석의 모델

2.1 기본가정

해석에 사용된 기호는 압력, 체적, 온도, 질량을 각각 P, V, T, m 으로, 팽창실린더, 압축실린더, 불용체적, 가열기, 냉각기, 재생기를 각각 하첨자 e, c, d, h, k, r 로 표시하였으며 자세한 설명은 기호란에 표기하였다.

실린더의 단열조건 및 피스톤운동을 제외하면 해석에 도입된 기본가정은 Schmidt 해석의 경우와 유사하며 다음과 같다.

- (1) 가열기 및 냉각기는 각각 일정온도 T_h, T_k 로 유지되며 재생기효율은 1이다.
- (2) 유동에 의한 압력손실은 무시하며 따라서 압력은 균일하다.
- (3) 작동유체는 이상기체로서 $PV = mRT$ 를 만족한다.
- (4) 작동유체의 누설은 없으며 따라서 전체질량 M 은 일정하다.
- (5) 팽창 및 압축실린더의 체적 V_e, V_c 는 톱날

과형으로 변화한다.

(6) 팽창 및 압축실린더는 완전단열되어 있으며 각각의 간극체적(clearance volume)은 0이다.

(7) 불용체적 V_d 는 열교환기의 체적으로서 일정하며 단면적도 일정하다.

(8) 모든 과정은 준평형상태로 진행된다.

(9) 기관회전수는 일정하며 주기정상조건(cyclic steady condition)을 만족한다.

(10) 재생기내의 온도분포는 선형적이다.

2.2 해석의 모델 및 기본방정식

먼저, 전술한 가정으로부터 열교환기내의 온도분포는 Fig. 3과 같이 일정하게 유지되며

$$V_d = V_h + V_k + V_r \tag{1}$$

이고, 불용체적의 온도 T_d 는 열교환기의 적분평균 온도로서 다음과 같이 표시된다.

$$T_d = V_d / \left[V_h / T_h + V_k / T_k + \frac{V_r \ln(T_h / T_k)}{(T_h - T_k)} \right] \tag{2}$$

톱날과형 피스톤운동에 따른 팽창 및 압축실린더의 체적변화는 Fig. 4와 같이 크랭크각도 θ 에 대하여 2π 의 주기로 반복되며 4개의 과정으로 구분하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

과정 1-2 ($0 \leq \theta \leq \phi$) :

$$V_e = V_e \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right), \quad V_c = \lambda V_e \left(1 + \frac{\theta}{\pi} - \frac{\phi}{\pi}\right) \tag{3a}$$

과정 2-3 ($\phi \leq \theta \leq \pi$) :

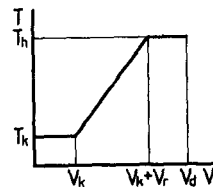


Fig. 3 Temperature profile in heat exchanger

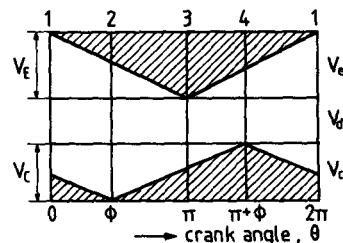


Fig. 4 The present model for piston motions

$$V_e = V_E \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right), \quad V_c = \lambda V_E \left(1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{\phi}{\pi}\right) \quad (3b)$$

과정 3-4 ($\pi \leq \theta \leq \pi + \phi$) :

$$V_e = V_E \left(\frac{\theta}{\pi} - 1\right), \quad V_c = \lambda V_E \left(1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{\phi}{\pi}\right) \quad (3c)$$

과정 4-1 ($\pi + \phi \leq \theta \leq 2\pi$) :

$$V_e = V_E \left(\frac{\theta}{\pi} - 1\right), \quad V_c = \lambda V_E \left(-1 + \frac{\theta}{\pi} - \frac{\phi}{\pi}\right) \quad (3d)$$

여기서, ϕ 는 보통 $\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}$ 인 압축실린더의 팽창실린더에 대한 위상각, V_E 는 팽창실린더의 행정 체적이며 $\lambda = V_c/V_E$ 로서 팽창실린더에 대한 압축실린더의 행정체적비(swept-volume ratio)이다.

작동유체에 대한 질량보존식은 다음과 같이 된다.

$$M = m_e + m_c + m_a = \text{일정} \quad (4a)$$

$$\text{또는, } dm_e + dm_c + dm_a = 0 \quad (4b)$$

여기서,

$$m_a = m_h + m_k + m_r \quad (4c)$$

한편, 작동유체의 출입이 있는 단열실린더에 대한 Finkelstein의 모델로부터 dm_e, dm_c 를 P, V, T 의 함수로 표시⁽⁸⁾할 수 있다. 즉, Fig. 5에서와 같이 인접한 가열기 또는 냉각기를 통하여 이상기체인 작동유체가 유출입하는 단열실린더에 대하여 피스톤운동에 의하여 체적이 변화할 때 열역학 제 1법칙을 적용하면,

$$PdV + \frac{1}{\gamma} VdP = TRdm \quad (5)$$

이 된다. 여기서, γ 는 기체의 비열비이다. 식 (5) 우변의 온도 T 는 기체유입시($dm > 0$)에는 실린더 내 작동유체의 온도로 취한다. 특히 기체유출시에는

$$dm = d\left(\frac{PV}{RT}\right) \quad (6)$$

를 적용하면 식 (5)는 실린더의 체적변화와 무관하게 적분되어

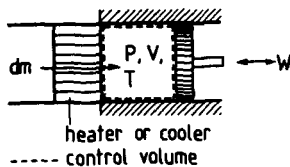


Fig. 5 Schematic diagram for the open adiabatic cylinder

$$TP^{-n} = \text{일정}, \quad n = (\gamma - 1)/\gamma \quad (7a, b)$$

로 된다. 불용체적의 질량은 식 (2)에서 구한 T_d 의 함수로

$$dm_a = \frac{V_d}{RT_d} dP \quad (8)$$

과 같이 표시된다.

따라서, 스테링기관의 단열해석은 정해진 실린더의 체적변화를 적용하여 식 (4a) 또는 (4b), (5), (8)로부터 P, T_e, T_c 및 이에 따른 m_e, m_c 를 구한 후 기관성능계산에 필요한 열 및 일을 이들의 함수로 표시하는 과정이 된다.

계산의 편리 및 결과적용의 유용성을 위하여 다음과 같이 무차원화한다.

$$t = \theta/\pi, \quad \alpha = \phi/\pi \quad (9a, b)$$

$$v = V/V_E, \quad x = V_d/V_E \quad (9c, d)$$

$$r = T/T_h, \quad m = m/M, \quad p = PV_E/MRT_h \quad (9e, f, g)$$

여기서, 특히 x 는 불용체적비(dead volume ratio)라 부르며, 질량 m 은 혼동의 여지가 없으므로 그대로 사용하였다. 식 (3)으로 표시된 체적변화의 무차원형태는

과정 1-2 ($0 \leq t \leq \alpha$) :

$$v_e = 1 - t, \quad v_c = \lambda(1 + t - \alpha) \quad (10a)$$

과정 2-3 ($\alpha \leq t \leq 1$) :

$$v_e = 1 - t, \quad v_c = \lambda(1 - t + \alpha) \quad (10b)$$

과정 3-4 ($1 \leq t \leq 1 + \alpha$) :

$$v_e = t - 1, \quad v_c = \lambda(1 - t + \alpha) \quad (10c)$$

과정 4-1 ($1 + \alpha \leq t \leq 2$) :

$$v_e = t - 1, \quad v_c = \lambda(t - 1 - \alpha) \quad (10d)$$

이며 식 (5)의 무차원형태는 다음과 같다.

$$p dv + \frac{1}{\gamma} v dp = r dm \quad (11)$$

2.3 질량변화에 대한 고찰

전술하였듯이 질량변화 dm 의 부호에 따라 해석 과정이 상이하기 때문에 식 (10)의 과정별 체적변화에 있어서 하나의 과정내에서 dm 의 부호변화를 확인하는 것이 필요하다. 먼저, 물리적인 조건으로부터 과정 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 동안 압력변화 dp 는 각각 -, +, +, -이며 이에 따라 식 (8)로부터 dm_a 도 동일하다. 또한, 과정 1-2 및 3-4에서 dv_e 는 각각 -, +이므로 식 (11)에 대입하면 dm_e 가 각각 -, +가 되며 대응하는 dm_c 는 식 (4b)로부터 +, -가 된다. 그러나, 과정 2-3 및 4-1은 이

방법으로 알 수 없으므로 일단 체적변화형태로부터, 과정 2-3에서 $dm_e < 0$, 과정 4-1에서 $dm_c > 0$ 이라고 가정하자. 이 경우 각각의 과정에서 $dm_c < 0$, $dm_e > 0$ 임을 예상할 수 있으나 $dm_c > 0$ 에서 $dm_c < 0$, $dm_e > 0$ 에서 $dm_e < 0$ 으로 될 가능성도 있으므로 하나의 과정내에서 질량변화의 방향이 불변, 즉 과정 2-3에서 $dm_c = 0$, 과정 4-1에서 $dm_e = 0$ 인 t 가 존재하지 않음을 증명할 필요가 있다.

과정 2-3을 고려할 때, 식 (11)에서 $dm_c = 0$ 이므로

$$\frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{v_c} \frac{dv_c}{v_c} = 0 \quad (12)$$

이며 식 (4b)로부터 $dm_e + dm_a = 0$ 이므로 식 (8)의

무차원형태인 $dm_a = \frac{x}{v_a} dp$ 및 식 (11)을 적용하면

$$\frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{v_e + \gamma x \tau_e / \tau_a} \frac{dv_e}{v_e} = 0 \quad (13)$$

이 된다. 식 (12), (13)에 t 의 함수인 v_e, v_c 를 대입하여 정리하면

$$\alpha = \frac{\gamma x \tau_e}{\tau_a} \quad (14)$$

로서 t 와 무관한 조건이 되며 과정 4-1에 대해서도 동일한 방법으로 증명할 수 있다. 만일, 체적변화가 식 (10)과 같이 t 에 대하여 구간선형적이 아니고 비선형함수라면 본 연구에서와 같이 체적변화를 과정별로 구분하여 취급하는 것이 불가능하며 체적변화에 따른 dm 의 부호를 순차적으로 확인하면서 해석을 수행해야 하므로 수치계산이 불가피하다. 여기서, 기관의 형태 및 작동조건이 식 (14)를 만족하는 경우라면 과정 2-3동안 압력변화는

$$pv_c^\gamma = \text{일정} \quad (15)$$

이 되므로 해석은 오히려 간단하지만 일반적인 경우는 아니다.

이상에서 고찰한 과정별 질량변화를 Table 1에 정리하였다. 결과적으로 본 해석모델에는 dm_e 및 dm_c 부호의 모든 조합이 포함되므로, 피스톤운동을

구간선형적으로 줌더 세분하여 근사할 경우에도, 물리적 조건으로부터 dm 의 부호를 파악할 수 있다면 해석방법은 그대로 적용될 수 있다.

3. 각 과정에 대한 해석

3.1 과정 1-2

기본방정식은 $dm_e < 0, dm_c > 0$ 이므로 식 (4b), (11)로부터

$$dm_e + dm_c + dm_a = 0 \quad (16a)$$

$$p dv_e + \frac{1}{\gamma} v_e dp = \tau_e dm_e \quad (16b)$$

$$p dv_c + \frac{1}{\gamma} v_c dp = \tau_c dm_c \quad (16c)$$

가 된다. 식 (16b)는, 식 (7a,b)로부터

$$\tau_e p^{-n} = C_1, \quad C_1 = \tau_{e1} p_1^{-n} \quad (17a,b)$$

를 이용하면

$$dm_e = \frac{1}{C_1} p^{1-n} dv_e + \frac{1}{C_1 \gamma} p^{-n} v_e dp \quad (18)$$

로 변환된다. 식 (16c), (18)을 식 (16a)에 대입하고 식 (10a)에서 v_e, v_c 를 t 의 함수로 표시하여 정리하면

$$\begin{aligned} & [a_1 + a_2 t + (a_3 + a_4 t) p^{-n}] dp \\ & + (b_1 p + b_2 p^{1-n}) dt = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

와 같은 비선형 1차상미분방정식이 된다. 부록에서 취급한 방법으로 식 (19)의 해를 구하면

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1-n} (1-t) + A \int_{p_1}^1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^n$$

$$- \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\tau_k}{\tau_{e1}}\right)^{-1} d\left(\frac{p}{p_1}\right) - 1 = 0 \quad (20a)$$

$$A = \frac{2-\alpha}{\gamma} + \frac{x}{\lambda} \left(\frac{\tau_k}{\tau_a}\right) \quad (20b)$$

이 된다. 일단 식 (20a,b)에서 압력을 구하면 τ_e, τ_c 는 다음과 같이 간단히 계산된다.

$$\tau_e = \tau_{e1} \left(\frac{p}{p_1}\right)^n \quad (21a)$$

$$\tau_c = v_c / \left[\left(\frac{p_1}{p}\right) \left(\frac{v_{e1}}{\tau_{e1}} + \frac{x}{\tau_a} + \frac{v_{c1}}{\tau_{c1}}\right) - \left(\frac{x}{\tau_a} + \frac{v_e}{\tau_e}\right) \right] \quad (21b)$$

3.2 과정 2-3

질량변화가 $dm_e < 0, dm_c < 0$ 이므로 식 (7a,b)로부터

$$\tau_e = \tau_{e2} \left(\frac{p}{p_2}\right)^n \quad (22a)$$

$$\tau_c = \tau_{c2} \left(\frac{p}{p_2}\right)^n \quad (22b)$$

Table 1 Variations of pressure and masses during a cycle

Process	dp	dm_e	dm_c	dm_a
1-2	-	-	+	-
2-3	+	-	-	+
3-4	+	+	-	+
4-1	-	+	+	-

이다. 식 (22a,b)를 질량보존식 (4a)에 대입하면 압력은

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{p_2}\right)^{1-n} \left(\frac{v_e}{\tau_{e2}} + \frac{v_c}{\tau_{c2}}\right) + \left(\frac{p}{p_2}\right) \frac{x}{\tau_d} \\ & = \left(\frac{v_{e2}}{\tau_{e2}} + \frac{x}{\tau_d} + \frac{v_{c2}}{\tau_{c2}}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

의 해로서 구할 수 있다. 여기서 v_e, v_c 는 식 (10 b)로 표시된다.

3.3 과정 3-4

질량변화가 반대인 점을 제외하면 과정 1-2의 해석방법과 같다. 즉,

$$dm_e + dm_c + dm_d = 0 \quad (24a)$$

$$p dv_e + \frac{1}{\gamma} v_e dp = dm_e \quad (24b)$$

$$p dv_c + \frac{1}{\gamma} v_c dp = \tau_c dm_c \quad (24c)$$

에서 식 (24c)를 $\tau_c p^{1-n} = c_2$ 를 이용하여

$$dm_c = \frac{1}{c_2} p^{1-n} dv_c + \frac{1}{c_2 \gamma} p^{-n} v_c dp \quad (24d)$$

로 변환하고 식 (24c,d)를 식 (24a)에 대입, 식 (10c)를 적용하여 정리하면 상수 a_i, b_j 만 상이할 뿐 식 (19)와 동일한 형태가 된다. 부록을 참조하면 과정 3-4에서의 압력은

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{p_3}\right)^{1-n} (1 + \alpha - t) + B \int_1^{\frac{p}{p_3}} \left[\frac{\lambda}{\tau_{c3}} - \left(\frac{p}{p_3}\right) \right]^{-1} \\ & \times d\left(\frac{p}{p_3}\right) - \alpha = 0 \end{aligned} \quad (25a)$$

$$B = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{x}{\tau_d} \quad (25b)$$

의 해가 된다. 식 (21a,b)와 유사하게 τ_e, τ_c 는 다음식으로부터 구한다.

$$\tau_e = v_e / \left[\left(\frac{p_3}{p}\right) \left(\frac{x}{\tau_d} + \frac{v_{c3}}{\tau_{c3}}\right) - \frac{x}{\tau_d} \right] \quad (26a)$$

$$\tau_c = \tau_{c3} \left(\frac{p}{p_3}\right)^n \quad (26b)$$

3.4 과정 4-1

질량변화가 $dm_e > 0, dm_c < 0$ 이므로 기본방정식은

$$dm_e + dm_c + dm_d = 0$$

$$p dv_e + \frac{1}{\gamma} v_e dp = dm_e \quad (27a)$$

$$p dv_c + \frac{1}{\gamma} v_c dp = \tau_c dm_c \quad (27b)$$

이다. 식 (27b,c)를 식 (27a)에 대입하고 식 (10d)를 적용하여 해를 구하면

$$\left(\frac{p}{p_4}\right)^{1-n} = \frac{\alpha + D}{(t-1) + D} \quad (28a)$$

$$D = \left(\frac{\gamma x}{\tau_d} - \frac{\alpha \lambda}{\tau_k}\right) / \left(1 + \frac{\lambda}{\tau_k}\right) \quad (28b)$$

가 된다. 식 (28a,b)를 식 (27c)에 대입하고 $p = p_4$ 에서 $m_c = 0$ 인 조건을 적용하여 다음과 같이 m_c 를 p 의 함수로 결정할 수 있다.

$$m_c = p_4 \frac{\lambda}{\gamma \tau_k} (\alpha + D) \left(1 - \frac{p}{p_4}\right) \quad (29)$$

따라서 τ_e, τ_c 는 각각 아래와 같이 표시된다.

$$\tau_c = \frac{\gamma \tau_k (t-1-\alpha)}{\alpha + D} \frac{\left(\frac{p}{p_4}\right)}{1 - \left(\frac{p}{p_4}\right)} \quad (30a)$$

$$\tau_e = v_e / \left[\left(\frac{p_4}{p}\right) \left(\frac{v_{e4}}{\tau_{e4}} + \frac{x}{\tau_d}\right) - \left(\frac{x}{\tau_d} + \frac{v_c}{\tau_c}\right) \right] \quad (30b)$$

3.5 주기정상조건

이상에서 구한 해는 과정의 경계가 되는 상태점에서의 온도 $\tau_{ei}, \tau_{ci} (i=1, \dots, 4)$ 를 포함하고 있으며 이들은 상호의존적이지만 하나의 기준상태가 있어야만 결정된다. 즉, 추가적인 조건의 부여가 필요하며 이것은 일주기마다 동일한 상태가 반복된다는 주기정상조건을 만족토록 하면 된다. 예를들어, 식 (30b)에 포함된 τ_{e4} 를 적절한 값($\tau_{e4}=1$ 이 유력)으로 가정하면 식 (28a,b)를 식 (30a,b)에 대입함으로써 τ_{e1}, τ_{c1} 을 구할 수 있다. 따라서 식 (20a,b) 및 (21a,b)로부터 τ_{e2}, τ_{c2} 를, 다시 식 (23) 및 (22a,b)로부터 τ_{e3}, τ_{c3} 를 구하는 것이 가능하다. 이것을 식 (25a,b) 및 (26a)에 적용하면 새로운 τ_{e4} 를 얻으며 τ_{e4} 의 변화가 없을 때까지 반복하면 그값이 해가 된다.

이러한 방법은 본 연구에서와 같이 일주기를 유한한 수의 과정으로 구분가능하며 각 과정에 대한 해석적인 해가 존재할 경우에는 일주기동안 과정의 경계가 되는 상태점에 대한 계산만으로 가능하다. 그러나, 톱날파형이 아닌 실제기관에서의 체적변화에 대한 해석에서는 해석의 정확도를 고려할 때 이론적으로 무한한 수의 과정으로 구분하여 계산하여야 함은 당연하다. 또한 τ_e, τ_c 가 일정한 등온해석의 경우에는 변수가 압력만이므로 해석이 용이하며 주기정상조건은 압력의 연속형태로 스스로 만족한다.

일단 주기정상조건을 만족하면 특정한 상태점에 대한 정보, 예를들어 $t = t_0 (0 < t_0 < \alpha)$ 에서의 압력을 결정하는 것은 식 (20a)의 t 에 t_0 를 대입하고 $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ 를 구하는 것과 대응한다.

4. 열 및 일의 계산

기관의 성능평가를 위해서 필요한 열 및 일의 출입은 일주기에 대하여 열역학 제 1 법칙을 적용함으로써 p, τ 등 해석에서 구한 열역학적 변수와 성능에 영향을 미치는 제 인자의 향으로 표시할 수 있다. 먼저, 기관전체에 대해서 재생기는 외부와의 열 및 일의 교환이 없으므로

$$q_{net} = q_h + q_k = w_{net} \quad (31)$$

이 된다. 여기서 열량 q 및 일량 w 는 다음과 같이 무차원화된 량이다.

$$q = Q/MC_p T_h, \quad w = W/MC_p T_h \quad (32a, b)$$

식 (31) 우변의 순일 w_{net} 는

$$w_{net} = n \left(\int p dv_e + \int p dv_c \right) \quad (33)$$

로 계산할 수 있으나 식 (20a, b) 등과 같이 p 가 v 또는 t 에 대하여 음함수(implicit function) 형태이기 때문에 일반적으로 해석적인 적분이 불가능하다. 따라서, 가열기 및 냉각기 출입열량, q_h, q_k 를 계산하여야 하며 각각에 대한 에너지균형식은

$$q_h = \int_h \tau_o dm_o - \int_h \tau_i dm_i \quad (34a)$$

$$q_k = \int_k \tau_o dm_o - \int_k \tau_i dm_i \quad (34b)$$

이다. 여기서 하첨자 i, o 는 각각 유입, 유출상태를 표시한다. 가열기 및 냉각기의 유출입질량유량은

$$dm_h = dm_i - dm_o = v_h dp \quad (35a)$$

$$dm_k = dm_i - dm_o = \frac{v_k}{\tau_k} dp \quad (35b)$$

의 관계에서 사이클을 구성하는 각 과정에 대하여 dm_i 또는 dm_o 가 인접하는 팽창 및 압축실린더의

질량변화 dm_e, dm_c 와 같으므로 쉽게 구할 수 있으며 2.2절에서 기술한 온도조건과 함께 Table 2에 정리하였다.

각 과정에 대한 q_h, q_k 의 계산은 τ 및 dm 을 p 의 함수로 표시하여 수행하며 구체적인 수식의 전개과정은 복잡하므로 생략하고 결과만 게재하였다. 단, 계산과정에서 예를들어

$$I = A \int_1^{p_1} \left[\left(\frac{p}{p_1} \right)^n - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\tau_k}{\tau_{e1}} \right) \right] d \left(\frac{p}{p_1} \right) \quad (36a)$$

와 같은 적분은 식 (20a)에 대입하여 쉽게

$$I = (1 - \alpha) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-n} - 1 \quad (36b)$$

로 결정될 수 있다. 계산결과는 다음과 같이 편리하게 해석적으로 표현된다.

$$q_{h12}/p_1 = \left[1 - (1 - \alpha) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-n} \right] \left(1 - \frac{\tau_k}{\lambda} \right) / \tau_{e1} + \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) (v_h - A) \quad (37a)$$

$$q_{h23}/p_2 = \left\{ \left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right) \left[\frac{\tau_{c2}}{\lambda} \frac{x}{\tau_d} - \frac{\tau_{e2}\alpha}{\gamma} - \left(\tau_{e2} + \frac{\tau_{c2}}{\lambda} \right) v_h \right] + \alpha \left[\left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{1-n} - 1 \right] - \frac{\tau_{e2}}{1+n} \frac{\tau_{c2}}{\lambda} \frac{x}{\tau_d} \left[\left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{1+n} - 1 \right] \right\} / \left(\tau_{e2} + \frac{\tau_{c2}}{\lambda} \right) \quad (37b)$$

$$q_{h34}/p_3 = -v_h \left(\frac{p_4}{p_3} - 1 \right) \quad (37c)$$

$$q_{h41}/p_4 = -v_h \left(\frac{p_1}{p_4} - 1 \right) \quad (37d)$$

$$q_{k12}/p_1 = -v_k \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \quad (38a)$$

$$q_{k23}/p_2 = \left\{ \left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right) \left[\frac{\tau_{c2}\alpha}{\gamma} + \frac{\tau_k \tau_{e2} x}{\tau_d} \right] \right\}$$

Table 2 Energy balances for heat exchangers

Process	Heater			Cooler		
	in	out	net	in	out	net
1-2	$-\tau_e dm_e$	$-(dm_e + dm_h)$	$-(1 - \tau_e) dm_e - dm_h$	$\tau_k (dm_c + dm_k)$	$\tau_k dm_c$	$-\tau_k dm_k$
2-3	$-\tau_e dm_e$	$-(dm_e + dm_h)$	$-(1 - \tau_e) dm_e - dm_h$	$-\tau_c dm_c$	$-\tau_k (dm_c - dm_k)$	$-(\tau_k - \tau_c) dm_c - \tau_k dm_k$
3-4	$dm_e + dm_h$	dm_e	$-dm_h$	$-\tau_c dm_c$	$-\tau_k (dm_c - dm_k)$	$-(\tau_k - \tau_c) dm_c - \tau_k dm_k$
4-1	$dm_e + dm_h$	dm_e	$-dm_h$	$\tau_k (dm_c + dm_k)$	$\tau_k dm_c$	$-\tau_k dm_k$

$$-\left(\tau_{e2} + \frac{\tau_{c2}}{\lambda}\right)v_k - \alpha\tau_k \left[\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-n} - 1\right] - \frac{\tau_{e2}\tau_{c2}}{1+n} \frac{x}{\tau_d} \left[\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1+n} - 1\right] \left/ \left(\tau_{e2} + \frac{\tau_{c2}}{\lambda}\right)\right. \quad (38b)$$

$$q_{k34}/p_3 = \frac{\alpha\lambda}{\tau_{c3}}(\tau_k - \lambda) + \left(\frac{p_4}{p_3} - 1\right)(B\lambda - v_k) \quad (38c)$$

$$q_{k41}/p_4 = -v_k \left(\frac{p_1}{p_4} - 1\right) \quad (38d)$$

여기서 압력비 $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_2}$, $\frac{p_4}{p_3}$, $\frac{p_1}{p_4}$ 는 각각 식 (20a, b), (23), (25a,b), (28a,b)에서 결정된다.

한편, 기관의 성능지표는 이론열효율 및 비출력 (work parameter)으로 대표될 수 있으며 이론열효율은

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_h} \quad (39)$$

로 정의되고 비출력은

$$w_o = W_{net}/P_{max} V_{total} \quad (40a)$$

로서, 무차원형태로 표시하며

$$w_o = w_{net}/n(1+\lambda)p_{max} \quad (40b)$$

이 된다. 여기서 $V_{total} = V_E + V_C$ 이다. 식 (40a,b)로 표시된 비출력은 열효율과 함께 불용체적비 x , 위상각 α , 체적비 λ , 온도비 τ_k 등의 인자가 기관 성능에 미치는 영향을 고찰하는데 필요한 지표⁽⁴⁾가 된다.

이상과 같이, 피스톤운동을 톱날파형으로 근사할 경우 적절한 가정에 의한 해석모델에 대하여 단열해석을 수행한 결과, 기관의 상태를 표시하는 열역학적 변수들과 기관성능계산에 필요한 열 및 일의 교환을 해석적으로 표현할 수 있었다. 물론 압력을 구체적으로 계산하기 위한 식 (20a,b)와 같은 방정식의 해법은 본 논문에서 제시하고자 하는 기관의 해석방법과는 별개의 문제이나, 실제 식 (20a,b)등을 엄밀히 고찰하면 p 에 대하여 단조함수임을 알 수 있으며, 따라서 쉽게 해를 구할 수 있다는 점을 지적한다.

5. 결 론

스터링기관의 예비설계단계에서 기관성능을 정성적으로 예측하기 위한 수단으로서, 피스톤운동을 톱날파형으로 근사하고 단열해석을 수행하여 얻은 결과를 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 기관의 일주기동안 팽창 및 압축실린더의 질량은 체적변화에 대응하여 변화한다.

(2) 일주기를 4개의 과정으로 구분하여 Finkel-

stein의 수학적 모델에 따라 취급하는 것이 가능하다.

(3) 단열해석에서는 등온해석과는 달리 주기정상 조건의 적용이 필수적이다.

(4) 기관상태를 표시하는 압력, 온도 등 열역학적 변수를 크랭크각도의 해석적인 함수로 표현하였다.

(5) 기관의 성능계산에 필요한 열 및 일의 교환을 제 인자 및 과정의 경계가 되는 상태점에서 변수만의 항으로 해석적으로 표현하였다.

(6) 기관내 질량변화의 방향을 파악할 수 있다면, 본 해석방법은 피스톤운동이 구간선형적인 모든 경우에 적용가능하다.

(7) 해석적인 해이므로 시뮬레이션에 의한 단열해석 결과를 비교할 수 있는 기준으로서 유용하며 실제 피스톤운동을 고려한 시뮬레이션에 비하여 경제적이다.

참 고 문 헌

- (1) G. T. Reader, 1978, "The Pseudo Stirling Cycle—A Suitable Performance Criteria", Proc. 13th IECEC, pp. 1763~1770.
- (2) G. T. Reader and M. Cross, 1979, "The Choice of Gas Exchange Model in Stirling Cycle Machine Analysis", Proc. 14th IECEC, pp. 1069~1074.
- (3) I. Urieli and D. M. Berchowitz, 1984, "Stirling Cycle Engine Analysis", Chap. 4, pp. 86~97, Adam Hilger Ltd, Bristol.
- (4) G. Walker, 1980, "Stirling Engines", Chap. 4-5, pp. 50~106, Clarendon Press, Oxford.
- (5) E. M. Beans, 1981, "A Mathematical Model for the Stirling Engine Cycle", J. Eng. Power, Trans. ASME, Vol. 103, pp. 505~510.
- (6) T. Finkelstein, 1962, "Cyclic Processes in Closed Regenerative Gas Machines Analyzed by a Digital Computer Simulating a Differential analyzer", J. Eng. Industry, Trans. ASME, Vol. 84, pp. 165~179.
- (7) C. D. West, 1980, "An Analytical Solution for a Stirling Machine with an Adiabatic Cylinder", Proc. 15th IECEC, pp. 2274~2277.
- (8) E. B. Qvale and J. L. Smith, Jr., 1968, "A Mathematical Model for Steady Operation of Stirling-Type Engines", J. Eng. Power, Trans. ASME, Vo. 90, pp. 45~50.

부 록

미분방정식의 해

본문에서 유도된 미분방정식

$$(a_1 + a_2 t + (a_3 + a_4 t) p^{-n}) dp + (b_1 p + b_2 p^{1-n}) dt = 0 \quad (A1)$$

의 유도과정에서

$$a_2 = (1-n)b_1, \quad a_4 = (1-n)b_2 \quad (A2 \text{ a,b})$$

인 관계가 성립한다. 적분인자를 구하기 위하여

$$L = (a_1 + a_2 t) + (a_3 + a_4 t) p^{-n}, \\ N = b_1 p + b_2 p^{-n} \quad (A3 \text{ a,b})$$

라 하면 식 (A2 a,b)를 이용하여

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial p} \right) / N = -nb_1 / N = f(p) \quad (A4)$$

이므로 적분인자 $g(p)$ 는

$$g(p) = \exp \left[\int f(p) dp \right] = \left(p^n + \frac{b_2}{b_1} \right)^{-1} \quad (A5)$$

가 된다. 식 (A1)에 적분인자를 곱하면 함수 ψ 의 완전미분식

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = 0 \quad (A6)$$

이 된다. 따라서,

$$\psi = b_1 p^{1-n} \left(p^n + \frac{b_2}{b_1} \right)^{-1} t + h(p) \quad (A7)$$

이며, 여기서

$$h(p) = \int g(p) (a_1 + a_3 p^{-n}) dp \quad (A8)$$

로 결정된다. 결국 식 (A1)의 일반해는 식 (A7), (A8)을 참조하여 다음과 같이 된다.

$$\psi = C \quad (A9)$$

과정 1-2에 대하여, 본문 3.1절의 과정에 따르면

식 (17b)로 주어진 c_1 을 포함하여

$$a_1 = \frac{x}{\tau_a} + \frac{\lambda(1-\alpha)}{\tau_k \gamma}, \quad a_2 = \frac{\lambda}{\tau_k \gamma}, \quad a_3 = \frac{1}{c_1 \gamma}, \\ a_4 = -\frac{1}{c_1 \gamma} \quad (A10 \text{ a,b,c,d})$$

이므로 식 (A8)에 대입하면

$$h(p) = a_3 \frac{b_1}{b_2} \frac{p^{1-n}}{1-n} - \left(a_3 \frac{b_1}{b_2} - a_1 \right) \int \left(p^n + \frac{b_2}{b_1} \right)^{-1} dp \quad (A11)$$

이다. 식 (A7), (A9), (A11)로부터

$$p^{1-n}(t-1) + A \int \left(p^n - \frac{\tau_k}{c_1 \lambda} \right)^{-1} dp = C \quad (A12)$$

이며 적분상수 C 는 $t=0$ 에서 $p=p_1$ 임을 적용하여 결정할 수 있으므로 해는 다음과 같이 된다.

$$\left(\frac{p}{p_1} \right)^{1-n} (1-t) + A \int_{p_1}^p \left[\left(\frac{p}{p_1} \right)^n - \frac{1}{\lambda} \frac{\tau_k}{\tau_{e1}} \right]^{-1} d \left(\frac{p}{p_1} \right) - 1 = 0 \quad (A13)$$

과정 3-4에 대해서도

$$a_1 = \frac{x}{\tau_a} - \frac{1}{\gamma}, \quad a_2 = \frac{1}{\gamma}, \quad a_3 = \frac{\lambda(1+\alpha)}{c_2 \gamma}, \\ a_4 = -\frac{\lambda}{c_2 \gamma} \quad (A14 \text{ a,b,c,d})$$

를 적용하여 같은 방법으로 본문의 식 (25a,b)를 결정한다.