

<論 文>

# 비선형 2자유도계의 비감쇠 강제진동 연구

박철희\* · 박선재\*\* · 윤영석\*\*\*

(1987년 9월 12일 접수)

## A Study on the Undamped Forced Vibration of Nonlinear Two-Degree-of-Freedom Systems

Chol-Hui Pak, Sun-Jae Park and Young-Suk Yun

**Key Words :** Resonance(공진), Normal Mode(정규모우드), Response Curve(응답곡선), Bifurcation Phenomenon(분기현상), Numerical Experiments(수치실험)

### Abstract

The forced vibrations of nondissipative nonlinear two-degree-of-freedom system, subjected to periodic forcing functions, are investigated by use of the method of slowly changing phase and amplitude. The first order differential equations are derived for nonstationary solutions and the coupled nonlinear algebraic equations for stationary solutions. Through investigating the response curves of the system, which are obtained numerically by using Newton-Raphson method, it is found that the resonances can occur at more than the number of degree-of-freedom of the system depending on the relation between the nonlinear spring parameters, which has no counterpart in linear systems.

### 1. 서 론

주기력을 받고 있는 비선형 비감쇠 2자유도 계의 진동을 Slowly Changing Phase and Amplitude 방법(이하 SCPA방법)을 이용하여 해석하였다.

많은 연구가 다자유도 비선형 강제진동 해석을 위하여 행해져 왔으나<sup>(1-6)</sup>, 공진의 수가 그 계의 자유도와 같다는 가정하에서 모든 연구를 수행하였다. 한편, Rosenberg, R.M.<sup>(4)</sup>은 어떤 계가 주기력을 받고 있을 때, 그 계가 선형계이든 비선형계이

든지, 외력의 진동수가 그 계의 고유진동수에 가까이 놓여 있으면 공진이 발생하고 이 공진점 부근에서 그 계는 정규모우드(normal mode)로 진동한다는 사실을 밝혔다. 한편 비선형 자유진동에 관한 지금까지의 연구들에서 그 비선형계에 대한 정규모우드를 그 계의 자유도수 만큼 밖에 구하지 못하였고 따라서 비선형강제진동에 관한 연구도 이것에 국한 될 수 밖에 없었다. 그러나 최근에 비선형 2자유도계의 자유진동에 관한 연구<sup>(7,8)</sup>에서는 harmonic balance방법 및 최소작용원리를 이용하여 정규모우드를 직선으로 가정하여 근사적으로 비선형계의 정규모우드에 관한 연구를 수행한 결과, 일반적인 2자유도 비선형계의 정규모우드는 자유도수 보다 많은 수의 정규모우드가 그 계의 에너지

\* 정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과  
\*\* 정회원, 인하공업전문대학 기계공학과  
\*\*\* 정회원, 인하대학교 대학원

혹은 진폭이 증가함에 따라 분기(bifurcation)되어 존재할 수 있다는 사실을 증명하였다. 따라서 위의 사실들로 부터 비선형계의 공진은 그 계의 자유도 수 보다 더 많은 수가 존재할 수 있을 것으로 예상할 수 있다.

본 연구의 목적은 SCPA방법을 이용한 비선형 2 자유도 비감쇠계의 해석을 통하여 응답곡선을 구하고, 그 응답곡선의 분기현상을 규명함에 있다. 결과의 비교를 위하여 4차의 Runge-Kutta방법을 이용한 수치실험을 수행하였다.

### 2. 비선형 2자유도계

본 연구에서 다루고 있는 계의 수학적 모델은 Fig. 1에 보이는 바와 같이 2개의 질량  $m_1$ 과  $m_2$ 가 질량이 없다고 가정한 한개의 연결 스프링과 두개의 고정 스프링에 연결되어 있는 계를 생각하였다. 스프링 힘들은

$$G_i = k_i \delta + \alpha_i \delta^3, \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

이고, 여기서  $\delta$ 는 스프링이 늘어나지 않은 곳으로부터의 길이이다. 이 계에 가해지는 주기적인 외력  $Q_j(t)$ 는

$$Q_j(t) = P_j \cos \Omega t, \quad (j=1, 2) \quad (2)$$

이며, 여기서  $\Omega$ 는 외력의 진동수,  $P_j$ 는 외력의 크기,  $t$ 는 시간이다.

이와같은 계의 운동에너지  $T$ 는

$$T = 1/2(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) \quad (3)$$

이고, 위치에너지  $V$ 는

$$V = 1/2(k_1 x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3 x_2^2) + 1/4(\alpha_1 x_1^4 + \alpha_2(x_2 - x_1)^4 + \alpha_3 x_2^4) \quad (4)$$

이며, 다음과 같은 성질들을 갖는다.

$$(1) V(0, 0) = 0, \quad V(x_1, x_2) > 0$$

$$(2) V(x_1, x_2) = V(-x_1, -x_2).$$

이때 이계의 운동방정식은 다음과 같은 비선형미분방정식

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2(x_1 - x_2)^3 = P_1 \cos \Omega t \quad (5)$$

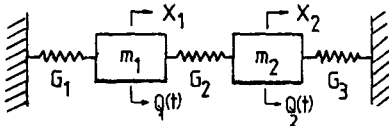


Fig. 1 Nonlinear two degree-of-freedom system

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 + \alpha_3 x_2^3 - \alpha_2(x_1 - x_2)^3 = P_2 \cos \Omega t$$

이 된다.

### 3. SCPA 방법에 의한 해석

식(5)의 해를 다음과 같이 가정하자,

$$x_1(t) = a(t) \cos [\Omega t + \beta_1(t)] \quad (6)$$

$$x_2(t) = -b(t) \cos [\Omega t + \beta_2(t)]$$

$$\dot{x}_1(t) = b(t) \Omega \sin [\Omega t + \beta_1(t)] \quad (7)$$

$$\dot{x}_2(t) = -b(t) \Omega \sin [\Omega t + \beta_2(t)]$$

식(6)을 시간  $t$ 에 대해서 미분한 후, 식(7)과 비교하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \dot{a}(t) \cos [\Omega t + \beta_1(t)] - a(t) \dot{\beta}_1(t) \\ & \times \sin [\Omega t + \beta_1(t)] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \dot{b}(t) \cos [\Omega t + \beta_2(t)] - b(t) \dot{\beta}_2(t) \\ & \times \sin [\Omega t + \beta_2(t)] = 0 \end{aligned}$$

을 얻게되고, 식(7)을 시간  $t$ 에 대해서 미분한 후 식(6)과 함께 식(5)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} & m_1 [-\dot{a}(t) \Omega S^* - a(t) \Omega (\Omega + \dot{\beta}_1(t)) C^*] \\ & + (k_1 + k_1) a(t) C^* - k_2 b(t) C^{**} + \alpha_1 a^3(t) \\ & \times C^{**} + \alpha_2 [a(t) C^* - b(t) C^{**}]^3 = P_1 \cos \Omega t \\ & m_2 [-\dot{b}(t) \Omega S^{**} - b(t) \Omega (\Omega + \dot{\beta}_2(t)) C^{**}] \\ & + (k_2 + k_3) b(t) C^{**} - k_2 a(t) C^* - \alpha_2 [a(t) \\ & \times C^* - b(t) C^{**}]^3 + \alpha_3 b^3(t) C^{**} = P_2 \cos \end{aligned} \quad (9)$$

을 얻을 수 있다. 여기서

$$C^* = \cos [\Omega t + \beta_1(t)],$$

$$C^{**} = \cos [\Omega t + \beta_2(t)],$$

$$S^* = \sin [\Omega t + \beta_1(t)],$$

$$S^{**} = \sin [\Omega t + \beta_2(t)]$$

이다. 식(8)과 식(9)에 대해서 수학적인 계산과정을 거치면

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= F_1[a(t), b(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \Omega t] \\ \dot{b}(t) &= F_2[a(t), b(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \Omega t] \\ \dot{\beta}_1(t) &= F_3[a(t), b(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \Omega t] \\ \dot{\beta}_2(t) &= F_4[a(t), b(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \Omega t] \end{aligned} \quad (10)$$

을 얻는다. 식(10)에서 변수  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ 가 모두 시간  $t$ 의 함수이기 때문에 이식을 그대로 풀다는 것은 매우 어렵다. 그러므로 외력  $Q_j(t)$ 를 작은 값이라고 가정하면, 시간 변화에 대해서 이 값이 서서히 변화될 것이고, 따라서  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\beta_2(t)$ 도 시간의 변화에 대해서 그 값

들의 변화가 느리게 될 것이다. 이와같은 가정을 이용해서 식(10)을 시간  $t$ 에서  $t+T$ (여기서  $T=2\pi/\Omega$ ) 동안 temporal mean

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(a, b, \beta_1, \beta_2, \Omega t) d(\Omega t) \\ \dot{b}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(a, b, \beta_1, \beta_2, \Omega t) d(\Omega t) \\ \dot{\beta}_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3(a, b, \beta_1, \beta_2, \Omega t) d(\Omega t) \\ \dot{\beta}_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_4(a, b, \beta_1, \beta_2, \Omega t) d(\Omega t)\end{aligned}\quad (11)$$

을 취하면 다음과 같은 4개의 일차미분방정식을 얻을 수 있게된다.

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) &= -\frac{1}{2} \frac{P_1}{m_1 \Omega} \sin \beta_1 - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{m_1} \right) \left( \frac{b}{\Omega} \right) \\ &\quad \times \sin(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\alpha_2}{m_1 \Omega} \left[ -\frac{3}{8} a^2 b \sin(\beta_1 \right. \\ &\quad \left. - \beta_2) + \frac{3}{8} a b^2 \sin 2(\beta_1 - \beta_2) - \frac{3}{8} b^3 \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\beta_1 - \beta_2) \right] \\ \dot{b}(t) &= -\frac{1}{2} \frac{P_2}{m_2 \Omega} \sin \beta_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{m_2} \right) \left( \frac{a}{\Omega} \right) \\ &\quad \times \sin(\beta_2 - \beta_1) - \frac{\alpha_2}{m_2 \Omega} \left[ \frac{3}{8} a^3 \sin(\beta_1 - \beta_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{8} a^2 b \sin 2(\beta_2 - \beta_1) + \frac{3}{8} \sin(\beta_2 - \beta_1) a b^2 \right] \\ \dot{\beta}_1(t) &= -\frac{1}{2} \frac{P_1}{m_1 a \Omega} \cos \beta_1 - \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\Omega} + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha_1}{m_1} \right) \left( \frac{a^2}{\Omega} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{m_1} \right) \left( \frac{b}{a} \right) \frac{1}{\Omega} \\ &\quad \times \cos(\beta_2 - \beta_1) + \frac{\alpha_2}{m_1 a \Omega} \left[ \frac{3}{8} a^3 - \frac{9}{8} a^2 b \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\beta_2 - \beta_1) + \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \cos 2(\beta_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_1) \right\} a b^2 - \frac{3}{8} b^3 \cos(\beta_2 - \beta_1) \right] \quad (12) \\ \dot{\beta}_2(t) &= -\frac{1}{2} \frac{P_2}{m_2 b \Omega} \cos \beta_2 - \frac{\Omega}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) \frac{1}{\Omega} + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha_3}{m_2} \right) \left( \frac{b^2}{\Omega} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{m_2} \right) \left( \frac{a}{b} \right) \frac{1}{\Omega} \cos(\beta_2 - \beta_1) \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{m_2 b \Omega} \left[ \frac{3}{8} a^3 \cos(\beta_2 - \beta_1) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \cos 2(\beta_2 - \beta_1) \right\} a b^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} a b^2 \cos(\beta_2 - \beta_1) - \frac{3}{8} b^3 \right]\end{aligned}$$

식(12)가 식(11)과 다른 점은 식(11)의 우변항에는 시간  $t$ 의 함수가 들어있지만, 식(12)의 우변에는 시간  $t$ 가 명백하게 들어가 있지 않은 방정식들의 autonomous계라는 점이다. 식(12)는 Runge-Kutta방법과 같은 수치적인 적분방법으로 임의의 초기 조건들 하에서의 non-stationary solution을 구할 수 있는 식이다.

한편 이 계의 stationary solution을 얻기 위해서는 식(12)에서

$$\dot{a}(t) = \dot{b}(t) = \dot{\beta}_1(t) = \dot{\beta}_2(t) = 0 \quad (13)$$

로 놓고

$$a = A, \quad b = B, \quad \beta_1 = \beta_{1s}, \quad \beta_2 = \beta_{2s}$$

로 하면, 식(12)로부터 다음과 같은 비선형 대수연립방정식을 얻게된다.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \frac{P_1}{m_1 \Omega} \sin \beta_{1s} - \frac{1}{2} \frac{k_2 B}{m_1 \Omega} \sin(\beta_{1s} - \beta_{2s}) \\ + \frac{\alpha_2}{m_1 \Omega} \left[ -\frac{3}{8} A^2 B \sin(\beta_{1s} - \beta_{2s}) \right. \\ + \frac{3}{8} A B^2 \sin 2(\beta_{1s} - \beta_{2s}) \\ \left. - \frac{3}{8} B^3 \sin(\beta_{1s} - \beta_{2s}) \right] = 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{P_2}{m_2 \Omega} \sin \beta_{2s} - \frac{1}{2} \frac{k_2 A}{m_2 \Omega} \sin(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \\ - \frac{\alpha_2}{m_2 \Omega} \left[ \frac{3}{8} A^3 \sin(\beta_{1s} - \beta_{2s}) \right. \\ - \frac{3}{8} A^2 B \sin 2(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \\ \left. + \frac{3}{8} \sin(\beta_{2s} - \beta_{1s}) A B^2 \right] = 0 \quad (14) \\ -\frac{1}{2} \frac{P_1}{m_1 A \Omega} \cos \beta_{1s} - \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) \frac{1}{\Omega} \\ + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha_1}{m_1} \right) \left( \frac{A^2}{\Omega} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{m_1} \right) \left( \frac{B}{A} \right) \frac{1}{\Omega} \cos(\beta_{2s} \\ - \beta_{1s}) + \frac{\alpha_2}{m_1 A \Omega} \left[ \frac{3}{8} A^3 - \frac{9}{8} A^2 B \cos(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \cos 2(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \right\} A B^2 \right. \\ \left. - \frac{3}{8} B^3 \cos(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \right] = 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{P_2}{m_2 B \Omega} \cos \beta_{2s} - \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) \frac{1}{\Omega} \\ + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha_3}{m_2} \right) \left( \frac{B^2}{\Omega} \right) \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{m_2} \right) \left( \frac{A}{B} \right) \frac{1}{\Omega} \cos(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \\ - \frac{\alpha_2}{m_2 B \Omega} \left[ \frac{3}{8} A^3 \cos(\beta_{2s} - \beta_{1s}) \right.\end{aligned}$$

$$-\left\{\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\cos 2(\beta_{2s} - \beta_{1s})\right\}A^2B + \frac{9}{8}AB^2\cos(\beta_{2s} - \beta_{1s}) - \frac{3}{8}B^3 = 0$$

이 식(14)는 더 이상 미분방정식의 형태가 아니라 대수방정식의 형태를 취하고 있음을 주지하라. 이 대수방정식을 풀면 이계의 stationary solution을 얻을 수 있게된다.

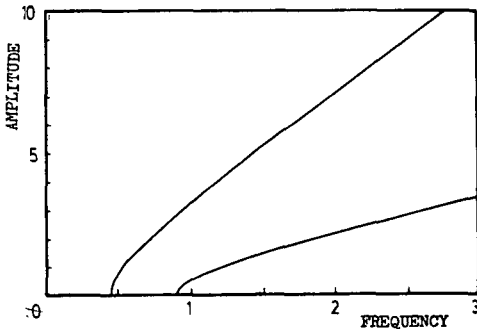
#### 4. 비선형 정규모우드 자유진동과 Skeleton Curve

식(14)에서  $P_1 = P_2 = 0$ 으로 놓으면, 다음과 같은 비선형 2자유도계의 자유진동을 해석할 수 있는 식이 된다.

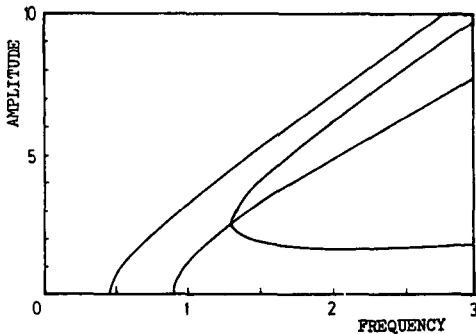
$$\sin(\beta_{1s} - \beta_{2s}) = 0 \tag{15}$$

그리고

$$\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \Omega^2\right)A - \left(\frac{k_2}{m_1}\right)B + \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_1}{m_1}\right)A^3$$



(a) Skeleton curve in the case that  $m_1 = m_2 = 1, k_1 = k_3 = 0.2, k_2 = 0.3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$ .



(b) Skeleton curve in the case that  $m_1 = m_2 = 1.0, k_1 = k_3 = 0.2, k_2 = 0.3, \alpha_1 = \alpha_3 = 0.1, \alpha_2 = 0.01$ .

Fig. 2 Skeleton curves

$$+\frac{3}{4}\frac{\alpha_2}{m_1}(A-B)^3=0$$

$$\left(\frac{k_2+k_3}{m_2} - \Omega^2\right)B - \left(\frac{k_2}{m_2}\right)A + \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_3}{m_2}\right)B^3$$

$$-\frac{3}{4}\frac{\alpha_2}{m_2}(A-B)^3=0 \tag{16}$$

를 얻는다. 식(16)은 2자유도 비선형 정규모우드(normal mode) 자유진동의 식<sup>(7)</sup>과 동일한 결과이며, 만일 이 계가 대칭계( $m_1 = m_2, \alpha_1 = \alpha_3, k_1 = k_3$ )라면,  $\alpha_1 > 4\alpha_2$ 일 때, 그 계의 전체 에너지 또는 진폭이 증가함에 따라서 정규모우드의 분기현상이 발생한다. 또한 그 계가 대칭계가 아니라도 분기현상이 일어날 수 있다<sup>(7,8)</sup>. 식(16)을  $\Omega$ 에 대해서 풀면 skeleton curve를 얻게된다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 대칭계에서  $\alpha_1 > 4\alpha_2$ 이면, skeleton curve가 분기되어 있는 것을 볼 수 있으며, 선형계와는 달리 비선형계의 특징 중에 하나인 그 계의 공진진동수가 진폭의 변화에 따라 선형계와 같이 일정하지 않고 변화한다는 사실을 보여주고 있다. 강제진동의 응답은 일반적으로 이와같은 skeleton curve를 중심으로 나타나고 있으므로, 경우에 따라서 공진이 2개 이상 발생할 수 있을 가능성을 Fig. 2(b)에서 보여 주고 있다.

#### 5. 2자유도 비감쇠 강제진동의 예

식(14)의 비선형 대수연립방정식을 Newton-Raphson방법을 이용하여 풀어서 응답곡선들을 구하였다.

[예제 1] (선형 비감쇠 강제진동)

계의 파라미터들의 값들이

$$m_1 = m_2 = 1, k_1 = k_3 = 0.2, k_2 = 0.3,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, P_1 = 1, P_2 = 0$$

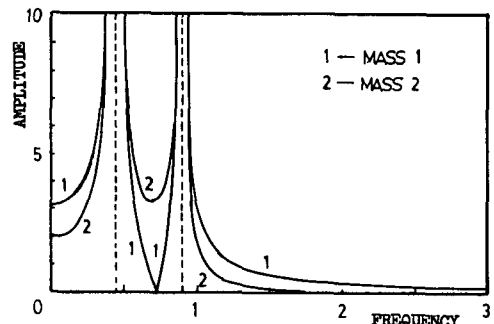
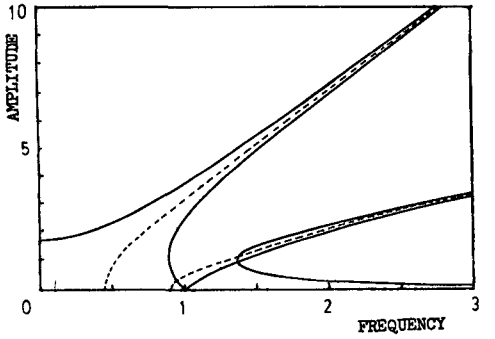
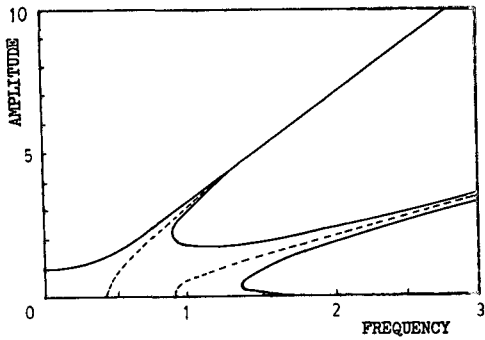


Fig. 3 Response curves of linear system

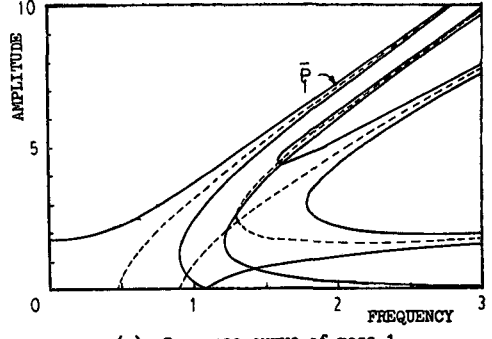


(a) Response curve of mass 1

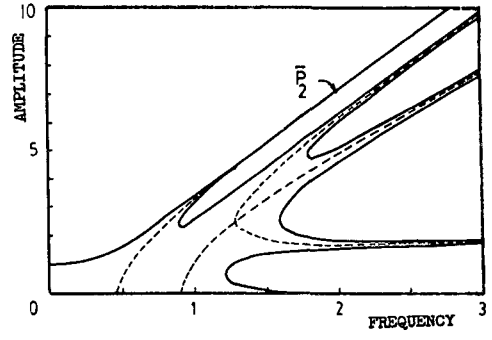


(b) Response curve of mass 2

Fig. 4 Response curves of nonlinear system



(a) Response curve of mass 1



(b) Response curve of mass 2

Fig. 5 Response curves of nonlinear system

일때, 외력의 진동수 변화에 따른 계의 응답을 구한 결과를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 첨자 1 과 첨자 2는 각각 질량  $m_1$ 과  $m_2$ 의 진폭을 나타내고 있으며, 그 계의 자유도와 같은 수의 공진이 존재함을 보여 주고 있다.

[예제 2] (비선형 비감쇠 강제진동-분기현상이 발생하지 않는 경우)

비선형계의 파라미터들이 다음과 같은 값들

$$m_1 = m_2 = 1, k_1 = k_3 = 0.2, k_2 = 0.3,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1, P_1 = 1, P_2 = 0$$

을 가질때는 자유진동에서 정규모우드의 분기현상이 발생하지 않는 경우에 해당한다. 이 때의 응답곡선을 구해보면 Fig. 4와 같다. Fig. 4에서 실선은 응답곡선을 점선은 이 계의 skeleton curve를 나타낸다. 이 경우에는 공진이 2개 존재함을 볼 수 있다. 만일 이 계에 감쇠력이 존재하게 된다면, 이 계의 운동은 공진점에서 진폭이 유한한 값을 갖게 될 것이고, 외력의 진동수가 증가함에 따라 최대 2번의 jump현상이 발생할 수 있을 것으로 예상된다.

[예제 3] (비선형 비감쇠 강제진동-분기현상이 발생하는 경우)

다음과 같은 파라미터들의 값들

$$m_1 = m_2 = 1, k_1 = k_3 = 0.2, k_2 = 0.3$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 0.1, \alpha_2 = 0.01, P_1 = 1, P_2 = 0$$

을 가지고 있는 비선형계를 살펴보자. 계의 파라미터들의 값들이 이와같은 경우에는 비선형자유진동에서 분기현상이 발생하는 경우에 해당한다<sup>(7,8)</sup>. 이 경우에 대한 응답곡선을 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5를 관찰해 보면 점선은 이 계의 skeleton curve를 실선은 응답곡선을 각각 나타내고 있으며, skeleton curve를 중심으로 4개의 공진이 발생하고 있는 것을 알 수 있다. 이를 통하여 비선형계의 자유도가 2이지만 그 보다 많은 수의 공진이 있다는 것을 보여 주고 있다. 또한 이와 같은 응답곡선을 통하여 만일 계가 감쇠력을 포함하고 있다면, 각각의 공진점에서의 진폭은 유한한 값을 갖게 될 것이고 결국 외력의 진동수 변화에 따라서 1번 이상 4번까지의 jump현상이 발생할 가능성을 예측할 수 있다.

6. 수치 실험

4차의 Runge-Kutta방법을 이용하여 식(5)를 수치적으로 풀어서 시간의 변화에 따른 변위와 속도

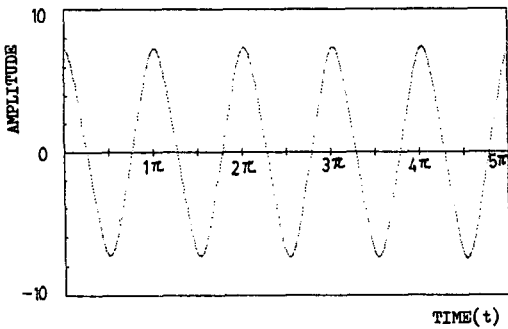


Fig. 6 Time history of mass 1 in the case that  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = k_3 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.01$ ,  $P_1 = 1$ , and  $P_2 = 0$  with the initial conditions  $x = 7.2417$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $y = 7.1227$ , and  $\dot{y} = 0$  at the point  $\bar{P}_1$ , in Fig. 5 (a) when  $Q = 2$ .

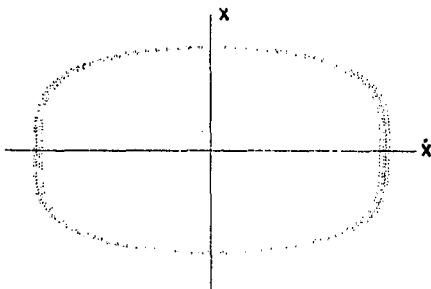


Fig. 7 Phase diagram of mass 1 under the same condition in Fig. 6

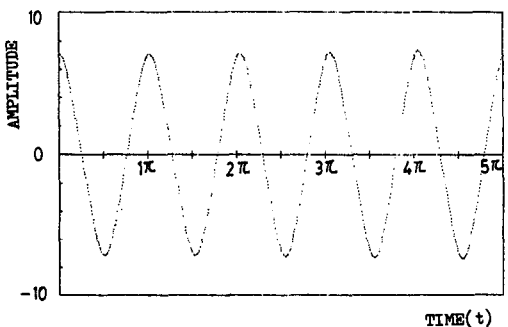


Fig. 8 Time history of mass 2 in the case that  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = k_3 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.01$ ,  $P_1 = 1$ , and  $P_2 = 0$  with the initial conditions  $x = 7.2417$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $y = 7.1227$ , and  $\dot{y} = 0$  at the point  $\bar{P}_2$  in Fig. 5 (b) when  $Q = 2$ .

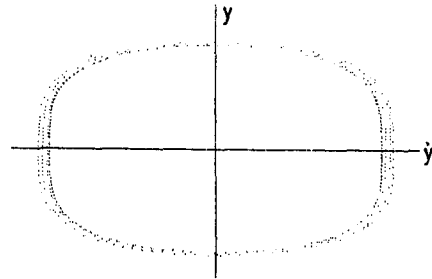


Fig. 9 Phase diagram of mass 2 under the same condition in Fig. 8

를 구하였다. 이때 초기조건으로는 해석적 방법에서 얻은 stationary solution을 이용하여 time history (Fig. 6, 8)와 phase diagram (Fig. 7, 9)을 도시하였다. Phase diagram에서 만일 주기해가 존재한다면 closed loop를 형성한다. Fig. 7을 살펴보면 bound된 loop가 형성되어 있는 것을 볼 수 있다. 이는 이 계에 감쇠가 존재하지 않기 때문에 자유진동에 의한 영향이 계속해서 잔류하는 almost periodic solution<sup>(9)</sup>이 존재하기 때문인 것으로 보인다. 만일 이 계에 감쇠력이 포함된다면 과도해는 시간이 경과해 감에 따라 감쇠가 진행되어 이와같은 과도해의 영향이 소멸되어 주기해가 얻어질 것으로 판단된다.

7. 결과 및 고찰

(1) SCPA방법을 이용하여 비선형 2자유도계의 공진이 계의 자유도 수 보다 많이 있을 수 있다는 것을 보였다.

(2) 응답곡선들의 고찰을 통하여 만일 계에 감쇠가 존재한다면 비선형계의 특징 중에 하나 인 jump현상이 그 계의 자유도 수 보다 많이 발생할 수 있다는 가능성을 보였다.

(3) 이와같은 공진의 분기현상도 비선형 계의 운동에 존재하는 여러 예측 불허한 현상 중에 하나일 것으로 판단된다.

(4) 현재까지로는 비선형 2자유도 계의 강제운동에 대한 주기해의 존재가 명확하게 규명되어 있지 않은 상태이므로, 이에 대한 보다 많은 연구가 행해져야 할 것이다.

참 고 문 헌

(1) Arnold, F.R., 1955, "Steady-State Behavior of

- Systems Provided with Nonlinear Dynamic Vibration Absorbers", *J. of Applied Mech.*, Vol. 77, pp. 487~492.
- (2) Huang, T.C., 1955, "Harmonic Oscillations of Nonlinear Two-Degree-of-Freedom Systems", *J. of Applied Mech.*, Vol. 22, pp. 107~110.
- (3) Rosenberg, R.M., 1966, "Steady-State Vibrations", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 1, pp. 95~108.
- (4) Rosenberg, R.M. and Kinney, W., 1966, "On Steady-State Harmonic Vibrations of Nonlinear Systems with Many Degrees of Freedom", *J. of Appl. Mech.* Vol. 33, pp. 406~412.
- (5) Sethna, P.R., 1960, "Steady-State Undamped Vibrations of a Class of Nonlinear Discrete Systems", *J. of Applied Mech.*, Vol. 27, pp. 187~195.
- (6) Szemplinska-Stupnicka, W., 1975, "A Study of Main and Secondary Resonances in Nonlinear Multi-degree-of-Freedom Vibrating Systems", *Int. J. of Nonlinear Mech.*, Vol. 10, pp. 289~304.
- (7) Shin, H.J. and Pak, C.H., 1985, "On the Behaviors and Bifurcations of Nonlinear Normal Modes by Harmonic Balance Method", *대한기계학회 추계 학술대회 초록집*, pp. 313~317.
- (8) Pak, C.H. and Yun, Y.S., 1985, "An Approximate Method to find the Nonlinear Normal Modes by the Principle of Least Action", *대한기계학회 춘계 학술대회 초록집*, pp. 194~198.
- (9) Hayashi, C., 1984, "Nonlinear Oscillations in Physical Systems", McGraw-Hill, NewYork.
- (10) Kim, S.Y., 1987, "On Forced Vibrations on Nonlinear Coupled Oscillators", Thesis for M.S. Degree, Inha University.
- (11) Hagedorn, P., 1981, "Non-linear Oscillations", Oxford University Press.