

<論 文>

프로파일링을 한 원통형 로울러의 탄성유체윤활(I)

박 태 조* · 김 경 응*

(1987년 12월 2일 접수)

Elastohydrodynamic Lubrication of a Profiled Cylindrical Roller (I)

Tae Jo Park and Kyung Woong Kim

Key Words : Elastohydrodynamic Lubrication(탄성유체윤활), Line Contact(선접촉), Profiling(프로파일링), Pressure Spike(압력상승), Newton-Raphson Method(뉴우튼-랩슨 방법)

Abstract

A numerical solution of the elastohydrodynamic lubrication problem for an axially profiled cylindrical roller is presented. The problem is analyzed using finite difference method and Newton-Raphson method. The effect of side leakage and compressibility of lubricants are considered and axially nonuniform grid is constructed over the computation zone. Isobars, contours and section graphs show pressure variation and film shape. Contours plot is very similar to the previously reported experimental observations based upon optical interferometry. The maximum pressure and the minimum film thickness occur near the start of the profiling. The method used makes it possible to design an optimum axial profile of the roller to increase the life of rolling bearings.

기 호 설 명

<p>a : $y=0$에서의 탄성접촉부의 반폭</p> <p>b : 탄성접촉부의 길이</p> <p>d : 미소압력요소에 의한 탄성변형량</p> <p>$Dmjl$: 탄성변형량계산에 사용되는 무차원 영향 계수</p> <p>E : 유효 탄성 계수, $2/E = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$</p> <p>$f_{ij}$: 식(14)로 정의됨</p> <p>G : 무차원 재료변수 $G = aE$</p>	<p>h : 유막두께</p> <p>H : 무차원 유막두께 h/R</p> <p>L, N : X, Y방향 절점의 수</p> <p>M : 임의의 Y에서 레이놀즈 경계조건을 만족시키는 X방향의 절점의 수(Fig. 3참조)</p> <p>p : 압력</p> <p>P : 무차원 압력 p/E</p> <p>R : 로울러의 반경</p> <p>R_c : Fig. 1 참조</p> <p>R_c^* : R_c/R</p> <p>u : 로울러와 케도면의 평균속도</p> <p>U : 무차원 속도변수 $U = \eta_0 u / RE$</p>
---	--

* 정회원, 한국과학기술원 생산공학과

- x, y : 로울러의 구름방향 및 길이방향 좌표계
- X, Y : 무차원 좌표 $x/R, y/R$
- y_c : Fig. 1 참조
- Y_c : y_c/R
- w : 하중
- W : 무차원 하중변수 $W=w/R^2E$
- $\eta_0, \tilde{\eta}$: 압력이 대기압 및 p 인 위치에서의 윤활유의 점도
- η : 무차원 점도 $\tilde{\eta}/\eta_0$
- $\rho_0, \tilde{\rho}$: 압력이 대기압 및 p 인 위치에서의 윤활유의 밀도
- ρ : 무차원 밀도 $\tilde{\rho}/\rho_0$
- α : 윤활유의 압력-점도 지수

1. 서 론

선접촉의 탄성유체윤활(Elastohydrodynamic Lubrication: EHL)은 원통형 로울러베어링에서의 로울러와 케드면의 접촉, 인벌류우트 치차(involute gear)의 치면간의 접촉, 원판형 캠과 로울러형 종동자(follower)의 접촉등에서와 같이 실제로 공학문제에서 많이 생겨난다. 이와같은 접촉은 접촉길이가 유한하기 때문에 발생하는 접촉부 양단에서의 응력집중을 줄이기 위해서 양단부로 갈수록 직경을 작게 해야(이하 프로파일링(profile)이라 함)한다. 지금까지의 로울러베어링의 프로파일(profile)을 결정하는 이론적인 방법의 기준은 윤활을 고려하지 않은 상태에서 Hertz의 이론에 기초를 둔 탄성접촉이론으로 접촉압력의 크기가 양단부에서 크게 되지 않게 하는 것이었다^(1,2). 그러나, 실제로 운전되고 있는 로울러베어링은 윤활상태이므로 탄성접촉이론만으로는 윤활지역에서의 발생압력과 유막의 크기를 추정할 수가 없다. 특히, 최소유막의 크기는 베어링의 피로수명에 큰 영향을 미친다고 잘 알려져 있다⁽³⁾. 따라서, 윤활지역내에서의 압력과 유막의 크기를 정확하게 예측하여 베어링의 수명이 최대가 되게 하는 로울러의 프로파일을 구하기 위해서는, 발생압력에 의한 윤활면의 탄성변형과 압력에 따른 윤활유의 점도변화를 고려하는 탄성유체윤활해석이 필수적이다.

탄성유체윤활에 대한 연구는 Dowson과 Higginson⁽⁴⁾에 의해서 기본적인 이론이 확립된 후 많은 이론 및 실험적 연구가 수행되었지만 거의 대부분이 볼베어링에서와 같은 점접촉 문제이거나 무한장

로울러로 가정한 선접촉문제이고 접촉길이가 유한한 선접촉문제에 대한 연구는 극소수에 불과하다. Wymer와 Cameron⁽⁵⁾은 테이퍼로울러에서의 유막의 크기를 optical interferometry를 이용하여 실험적으로 측정하였다. 최소유막은 프로파일링을 하지 않은 로울러에서 뿐만 아니라 프로파일링을 한 로울러에서도 로울러의 양단부 부근에서 발생하며, 접촉길이가 유한한 선접촉의 탄성유체윤활문제에서는 길이방향의 프로파일링이 최소유막의 크기에 큰 영향을 준다는 것을 보였다. 그러나, 이 실험방법으로는 유막내의 압력은 측정할 수가 없다. Bahadoran과 Gohar⁽⁶⁾은 무한장 선접촉의 결과를 이용하여 프로파일링을 하지 않은 원통형 로울러의 양단부해석을 근사적으로 시도하였다. 그 결과 양단부에서의 유막의 크기는 거의 0에 가까웠다. Hamrock와 Dowson⁽⁷⁾은 반복법을 사용하여 점접촉의 탄성유체윤활문제를 해석하면서 볼의 타원비(ellipticity ratio)를 8까지 증가시켜서 선접촉의 문제로 근사화하였다. 그러나, 이 결과는 구형 로울러베어링에는 적용할 수 있지만, 프로파일링을 한 원통형 로울러베어링에는 적용할 수가 없다. Kuroda와 Arai⁽⁸⁾은 유한요소법과 뉴우튼-람슨 방법을 이용하여 프로파일링을 하지 않은 원통형 로울러에서의 압력과 유막의 크기를 무차원 재료변수가 작은 경우에 대해서 구하였다. 그러나, 이들이 사용한 로울러는 길이가 아주 짧아서 양단부 해석에 불과하였으며, 사용한 경계조건도 실제적이 아니었다.

측면유출(side leakage)의 영향을 포함하는 로울러베어링의 탄성유체윤활해석에서는 로울러의 양단부 해석만으로는 정확한 해석을 기할 수가 없다. 이는 로울러 중앙부에 작용하는 압력에 의해서 양단부가 탄성변형되는 영향을 고려할 수가 없기 때문이다. 더구나, 무한장 로울러에 대한 해석결과를 양단부에까지 확대하여 적용할 수도 없다. 따라서, 그와 같은 문제에서는 로울러 전체를 해석해야만 된다. 프로파일링을 한 원통형로울러 전체에 대한 수치해석이 Mostofi와 Gohar⁽⁹⁾에 의해서 최초로 시도되었다. 그들은 반복법⁽⁷⁾을 적용하여 압축성 윤활유에 대한 수렴해를 구하였으나, 수렴해를 얻기까지는 시행착오법으로 반복계산을 해야 하는 등의 경험이 많이 요구되어 수치해석과정이 체계적이지 않았으며, 수렴된 결과의 하중범위도 작았다. 박태조와 김경웅⁽¹⁰⁾은 프로파일링을 한 원통형 로

롤러의 탄성유체윤활문제에 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 처음으로 적용하여 수렴해를 얻었다. 이 해석방법은 Mostofi와 Gohar의 방법과 비교하여 수치해석과정이 월등히 체계적이며 수렴성도 우수하였다.

따라서, 본 연구에서는 필자들의 수치해석방법⁽¹⁰⁾을 발전시켜 프로파일링을 한 로울러의 프로파일 시작점부근에서의 압력과 유막의 거동을 보다 상세하게 해석하고자 한다. 이를 위하여, 수치해석시 로울러 길이방향의 분할을 불균일하게 하여 프로파일 시작점부근에서의 절점의 간격을 조밀하게 하였으며 윤활유의 압축성효과도 고려하였다.

2. 이 론

탄성유체윤활에서는 윤활지역에서의 윤활유의 거동을 지배하는 레이놀즈 방정식뿐만 아니라 유막내의 유체압력이 아주 크므로 압력에 의한 윤활면의 탄성변형과 윤활유의 점도변화를 고려해야 하는 점이 특징적이다. 여기에, 윤활유를 더 이상 비압축성이라고 가정할 수가 없기 때문에 압축성 효과도 고려해야 한다. 본 연구에서는 등온조건하에서 $\bar{\eta} = \eta_0 e^{\alpha p}$ 와 같은 점도-압력 관계식을 사용하여 문제를 해석하고자 한다.

2.1 지배방정식

(1) 레이놀즈방정식

로울러의 구름방향이 x 방향일때, 윤활유의 압축성을 고려한 레이놀즈방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} h) \tag{1}$$

여기서 $u = (u_1 + u_2)/2$ 로 로울러와 케도면의 x 방향의 평균속도이다. 뒷식에 $X = x/R$, $Y = y/R$, $H = h/R$, $P = p/E$, $\eta = \bar{\eta}/\eta_0$, $\rho = \bar{\rho}/\rho_0$, $U = \eta_0 u / ER$ 과 같은 무차원변수를 도입하여 무차원화하면 다음의 (2)식과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{\partial}{\partial X} (\rho H) \tag{2}$$

(2) 윤활유의 상태방정식

밀도-압력 관계식⁽⁴⁾과 점도-압력 관계식의 무차원화된 형태는 다음과 같다.

$$\rho = 1 + \frac{0.6EP}{1 + 1.7EP} \tag{3}$$

$$\eta = \exp(GP) \tag{4}$$

여기서 $G = \alpha E$ 로 무차원 재료변수이며, E 의 단위는 $[GPa]$ 이다.

(3) 유막두께식

탄성유체윤활상태에서의 유막은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h = h_0 + hg + hv \tag{5}$$

여기서, h_0 는 운전조건에 따라 결정되는 상수이고 hg 는 변형되지 않은 상태에서의 로울러의 기하학적 형상에 의한 유막이며 hv 는 압력에 의해서 탄성변형되는 양이다.

로울러의 길이방향 프로파일이 Fig. 1과 같은 경우에 hg 는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$hg = x^2/2R + (y^2 - y_c^2)/2R_c \tag{6}$$

탄성유체윤활상태에서는 아주 높은 압력이 발생하므로 탄성변형량이 아주 크다. 그러나, 변형되는 부분이 로울러와 케도면의 반경에 비해서는 아주 작으므로 로울러와 케도면을 탄성반무한체라고 가정할 수 있다. 따라서, Fig. 2와 같이 면적이 $2a \times$

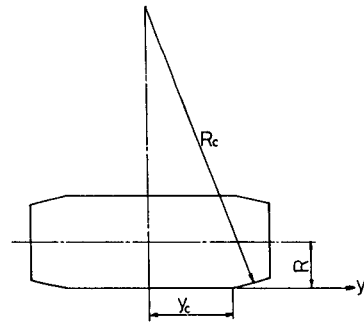


Fig. 1 Roller axial profile schematic

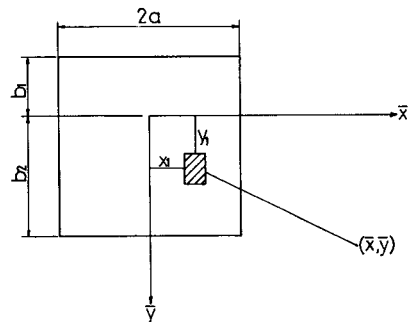


Fig. 2 Surface deformation of a semi-infinite body subjected to a uniform pressure over a rectangular area

$(b_1 + b_2)$ 인 사각형의 미소압력요소에 의한 (\bar{x}, \bar{y}) 점에서의 탄성변형량은 다음식과 같다.

$$d = \frac{2}{\pi E} \int_{-a}^a \int_{-b_1}^{b_2} \frac{p(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{y} - y_1)^2}} \quad (7)$$

미소압력요소내의 압력이 일정한 경우, 식 (7)은 Hamrock와 Dowson⁽⁷⁾의 결과와 유사하게 다음과 같이 적분된 형태로 나타낼 수 있다.

$$d = P\bar{D} \quad (8)$$

여기서, $P = p/E$,

$$\begin{aligned} \bar{D} = & \frac{2}{\pi} [(\bar{x} + a) \\ & \times \ln \left\{ \frac{(\bar{y} + b_1) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} + b_2)^2}}{(\bar{y} - b_2) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} - b_2)^2}} \right\} \\ & + (\bar{x} - a) \\ & \times \ln \left\{ \frac{(\bar{y} - b_2) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - b_2)^2}}{(\bar{y} + b_1) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} + b_1)^2}} \right\} \\ & + (\bar{y} + b_1) \\ & \times \ln \left\{ \frac{(\bar{x} + a) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} + b_1)^2}}{(\bar{x} - a) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} + b_1)^2}} \right\} \\ & + (\bar{y} + b_2) \\ & \times \ln \left\{ \frac{(\bar{x} - a) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - b_2)^2}}{(\bar{x} + a) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} - b_2)^2}} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

와 같다.

따라서, 임의의 점에서의 탄성변형량은 전윤활영역에 작용하는 압력의 영향을 중첩하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$hv = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \bar{D} m_{jl} p_{kl} \quad (10)$$

$$m = |i - k| + 1$$

여기서, $\bar{D} m_{jl}$ 은 미소압력요소내에 절점 (k, l) 이 있을때, 압력요소에 작용하는 단위압력에 의한 절점 (i, j) 에서의 변형량을 나타내는 영향계수(참고 문헌(7) 참조)로 식 (9)와 같이 정의되며 절점의 위치에 따라서 결정되는 y 방향과는 달리 x 방향으로는 절점간의 거리 $2a \times (m-1)$ 만으로 결정된다. 따라서, 식 (6), (10)을 식 (5)에 대입하고 무차원화하면 식 (11)과 같다.

$$H = H_0 + X^2/2 + (Y^2 - Y_c^2)/2R_c^* + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N D m_{jl} P_{kl} \quad (11)$$

여기서, $H = h/R$, $H_0 = h_0/R$, $Y_c = y_c/R$, $R_c^* = R_c/R$, $D m_{jl} = \bar{D} m_{jl}/R$ 이다.

(4) 하중조건식

하중은 유막내에서 발생하는 압력의 합과 같다.

$$w = \iint p \, dx dy \quad (12)$$

윗식은 다음식과 같이 무차원화할 수 있다.

$$W = w/ER^2 = \iint P dX dY \quad (13)$$

2.2 경계조건

해석에 사용된 경계조건은 다음과 같다.

(1) 계산영역의 경계에서의 압력은 0이다.

(2) 출구측에서는 레이놀즈의 경계조건 ($p = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$)을 만족한다.

3. 수치해석

탄성유체윤활문제는 윤활유의 점도가 압력변화에 대해서 지수함수적으로 변화하기 때문에 비선형성이 아주 강하다. 이와같은 탄성유체윤활문제의 수치해석방법으로는 몇가지 방법이 있으나 뉴우튼-랩슨 방법이 수렴성과 계산시간에서 가장 유리하다고 알려져 있다⁽¹¹⁾. 따라서, 본 연구에서는 필자들의 연구⁽¹⁰⁾에서와 같이 뉴우튼-랩슨 방법을 유한차분법과 함께 사용하여 문제를 해석하고자 한다.

식 (2)의 무차원화된 레이놀즈방정식을 X 방향으로는 등간격, Y 방향으로는 부등간격으로 나누어 유한차분형태로 바꾸면 절점 (i, j) 에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{ij} = & \frac{\rho_{i+\frac{1}{2}j} H^3_{i+\frac{1}{2}j}}{\eta_{i+\frac{1}{2}j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \\ & - \frac{\rho_{i-\frac{1}{2}j} H^3_{i-\frac{1}{2}j}}{\eta_{i-\frac{1}{2}j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) \\ & + \frac{2\Delta X^2}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left(\frac{\rho_{i,j+\frac{1}{2}} H^3_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta Y_j \eta_{i,j+\frac{1}{2}}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_{i,j-\frac{1}{2}} H^3_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-\frac{1}{2}}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) - 12U \Delta X \right) \\ & \times (\rho_{i+\frac{1}{2}j} H_{i+\frac{1}{2}j} - \rho_{i-\frac{1}{2}j} H_{i-\frac{1}{2}j}) = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$(i=2, \dots, M, j=2, \dots, N-1)$

여기서 $H_{i+\frac{1}{2}j} = (H_{i,j} + H_{i+1,j})/2$,

$$\rho_{i+\frac{1}{2}j} = (\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j})/2,$$

$$\eta_{i+\frac{1}{2}j} = \exp\{0.5G(P_{i,j} + P_{i+1,j})\}$$

등과 같으며, M 은 Fig. 3과 같이 각 Y 에서 레이놀즈의 경계조건을 만족시키는 X 방향의 절점의 수이다.

한편, 식(13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2W/\Delta X = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N P_{ij} (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (15)$$

이상에서, 미지수는 $P_{ij} (i=2, \dots, M, j=2, \dots, N-1)$ 와 H_0 로 미지수의 수가 식(14), (15)에서의 식의 수와 동일하므로 풀 수가 있다. 식(14)에 뉴턴-랩슨 방법을 적용하면,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{22}}{\partial P_{22}} & \frac{\partial f_{22}}{\partial P_{23}} & \dots & \frac{\partial f_{22}}{\partial P_{MN-1}} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial P_{22}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial P_{23}} & \dots & \frac{\partial f_{23}}{\partial P_{MN-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_{MN-1}}{\partial P_{22}} & \frac{\partial f_{MN-1}}{\partial P_{23}} & \dots & \frac{\partial f_{MN-1}}{\partial P_{MN-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_1 + \Delta Y_2 \\ \Delta Y_2 + \Delta Y_3 \\ \dots \\ \Delta Y_{N-2} + \Delta Y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_{22}}{\partial H_0} \\ -\frac{\partial f_{23}}{\partial H_0} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f_{MN-1}}{\partial H_0} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{22} \\ P_{23} \\ \vdots \\ P_{MN-1} \\ H_0 \end{bmatrix}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} g_{22} \\ g_{23} \\ \vdots \\ g_{MN-1} \\ 2W/\Delta X \end{bmatrix}^{(n)} \quad (17)$$

여기서, $g_{ij} = \sum_{k=2}^M \sum_{l=2}^{N-1} \frac{\partial f_{ij}}{\partial P_{kl}} P_{kl} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial H_0} H_0 - f_{ij}$ 이다. 따라서, 식(17)의 연립방정식을 풀면 $(n+1)$ 번째에서의 미지수 P_{ij} 와 H_0 를 구할 수 있다.

Heydari와 Gohar⁽²⁾의 방법으로 구한 탄성접촉부의 반폭 및 길이를 각각 a 와 b 라고 할 때, 계산영역은 Fig. 4와 같이 입구부경계를 $-4a$ 에, 출구부경계는 $1.5a$ 에, 그리고 로울러 길이방향경계는 $1.04b$ 에 각각 위치시켰다. 절점의 수는 계산영역에 걸쳐서 X 방향으로는 균일하게 78개, Y 방향으로는 불균일하게 15개로 각각 나누었다. 특히 Y 방향의 절점간격은 로울러의 프로파일 시작점 부근에서는 조밀하게, 로울러의 길이방향 중앙부에는 넓게 두었다. 최초의 계산에서는 탄성접촉압력⁽²⁾을

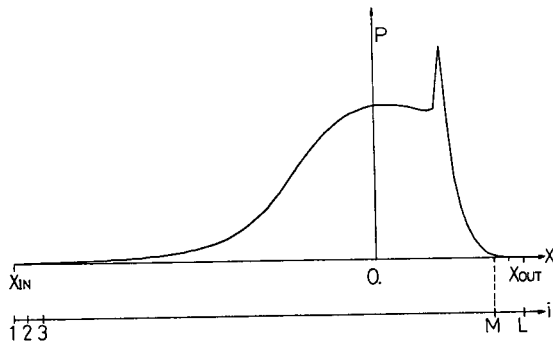


Fig. 3 Sketch to illustrate calculation of M at arbitrary Y

$$\sum_{k=2}^M \sum_{l=2}^{N-1} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial P_{kl}} \right)^n (P_{kl}^{n+1} - P_{kl}^n) + \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial H_0} \right)^n (H_0^{n+1} - H_0^n) + f_{ij}^n = 0 \quad (16)$$

여기서 n 은 반복계산횟수이며, 편미분계수 $\partial f_{ij} / \partial P_{kl}$ 과 $\partial f_{ij} / \partial H_0$ 의 일부를 부록에 나타내었다. 식(16)에 식(15)를 포함시켜 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{22}}{\partial H_0} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial H_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{MN-1}}{\partial H_0} \\ 0 \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} P_{22} \\ P_{23} \\ \vdots \\ P_{MN-1} \\ H_0 \end{bmatrix}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} g_{22} \\ g_{23} \\ \vdots \\ g_{MN-1} \\ 2W/\Delta X \end{bmatrix}^{(n)} \quad (17)$$

P_{ij} 의 초기값으로 하고 H_0 는 임의로 주어서 계산을 하였으며, 그 이후의 계산에서는 이미 구한 계산의 결과를 초기값으로 하여 계산하였다. 반복계산과정중에 P_{ij} 가 0보다 작은 영역에서는 P_{ij} 를 0으로 두고 각 Y 에서의 M 을 수정하면서 P_{ij} 가 0보다 작은 영역이 발생하지 않을때까지 계산을 반복하였다. 반복계산의 최종적인 수렴판정은 $\frac{\sum \sum |P_{ij}^{n+1} - P_{ij}^n|}{\sum \sum P_{ij}^{n+1}}$ 가 10^{-5} 이하일 경우로 하였다.

계산에 사용된 로울러는 Mostofi와 Gohar⁽⁹⁾의 경우와 동일하게 프로파일이 $Y_c=0.7, R_c^*=100$ 인 로울러이며, 재료의 유효탄성계수 E 는 220Gpa로 하였다. 계산에 사용된 계산기는 한국과학기술원 전산연구실의 ELXSI 6400으로 한번 반복계산하였는데 약 600CPU초가 소요되었다.

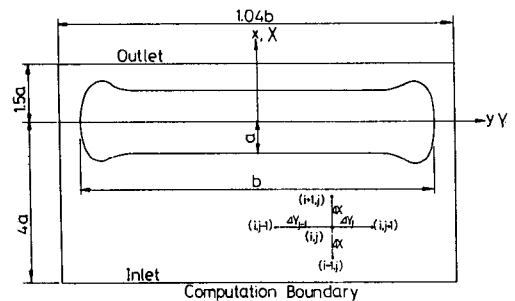


Fig. 4 Computational boundaries and grids

4. 결과 및 고찰

Fig. 5는 해석결과의 설명을 위한 유막의 등고선상의 주요단면의 위치를 나타낸다. 단면 1-1은 로울러의 길이방향의 중앙단면이며, 단면 2-2와 단면 3-3은 각각 길이방향으로의 극부적인 최고압력과 최소유막이 발생하는 위치이다. 단면 4-4는 최소유

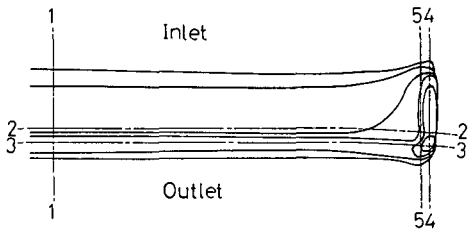


Fig. 5 Sections through contact for film contour

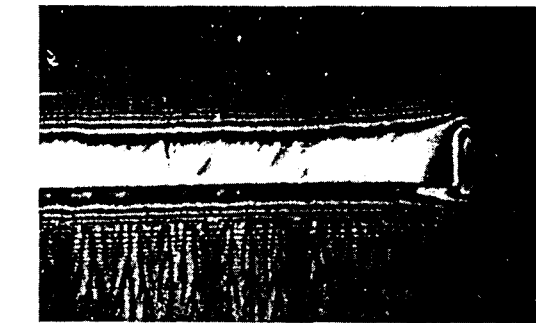
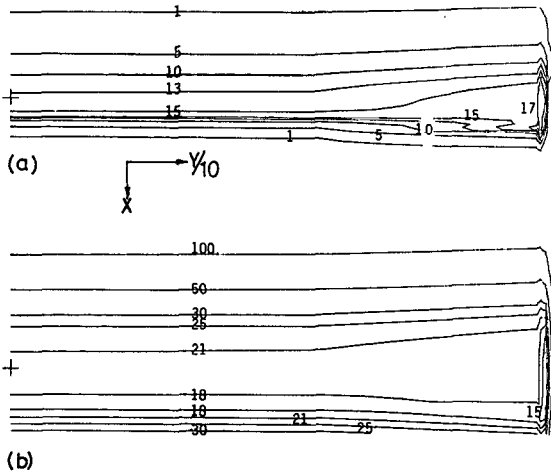


Fig. 6 Isobars and contour plots. (a) Isobar ($P \times 10^4$) (b) Contours ($H \times 10^6$) $Y_c = 0.7$, $R_c^* = 100$, $U = 1.0 \times 10^{-11}$, $G = 3100$, $W = 2 \times 10^{-5}$ (c) Experimental contours [Reference (5), Fig. 7(b)]

막을 통과하는 구름방향의 위치이며 단면 5-5는 단면 4-4의 중앙부쪽으로 인접한 절점에서의 구름방향의 단면이다.

Fig. 6의 (a)와 (b)는 각각 계산영역의 절반에 대한 등압선과 유막의 등고선으로 그림에서의 +는 좌표의 중심을 나타내고 있으며, Fig. 6의 (c)는 Wymer와 Cameron⁽⁵⁾의 실험결과인 양단부에서의 유막의 interference fringe이다. 수치해석과 실험에서의 조건이 동일하지는 않지만 양단에서의 유막이 아주 비슷한 경향을 나타내고 있다. 등압선과 유막의 등고선이 구름방향의 출구측에서 간격이 보다 조밀한 것은 이 지역에서 탄성유체윤활의 대표적인 특징인 압력 상승 (pressure spike) 과 유막수축 (fluid film constriction) 이 발생함을 의미한다. 로울러의 길이방향의 중앙에서 양단부쪽으로 상당한 길이까지 등압선과 등고선이 거의 평행한데 이는 압력과 유막의 길이방향 기울기가 아주 작음을 뜻한다. 그러나, 프로파일 시작점 부근에서는 압력과 유막 모두가 아주 급격하게 변화하며, 최대압력과 최소유막은 이 부근의 구름방향 출구측에서 발생함을 알 수 있다. 따라서, 로울러베어링을 설계하고자 할 경우에는 이 영역에 기준을 두어야 한다.

Fig. 7은 단면 1-1에서의 구름방향의 압력과 유막형상을 무한장 해석결과와 비교하여 나타낸 것이다. 무한장 해석은 로울러에 작용하는 하중이 로울러의 탄성점축길이에 걸쳐서 균일하게 분포되어 있다고 가정하여 단위길이에 작용하는 하중으로 계산한 결과이며, 수치해석방법과 구름방향의 절점의 속도 무한장 해석에서와 동일하다. 구름방향의 출

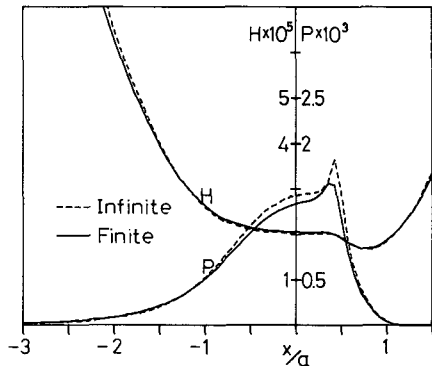


Fig. 7 Pressure and film thickness at mid point of roller $Y_c = 0.7$, $R_c^* = 100$, $U = 1.0 \times 10^{-11}$, $G = 3100$, $W = 2 \times 10^{-5}$

구축에서 발생하는 압력상승의 크기가 무한장 해석 결과보다는 작으나 전체적인 압력의 대략적인 크기는 상당히 비슷하다. 유막은 중앙의 평행부에서 뿐만 아니라 출구측에서의 유막도 무한장 해석결과와 거의 일치한다. 이와같은 결과들은 로울러의 길이 방향 중앙부에서는 프로파일링으로 인한 윤활유의 측면유출의 영향이 아주 작음을 의미하며, 중앙부에서는 무한장의 가정을 적용하여도 결과는 타당함을 보이고 있다. 계산에 사용한 하중이 작기 때문에 압력의 크기가 크지 않으며 출구측에서의 압력상승과 유막의 수축도 선명하지도 않다.

그러나, 프로파일 시작점 부근에서의 압력과 유막은 로울러의 길이방향 중앙부에서의 것과는 크게 다르다. Fig. 8은 단면 2-2에서의 압력과 단면 3-3에서의 유막을 나타낸 것이다. Fig. 6의 결과와 같이 로울러의 중앙부에서는 길이 방향으로의 압력과 유막의 기울기가 아주 작다. 그러나, 프로파일 시작점 부근에서는 그림에서와 같이 압력과 유막의 길이방향의 변화가 아주 급격할 뿐만 아니라 그 크기도 중앙부에 비하여 큰 차이를 보인다. 프로파일 시작점 부근에서의 유막은 압력이 최대가 된 후 급격히 작아지기 시작하여 최소유막에 도달한 후 프로파일링으로 인하여 인하여 급격하게 커진다.

Fig. 9는 단면 4-4와 단면 5-5에서의 구름방향의 압력 및 유막을 서로 비교하여 나타낸 것이다. 로울러 길이방향에서의 유막이 최소로 되는 위치에서는 압력이 최대로 되지 않고 최대압력은 그 위치보다 중앙부쪽에 있다. 이는 구름방향의 압력이 최대인 위치에서는 탄성변형량도 그만큼 크기 때문에 유막이 최소로 될 수가 없다. 길이방향의 최대압력이 발생하는 부분에서는 구름방향의 출구측에서의 압력상승이 선명하다. 또, 구름방향으로의 유막은 접촉중앙부에서는 거의 평행하다가 출구측에서 유막의 수축이 생긴 후에 급격하게 증가한다. 이 위치에서의 압력과 유막은 Fig. 7의 로울러 중앙부에서의 압력과 유막과는 그 크기에 있어서 아주 큰 차이가 있다. 즉, 프로파일 시작점 부근에서는 로울러의 중앙부에 비해서 탄성유체윤활 상태가 훨씬 가혹하다. 따라서, 로울러베어링의 설계시에는 이 부분에 대한 정확한 탄성유체윤활해석이 필수적이다. 길이방향으로 압력이 최대로 된 후 측면유출로 인해서 길이방향의 압력이 급격히 감소하면 탄성변형량도 작아지게 되어 유막은 작아지게 된다. 최소 유막은 프로파일 시작점 부근의 구름방향 출구측에

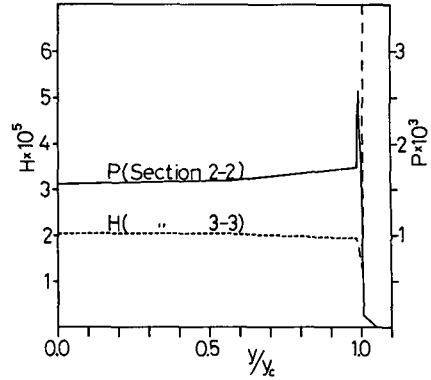


Fig. 8 Axial direction pressure (along section 2-2) and film thickness (along section 3-3). $Y_c=0.7$, $R_c^*=100$, $U=1.0 \times 10^{-11}$, $G=3100$, $W=2 \times 10^{-5}$

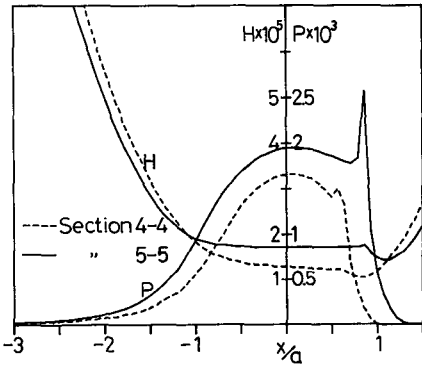


Fig. 9 Pressure and film thickness in direction of rolling $Y_c=0.7$, $R_c^*=100$, $U=1.0 \times 10^{-11}$, $G=3100$, $W=2 \times 10^{-5}$

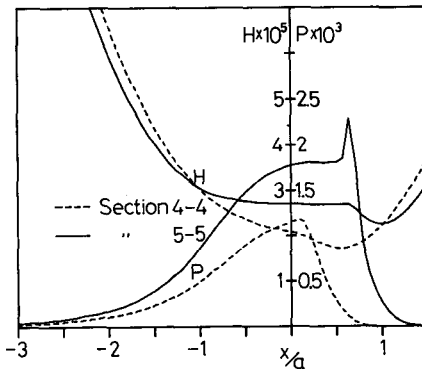


Fig. 10 Pressure and film thickness in direction of rolling $Y_c=0.7$, $R_c^*=100$, $U=1.995 \times 10^{-11}$, $G=3070$, $W=1.775 \times 10^{-5}$

서 발생하며, 그 크기는 로울러의 중앙부 출구측에서의 유막에 비해서 상당히 작다.

Fig. 10은 Mostofi와 Gohar⁽⁹⁾와 동일한 무차원 변수를 사용한 경우의 단면 4-4와 단면 5-5에서의 구름방향의 압력과 유막을 나타낸 것이다. Mostofi와 Gohar의 결과에서는 로울러의 길이방향으로 최대압력과 최소유막이 발생하는 위치가 동일하였다. 이는 앞에서의 설명과 같이 압력과 탄성변형의 관계에 의해서 물리적으로 불가능한 일이며, 단지 수치해석에 있어서 사용한 로울러 길이방향의 절점의 수가 충분하지 못하였거나 프로파일 시작점부근의 절점의 위치가 적절하지 못하였기 때문인 것으로 사료된다. 따라서 본연구에서의 결과가 프로파일 시작점 부근에서의 압력과 유막의 거동을 보다 정확하게 나타내고 있다. 한편, Mostofi와 Gohar의 해석방법에 비하여 동일조건하에서 수렴해를 얻을 수 있는 하중의 범위도 1.85×10^{-5} 으로 보다 크며, 수렴해를 얻기까지의 수치해석방법이 시행착오적인 방법이 아니라 완전히 체계적이다.

이상의 결과에서와 같이 로울러의 프로파일 시작점 부근에서는 로울러의 구름방향 출구측에서 뿐만 아니라 길이방향으로의 압력과 유막의 변화가 아주 크다. 본 연구에서 사용한 절점의 수는 무차원 속도변수와 무차원 재로변수가 각각 1×10^{-11} 과 3100일 경우에 무차원 하중의 수렴한계는 2×10^{-5} 이었다. 이 이상의 하중에 대해서는 프로파일 시작점에 인접한 위치에서의 구름방향 출구측에서의 수렴된 압력형상이 진동하는 형태로 나타나는데 이는 절점의 수가 충분하지 못하기 때문에 생겨나는 결과이다. 따라서, 보다 실제에 가까운 입력조건에 대한 수렴해를 얻기 위해서는 구름방향과 길이방향으로의 분할을 아주 많게 하여야 한다. 그러나, 본 연구에서와 같이 구름방향으로의 분할이 균일한 경우에는 동시에 풀어야 하는 연립방정식의 수가 크게 증대되기 때문에 계산시간과 계산정도면에서 실제적이 아니다. 따라서, 추가적인 연구에서는 로울러의 길이방향뿐만 아니라 구름방향으로의 분할도 불균일하게 하여 로울러의 프로파일 시작점부근에서 보다 실제적인 입력조건에 대한 상세한 해석이 필요하다. 그 결과, 로울러의 프로파일 시작점 부근에서의 탄성유체윤활에 대한 정량적인 결과를 얻을 수가 있을 것으로 기대되고 궁극적으로는 운전 조건에 적합한 최적의 로울러의 길이방향 프로파일을 구할 수 있을 것으로 사료된다.

5. 결 론

프로파일링을 한 원통형 로울러에 대한 탄성유체 윤활해석을 유한차분법과 뉴우튼-랩튼 방법을 사용하여 수행하였다. 이때 윤활유의 압축성을 고려하였으며, 로울러 길이방향으로의 분할이 불균일한 유한차분형태를 사용하여 프로파일 시작점 부근에서의 압력과 유막의 거동에 대한 보다 상세한 해석을 시도하였다. 이 결과 로울러의 길이방향 중앙부에서는 압력 및 유막에 대한 프로파일링으로 인한 측면유출의 영향이 거의 무시할 정도였으나 프로파일 시작점 부근에서는 아주 크게 작용하였다. 최대 압력과 최소유막은 프로파일 시작점부근의 구름방향의 출구측에서 발생하므로 프로파일링을 한 로울러에서는 유한장 해석이 필수적이다. 또한, 본 연구에서 사용한 수치해석방법이 다른 해석방법에 비하여 수치해석과정이 월등히 체계적일 뿐만 아니라 수렴성도 양호하였다. 따라서, 프로파일 시작점 부근의 압력과 유막의 거동에 대한 보다 정확한 해석이 가능하게 되어 로울러베어링의 수명이 최대로 되게 하는 최적의 로울러 프로파일을 구할 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) Oh, K. P. and Trachman, E. G., 1976, "A Numerical Procedure for Designing Profiled Rolling Elements", Trans. ASME, J. of Lub. Tech., Vol. 98, pp. 547~552.
- (2) Heydari, M. and Gohar, R., 1979, "The Influence of Axial Profile on Pressure Distribution in Radially Loaded Rollers", J. of Mech. Eng. Sci., Vol. 21, No. 6, pp. 381~388.
- (3) Tallian, T. E., 1981, "Rolling Bearing Life Modifying Factors for Film Thickness, Surface Roughness and Friction", Trans. ASME, J. of Lub. Tech., Vol. 103, pp. 509~520.
- (4) Dowson, D. and Higginson, G. R., 1966, "Elastohydrodynamic Lubrication", Pergamon Press.
- (5) Wymer, D. G. and Cameron, A., 1974, "Elastohydrodynamic Lubrication of a Line Contact; Part 1: Optical Analysis of a Roller Bearing", Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 188, pp. 221~231; "Part 2: Interferometric and Electrical Film Thickness Measurements", Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 188, pp. 232~238.

- (6) Bahadoran, H. and Gohar, R., 1974, "End Closure in EHL Line Contact," J. of Mech. Eng. Sci., Vol. 16, pp. 276~278.
- (7) Hamrock, B. J. and Dowson, D., 1981, "Ball Bearing Lubrication: The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts", John Wiley & Sons.
- (8) Kuroda, S. and Aria, K., 1985, "Elastohydrodynamic Lubrication between Two Rollers (Finite Width Analysis)", Bull. of JSME, Vol. 28, No. 241, pp. 1367~1372.
- (9) Mostofi, A. and Gohar, R., 1983, "Elastohydrodynamic Lubrication of Finite Line Contacts", Trans. ASME, J of. Lub. Tech., Vol. 105, pp. 598~604.
- (10) 박태조, 김경응, 1987, "유한한 선접촉 탄성유체 윤활문제의 수치해석", 대한기계학회논문집, 제11권, 제 4 호, pp. 579~585.
- (11) Hamrock, B. J. and Tripp, J. H., 1984, "Numerical Methods and Computers Used in Elastohydrodynamic Lubrication," Proc. of the 10th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, pp. 11~19.

부 록

편미분계수 $\frac{\partial f_{ij}}{\partial P_{kl}}$ 을 구하기 위해서 먼저 (14)식의 첫항을 미분하면,

$$\frac{\partial}{\partial P_{kl}} \left\{ \frac{\rho_{i+\frac{1}{2},j} H^3_{i+\frac{1}{2},j}}{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{H^3_{i+\frac{1}{2},j}}{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \frac{\partial \rho_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{kl}} \\ &+ 3 \frac{\rho_{i+\frac{1}{2},j} H^2_{i+\frac{1}{2},j}}{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \frac{\partial H_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{kl}} \\ &+ \frac{\rho_{i+\frac{1}{2},j} H^3_{i+\frac{1}{2},j}}{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} (\delta_{i+1,k} - \delta_{i,k}) \delta_{j,l} \\ &- \frac{\rho_{i+\frac{1}{2},j} H^3_{i+\frac{1}{2},j}}{\eta^2_{i+\frac{1}{2},j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) \frac{\partial \eta_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{kl}} \quad (A-1) \end{aligned}$$

여기서, $\delta_{i,k}$ 는 Kronecker의 Delta로
 $\delta_{i,k} = 1, i = k ; \delta_{i,k} = 0, i \neq k \quad (A-2)$

이며,

$$\frac{\partial P_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{kl}} = 0.3E \left\{ \frac{\delta_{i+1,k}}{1+1.7E P_{i+1,j}} \right\}^2 + \frac{\delta_{i,k}}{(1+1.7E P_{i,j})^2} \delta_{j,l} \quad (A-3)$$

$$\frac{\partial H_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{kl}} = (Dm_{jl} + Dm_{jl})/2, \quad m = |i-k| + 1, m_1 = |i+1-k| + 1 \quad (A-4)$$

$$\frac{\partial \eta_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{kl}} = \frac{1}{2} G \eta_{i+\frac{1}{2},j} (\delta_{i+1,k} + \delta_{i,k}) \delta_{j,l} \quad (A-5)$$

이다. 나머지 항에 대해서도 같은 방법을 적용하면 된다.

한편,

$$\frac{\partial H_{i,j}}{\partial H_o} = 1.0 \quad (A-6)$$

이므로, $\frac{\partial f_{ij}}{\partial H_o}$ 은 (A-1)과 같은 방법으로 유막에 대한 미분만 취하면 된다.