

<論 文>

근사직교 경계고정곡선좌표계를 사용한 수치적 격자생성

맹 주 성* · 신 중 균**

(1987년 12월 26일 접수)

The Numerical Grid Generation Using the Nearly Orthogonal Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems

Joo Sung Maeng and Jong Kyun Shin

Key Words ; Numerical Grid Generation(수치적 격자생성), Nearly Orthogonal Boundary-Fitted Coordinate System(근사직교 경계고정좌표계)

Abstract

In the present study, a new method of generating a nearly orthogonal boundary-fitted coordinate systems with automatic grid spacing control is introduced. Applications of the method to a two dimensional simply-connected region is then demonstrated. The nearly orthogonal boundary-fitted method has the following features, (a) Strong grid control in the η -direction can be made, (b) The generated boundary-fitted coordinates are nearly orthoronal, (c) Both the ξ -and η -direction control function are mathematically derived. Especially the η -direction control function is derived under the assumption that the η -direction grid spacing is by far smaller than the ξ -direction grid spacing when the η -direction grid line is strongly clustered. (d) The grid control functions are dynamically adjusted by the metric scale factors imposed on the boundary. The control function is fully automatic and eliminates the need of user manipulation of the control function.

기 호 설 명

- F_1, F_2 : 경계고정곡선좌표계에서 ξ, η 방향의 제어함수
- g : Jacobian의 제곱
- g_{22}, g_{11}, g_{12} : 좌표변환의 Geometric Tensor
- J : 좌표변환의 Jacobian
- X, Y : 직각좌표
- ξ, η : 경계고정곡선좌표
- $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$: 실제영역에서의 경계들
- $\Gamma_1^*, \Gamma_2^*, \Gamma_3^*, \Gamma_4^*$: 계산영역에서의 경계들
- ϵ, η : ξ, η 좌표에 대한 미분

1. 서 론

일반적으로 임의의 영역에서 유동현상을 수치해석에 의해 규명하려고 할 때 우리는 그 영역을 미소요소로 나누어 이산화(discretization)한 후 유동현상을 지배하는 편미분방정식을 일련의 차분 방정식이나 국부해석해에 의해서 근사화하여 그 결과로써 생기는 대수연립방정식을 풀게 된다. 그리고 그 결과, 영역내의 각 격자점에서 종속 변수의 이산화된(discretized) 값들을 얻게 된다.

그런데 수치해석 대상영역을 격자로 나누어 이산화할 때 어떤 좌표계를 선택하는 것이 해를 정확하고 효과적으로 구할 수 있느냐 하는 것은 근본적으

*정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

**한양대학교 대학원

로 문제의 기하학적 형상에 달려있다. 그래서 현재의 추세는 문제의 영역을 격자로 나눌 때 직각좌표계나 극좌표계 같은 기초적인 좌표계보다는 좌표선이 영역의 경계 또는 형상에 일치함으로써 경계 보간 등이 필요없고 보다 정확하고 효율적으로 수치해를 구할 수 있는 경계고정좌표계를 사용하는 것이다.

또한 일반적인 컴퓨터 코드(code)의 개발이라는 견지에서 볼 때 복잡하고 불규칙적인 경계를 가지는 영역에서는 해석대상영역을 이산화하고 지배방정식의 수치해를 구하는 것이 장황하고 지루한 과정이다. 그러나 경계고정좌표계를 사용하면 임의 형상의 경계를 가지는 영역에서 유동현상의 수치해를 구하는 것이 가능하며 물리적 형태와 경계만을 입력으로서 변화시켜주면 되는 일반적인 컴퓨터 코드를 개발할 수 있게 된다.

경계고정좌표계는 앞에서 설명한 이유로서 많은 관심의 대상이 되어왔고 그 결과 경계고정좌표계를 생성하는 다양한 방법들이 연구 개발되어 있다. 그러나 가장 대표적인 방법중의 하나로서 Thompson 등⁽¹⁾에 의해 처음으로 제시되어 많은 발전을 거듭한 타원형 편미방에 의한 격자생성법만 보더라도 격자선의 직교성, 격자간격의 조정 등에서 많은 개선의 여지가 남아있는 형편이다.

따라서 본 연구에서는 제어함수를 수식으로부터 유도하여 자동적인 격자간격제어가 가능한 "근사직교 경계고정곡선좌표계"를 생성하는 새로운 방법을 제시하여 2차원영역에 대한 그 적용을 논의하고자 한다.

2. 경계고정곡선좌표계

근사직교 경계고정곡선좌표계의 생성방법을 논의하기에 앞서 경계고정곡선좌표계 전반에 걸쳐 간단히 고찰하는 것이 필요하다.

경계고정곡선좌표계는 수치해석대상영역을 규정하는 경계의 모든 부분들이 특정좌표선과 일치하는 곡선좌표계를 일컫는다. 수치해석대상영역을 실제영역(physical region), 계산을 수행하는 정규영역을 계산영역(computational region) 또는 변환영역(transformed region)이라 하며 두 영역의 격자점은 Fig. 1과 같이 일대일 사상에 의해 대응한다.

경계고정좌표계의 생성은 실제영역에서의 경계값 문제(boundary value problem)에 의한 경우와 변

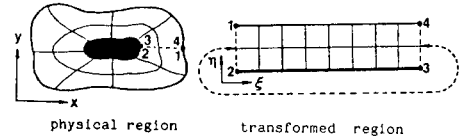


Fig. 1 One to one mapping between physical space and transformed space

환영역에서의 경계값문제에 의한 경우가 있는데 문제의 간편성 때문에 보통 후자를 사용한다.

변환영역의 좌표를 ξ 와 η , 실제영역의 좌표를 X 와 Y 라 할 때 변환영역에서의 경계값문제에 의한 경계고정좌표계의 생성은 변환영역의 직사각형 경계 위에서 규정된 경계값 $X(\xi, \eta)$ 와 $Y(\xi, \eta)$ 로부터 (ξ, η) 좌표로 정의된 변환영역의 격자점에 대응하는 실제영역상의 격자점 (x, y) 를 계산하는 것이다.

경계값으로부터 경계고정곡선좌표계를 생성하는 방법에는 여러가지가 있다. 즉 (a) 대수적 관계를 사용한 경계값 사이의 보간에 의해 생성하는 방법^(2~4)과 (b) 편미분방정식의 수치해에 의해 생성하는 방법^(5~9) 등이 있다. 경계고정좌표계를 편미분방정식에 의해 생성할 때 사용되는 편미분방정식의 형은 경계조건에 따라 타원형(elliptic)이 되기도 하며 쌍곡선형(hyperbolic)이 되기도 한다.

대수적 방법은 간단하고 단순하나 일대일 사상, 격자선의 평활성, 격자선의 직교성 등 경계고정곡선좌표계가 만족하면 좋은 성질을 충족시키기가 어려운 단점이 있다.

3. 근사직교 경계고정곡선좌표계

3.1 격자생성 타원형 방정식의 유도

2차원영역에 대하여 격자생성방정식을 계산영역 (ξ, η) 에서의 Laplace방정식으로 식(1)와 같이 가정하고

$$\nabla^2 X = 0 \quad (1a)$$

$$\nabla^2 Y = 0 \quad (1b)$$

여기서 $\nabla^2 = \text{Div} \cdot \text{Grad}$

식(1)를 일반적인 곡선좌표계 (ξ, η) 에서 전개하면 식(2)와 같다.

$$g_{22} X_{\xi\xi} - 2g_{12} X_{\xi\eta} + g_{11} X_{\eta\eta} + g \nabla^2 \xi X_{\xi} + g \nabla^2 \eta X_{\eta} = 0 \quad (2a)$$

$$g_{22} Y_{\xi\xi} - 2g_{12} Y_{\xi\eta} + g_{11} Y_{\eta\eta} + g \nabla^2 \xi Y_{\xi} + g \nabla^2 \eta Y_{\eta} = 0 \quad (2b)$$

여기서

$$g_{11} = X_\xi^2 + Y_\xi^2 \quad (3a)$$

$$g_{12} = X_\xi X_\eta + Y_\xi Y_\eta \quad (3b)$$

$$g_{22} = X_\eta^2 + Y_\eta^2 \quad (3c)$$

$$g = J^2 \quad (J = \text{Jacobian}) \quad (3d)$$

일반적으로 g_{ij} 는 Metric Tensor의 성분이며 다음 관계에 따라 임의 선소의 길이를 정의한다.

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (4)$$

영역내에서 격자들이 직교한다면, 즉 직교곡선좌표계의 경우,

$$g_{12} = 0$$

$$g = g_{11}g_{22}$$

$$g \nabla^2 \xi = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right) = \sqrt{g_{11}g_{22}} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_\xi \quad (5a)$$

$$g \nabla^2 \eta = \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right) = \sqrt{g_{11}g_{22}} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right)_\eta \quad (5b)$$

따라서 ξ, η 가 직교곡선좌표계라면 식(2)는 다음과 같이 된다.

$$g_{22} X_{\xi\xi} + g_{11} X_{\eta\eta} + F_1 X_\xi + F_2 X_\eta = 0 \quad (6a)$$

$$g_{22} Y_{\xi\xi} + g_{11} Y_{\eta\eta} + F_1 Y_\xi + F_2 Y_\eta = 0 \quad (6b)$$

여기서

$$F_1 = \sqrt{g_{11}g_{22}} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_\xi \quad (7a)$$

$$F_2 = \sqrt{g_{11}g_{22}} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right)_\eta \quad (7b)$$

식 (6)의 해는 F_1, F_2 의 선택과 규정된 경계조건에 따라 다양한 좌표계를 생성하게 된다. 식 (6)에 의해 생성된 격자는 영역내에서는 직교이며 Dirichlet경계조건을 가지는 경계에서는 대략적으로 직교한다. 식 (7)의 제어함수 F_1, F_2 의 규정에 있어서 특이한 점은 제어함수를 곡선좌표계의 tensor 연산과정으로부터 수학적으로 유도한다는 것이다.

3.2 제어함수의 수정

Fig. 2와 같은 물체근처에서 난류유동해석시 벽 함수(wall function) 등을 적용하려면 η 방향격자선을 물체 가까이로 바짝 끌어들이야 하는데 이를 위해 η 방향의 제어함수 F_2 를 수정한다.

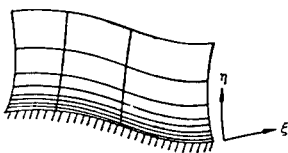


Fig. 2 Grid clustered near the body

F_2 를 수정하는데 있어서 기본가정은 밀집이 요구되는 영역내에서 경계근처의 η 방향 격자간격이 ξ 방향 격자간격보다 훨씬 작다는 것이다. 위 가정이 만족되는 영역에서 다음 관계가 성립한다.

$$X_\eta^2 + Y_\eta^2 \ll X_\xi^2 + Y_\xi^2$$

즉

$$g_{22} \ll g_{11} \quad (8)$$

그때 식 (8)을 사용해서 식 (6)을 근사화 하면,

$$g_{11} X_{\eta\eta} + F_1 X_\xi + F_2 X_\eta = 0 \quad (9a)$$

$$g_{11} Y_{\eta\eta} + F_1 Y_\xi + F_2 Y_\eta = 0 \quad (9b)$$

식 (9)를 F_2 에 대하여 연립하여 풀면,

$$F_2 = g_{11} R$$

여기서

$$R = \frac{Y_\xi X_{\eta\eta} - X_\xi Y_{\eta\eta}}{X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi} \quad (10)$$

결과적으로 본 연구에서 근사직교 경계고정좌표계를 생성하기 위해 수치해석할 생성방정식과 제어함수는 다음과 같다.

$$g_{22} X_{\xi\xi} + g_{11} X_{\eta\eta} + F_1 X_\xi + F_2 X_\eta = 0 \quad (11a)$$

$$g_{22} Y_{\xi\xi} + g_{11} Y_{\eta\eta} + F_1 Y_\xi + F_2 Y_\eta = 0 \quad (11b)$$

$$F_1 = \sqrt{g_{11}g_{22}} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_\xi \quad (12a)$$

$$F_2 = g_{11} R \quad (12b)$$

$$R = (Y_\xi X_{\eta\eta} - X_\xi Y_{\eta\eta}) / (X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi) \quad (12c)$$

식 (11)과 식 (12)에 의해서 격자생성을 할 때 영역내에서 ξ 방향의 제어함수는 F_1 이고 η 방향의 제어함수인 F_2 는 R 과 g_{11} 의 곱으로 이루어지는데 R 은 사용자가 원하는 대로 규정한 η 방향의 격자분포를 가진 경계로부터 근사적으로 계산되는 값이고 g_{11} 은 주어진 Dirichlet 경계조건과 실제영역 내부의 필요한 격자간격에 일치하는 Geometric Tensor의 성분이므로 F_2 는 이 두 값에 의해서 국부적으로 조정된다는 것을 알 수 있다.

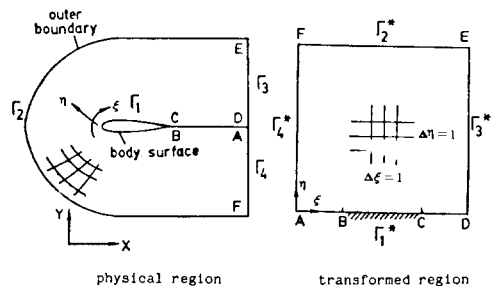


Fig. 3 Boundary conditions in grid generation of airfoil

3.3 경계조건

변환영역에서의 경계조건은 에어포일(airfoil)의 경우 다음과 같다.

- Γ_1^* : 물체, 즉 에어포일의 기하학적 데이터에 의해 규정되는 X, Y
- Γ_2^* : Outer boundary에서 규정되는 X, Y (그러나 X 는 Neumann 경계조건일 수도 있다.)
- Γ_3^*, Γ_4^* : 사용자가 원하는 η 방향의 격자간격을 규정하고 있는 X, Y

4. 수치해석 알고리즘(Algorithm)

- (1) 경계조건을 규정한다.
- (2) 변환영역(ξ, η) 내부에서 X, Y 값의 초기가정값(initial guess)을 가정한다. 본 연구에서는 경계조건사이의 선형보간(linear interpolation)에 의해 초기가정하였다.
- (3) 사용자가 원하는 η 방향의 격자간격을 규정하고 있는 경계로부터 식 (10)에 의해 R 을 계산한다.
- (4) 식 (12)에 의해서 F_1, F_2 를 계산한다.
- (5) 식 (11)를 임의의 반복법(본 연구에서는 Line by Line T.D.M.A.를 사용)에 의해서 푼다.
- (6) 수렴여부를 검토하여 수렴하지 않으면 (4)단계로 돌아가서 수렴할 때까지 계산을 되풀이 한다.

5. 결 과

Fig. 4는 NACA-0018 에어포일, Fig. 5는

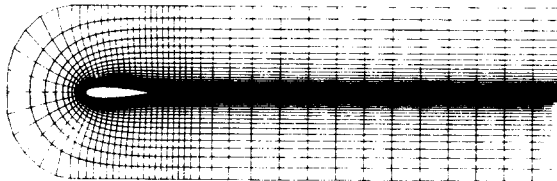


Fig. 4 NACA-0018 airfoil

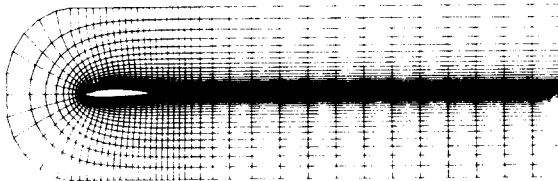


Fig. 5 KARMANN-TREFFTZ airfoil

KARMANN-TREFFTZ 에어포일에 대하여 생성된 경계고정곡선좌표계(81×31)를 나타내는데 Fig. 4,5 공히 난류유동해석시 벽함수(wall function) 적용을 위해 에어포일 표면에서 η 방향 격자를 밀집시켰고 에어포일 바로 뒤에서는 후류가 발생하므로 ξ 방향 격자를 밀집시켰다. 반복법 사용시 이완계수는 0.5로 하였고 수렴시까지의 반복회수는 300~400회 정도이다.

Fig. 6는 diffusing curved channel, Fig. 7은 non-diffusing curved channel에 대하여 생성된 경계고정좌표계(31×21)를 나타내는데 난류유동해석시 벽면 근처에서 벽함수 적용을 가능하도록 η 방향 격자를 밀집시켰다. 이완계수는 0.5로 하였으며 수렴시까지의 반복회수는 50~100회 정도이다.

에어포일이나 curved channel의 그림에서 보는 바와 같이 좌표선들이 근사적으로 직교하며 경계에서 사용자가 규정한 격자의 1% 오차이내에서 잘

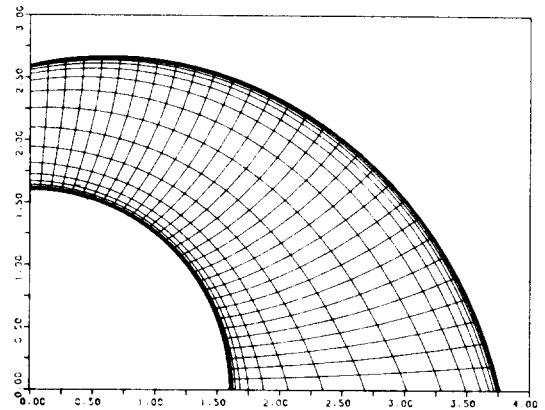


Fig. 6 Diffusing curved channel

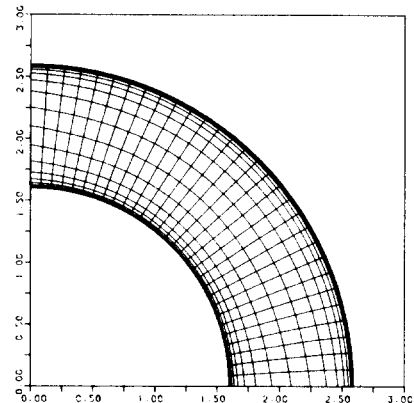


Fig. 7 Non-diffusing curved channel

밀집되어 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 근사직교 경계고정좌표계의 생성에 대한 새로운 방법을 소개했는데 그 특징은 다음과 같다.

(1) η 방향의 격자선을 강력하게 제어할 수 있다. 따라서 난류유동해석시 벽함수 적용을 가능하게 할 만큼 격자선을 물체 근처에 밀착시킬 수 있다.

(2) 생성된 경계고정좌표계는 근사직교로 직교를 이루므로 유동해석시 복잡성과 절단오차를 줄일 수 있다.

(3) 격자제어함수는 경계에서 부여된 metric scale factor들에 의해서 동적으로(dynamically) 조정된다.

(4) 제어함수는 완전히 자동이며 사용자가 제어함수를 조작할 필요가 없다.

참 고 문 헌

- (1) Thompson, J.F, et al. 1977, "TOMCAT-A Code for a Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems of Fields Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", J. Comp. Phys., Vol. 24, pp. 274~302.
- (2) Eiseman, P. 1979, A Multi-Surface Method of

- Coordinate Generation, J. Comp. Phys., Vol. 33, pp. 118~150.
- (3) Gordon, W. and Hall, C. 1973, Construction of Curvilinear Coordinate Systems and Application to Mesh Generation, Inter. J. for Numerical Method in Engineering, Vol. 7, pp. 461~477.
- (4) Rizzi, A. and Eriksson, L.E. 1981, Transfinite Mesh Generation and Dumped Euler Eqs. Algorithm for Transonic Flow around Wing-Body Configurations, Proc. AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conference, Palo Alto, California, pp. 43~69.
- (5) Thompson, J.F, Warsi, Z.U.A, and Mastin, C. 1982, "Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of P.D.E.-A Review", J. Comp. Phys., Vol. 47, pp. 1~108.
- (6) Mastin, C.W and Thompson, J.F. 1978, "Elliptic Systems and Numerical Transformations", J. Math. Anal. Appl., Vol. 62, 52.
- (7) Thompson, J.F. 1982, Elliptic Grid Generation Numerical Grid Generation. Edited by Joe, F. Thompson, Elsevier Science Publishing Co. Inc.
- (8) Steger, J.L. and Sorenson, R.L. 1980, Use of Hyperbolic P.D.E. to Generate Body-Fitted Coordinates, Numerical Grid Generation Techniques, NASA C.P. 2166, pp. 463~478.
- (9) Visbal, M and Knight, D., 1982, "Generation of Orthogonal and Nearly Orthogonal Coordinate with Grid Control Near Boundaries", AIAA J., Vol. 20, pp. 305~306.