

〈論 文〉

초기응력이 있는 탄성체의 선형 및 비선형해석 —플레이트 스트립을 중심으로—

權 永 斗* · 崔 鎮 民**

(1988年 1月 27日 接受)

Linear and Nonlinear Analysis of Initially Stressed Elastic Solid

—Particularly of a Plate Strip—

Young Doo Kwon and Jin Min Choi

Key Words : Initial Stress(초기응력), Gauss-Legendre Numerical Integration(가우스-르장드르 수치적분), Modal Analysis(모우드에 의한 해석), Direct Integration(직접적분), Newton-Raphson Iteration Method(뉴튼-랩슨 반복법)

Abstract

The present paper develops finite element procedures to calculate displacements, strains and stresses in initially stressed elastic solids subjected to static or time-dependent loading conditions. As a point of departure, we employ Hamilton's principle to obtain nonlinear equations of motion characterizing the displacement in a solid. The equations of motion reduce to linear equations of motion if incremental stresses are assumed to be infinitesimal. In the case of linear problem, finite element solutions are obtained by Newmark's direct integration method and by modal analysis. An analytic solution is referred to compare with the linear finite element solution. In the case of nonlinear problem, finite element solutions are obtained by Newton-Raphson iteration method and compared with the linear solution. Finally, the effect of the order of Gauss-Legendre numerical integration on the nonlinear finite element solution, has been investigated.

기 호 설 명

a : 판의 길이
 a_i : 직교좌표(초기상태의 위치)
 $C_1 = [(\lambda + 2\mu) / \rho_0]^{1/2}$
 $C_2 = (\mu / \rho_0)^{1/2}$
 $H(t)$: Heaviside 계단함수
 n_i : 단위법선벡터
 T : Cauchy응력벡터

t : 제일 Piola-Kirchhoff 응력벡터
 t_i : a_i 방향의 단위벡터 e_i 에 수직한 평면상의 제일 Piola-Kirchhoff 응력벡터
 x_i : 직교좌표(변형후의 위치)
 δ_{ij} : Kronecker델타
 λ, μ : Lamé 상수
 ν : Poisson 비
 ρ_0 : 밀도
 τ_{ij} : Cauchy 응력텐서
 τ_{ij}^0 : 초기응력텐서
 τ'_{ij} : 증분응력텐서

* 正會員, 慶北大學校 工科大學 機械工學科

** 正會員, 韓國機械研究所

무차원양

h	: ha =판의 두께
p_0	: $p_0\mu$ =분포하중
t	: ta/C_2 =시간
u_i	: $u_i a$ =변위성분
τ_{ij}^0	: $\tau_{ij}^0\mu$ =초기응력
τ'_{ij}	: $\tau'_{ij}\mu$ =증분응력

1. 서 론

초기응력문제는 오늘날 공학이나 기술분야에서 널리 찾아볼 수 있으며, 그 근원은 외력, 온도차 또는 소성변형 등 여러가지가 있다. 고체에 작용하는 초기응력에 따라서는 그 크기가 임계치에 달하게 되면 고체는 불안정하게 된다. 일반적으로 초기응력이 있는 고체의 정적, 동적 응답은 비선형적이거나 그 크기가 작은 경우에는 선형적인 현상으로 취급할 수 있다. 이러한 초기응력문제는 많은 사람들에게 의해 연구되어 왔는데^(1~7), Reisman과 Pawlik⁽⁸⁾은 변분원리를 이용하여 탄성체(hyperelastic solids)에 대한 초기응력문제를 형성하고, 유도된 이론식을 보⁽⁹⁾와 판⁽⁶⁾에 대한 근사식을 얻는데 적용하였으며, 또한 非齊次彈性問題(nonhomogeneous elastodynamics problem)⁽¹⁰⁾의 풀이과정을 초기응력문제에 확장하여 강제운동을 구하는 경우에 적용할 수 있도록 하였다. 한편 초기응력문제에 있어서 유한요소법의 적용은 주로 자유진동이나 안정성문제에 국한되었다^(9~13).

본 논문에서는 정적 혹은 동적인 하중을 받는 탄성체의 변위, 응력 등을 구할 수 있는 유한요소해석을 하였다. 이 경우에 얻어지는 대수적인 운동방정식은 비선형적이지만 증분응력이 미소한 경우에는 선형화될 수 있다. 따라서 유한요소식의 해법도 선형적인 경우와 비선형적인 경우로 나누어 생각한다. 선형문제에 대한 해법으로는 (1) 정하중: Gauss소거법, (2) 동하중: 모우드에 대한 해석 또는 Newmark의 직접적분법⁽¹⁴⁾을 사용했고, 비선형적인 문제에 대한 해법으로는 (1) 정하중: Newton-Raphson반복법⁽¹⁵⁾, (2) 동하중: Newton-Raphson 반복법에 의거한 Newmark의 직접적분법을 사용하였다. 비선형적인 문제의 풀이시에는 Newton-Raphson방법으로 반복하여 계산하면서 외력과 등가절점하중의 평형이 이루어지도록 하므로 상당히 많은 양의 계산이 필요한데, 이때 서로

종류가 다른 강성매트릭스의 수치적분시 각기 다른 차수의 Gauss-Legendre 적분을 시도하여, 발생된 오차 및 계산시간의 변동 등을 고찰함으로써 계산량의 減少方案을 찾아 보았다. 또한 초기응력이 균일한 경우, 선형해와 비선형해를 비교함으로써 증분응력의 영향을 무시하는 선형해석의 適用妥當性을 검토하였다.

2. 변분원리에 의한 초기응력문제의 형성 및 등가초기응력

앞으로의 해석을 위해 고체의 상태를 다음과 같이 세가지로 나눈다.

- (1) 자연상태: 모든 응력과 변형율이 0인 상태.
- (2) 초기상태: 초기응력이 있는 상태.
- (3) 변형상태: 초기상태에서(또는 자연상태에서) 외력에 의해 변형된 상태.

고체의 변형을 자연상태가 아니라 초기상태를 기준으로 하여 표시한다. 자연상태는 초기변형에 의해 초기상태로 되며, 이때의 변형은 탄성범위내에서 임의의 크기를 가질 수 있으나 초기상태로부터의 증분변형상태는 재료의 탄성 범위내(materially linear)이고 rotation이 작으며(geometrically linear), 증분응력의 영향을 무시할 수 있는 선형(linear) 문제의 경우와 증분응력의 영향을 고려하는 비선형(nonlinear due to time-dependent initial stress) 문제의 경우로 나누었다.

2.1 초기응력문제의 기본식

Fig. 1에서 초기상태에 있는 고체의 일부인 B_0 를 생각한다. B 는 초기상태의 B_0 에 해당하는 변형상태에서의 고체의 일부를 나타낸다.

여기서 변위벡터는 $u_i = u_i(a_1, a_2, a_3)$ 와 같이 표시될 수 있고, 고체에 작용하는 외력에 의한 동력은 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{U} = \int_{B_0} \dot{w} dV_0 = \int_{S_0} (t \cdot \dot{u}) dS_0 + \int (F \cdot \dot{u}) J dV_0 \quad (1)$$

여기서 F 는 체적력, J 는 Jacobian, \dot{w} 는 동력 밀도를 나타낸다.

변형상태에서의 평형식은 다음과 같이 표시된다.

$$\int_S T dS + \int_B F dV = 0 \quad (2)$$

Cauchy응력벡터를 제일 Piola-Kirchhoff 응력벡

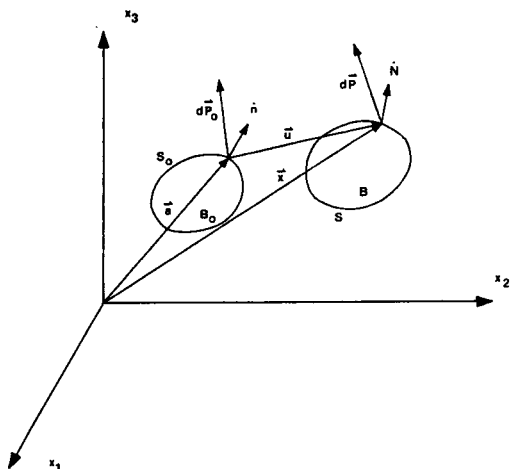


Fig. 1 Subregions before and after deformation

터로 바꾸고 초기상태에 대한 적분으로 변환하면 식(2)는 식(3)과 같이 된다.

$$\int_{S_0} t_i n_i dS_0 + \int_{B_0} F_j dV_0 = 0 \quad (3)$$

발산정리를 식(1)에 적용하고 식(3)을 이용하여 정리하면 식(4)가 얻어진다.

$$\dot{U} = \int_{B_0} (t_i \cdot \dot{u}_i) dV_0 \quad (4)$$

동력밀도 $\dot{w} = t_i \cdot \dot{u}_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{w} = \frac{d}{dt} \left(\tau'_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau'_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau'_{ij} u_{k,i} u_{k,j} + \frac{1}{3} \tau'_{ij} u_{k,i} u_{k,j} \right) \quad (5)$$

따라서 증분변형률에너지는 다음 식과 같이 표시된다.

$$U = \int_{B_0} w dV_0 = \int_{B_0} \left[\tau'_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau'_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left(\tau'_{ij} + \frac{2}{3} \tau'_{ij} \right) \times \left(u_{k,i} u_{k,j} \right) \right] dV_0 \quad (6)$$

그리고 고체에 작용하는 외력에 의한 일은 다음과 같이 표시된다.

$$W = \int_{B_0} J F_i u_i dV_0 + \int_{S_0} t_i^* u_i dS_0 \quad (7)$$

여기서 t_i^* 는 표면력 벡터를 의미한다. 또한 고체의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{B_0} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i dV_0 \quad (8)$$

앞에서 구한 증분변형률에너지 U , 외력에 대한

일 W 및 운동에너지 T 를 Hamilton의 원리인 식(9)에 대입하고 τ'_{ij} 와 τ'_{ij} 의 대칭성을 이용하면 식(10)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (9) \\ & \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{B_0} \left\{ -\rho_0 \ddot{u}_i + (\tau'_{ij} + \tau'_{ij} + \tau'_{jk} u_{i,k} + \tau'_{jk} u_{i,k})_{,j} + J F_i \right\} \delta u_i dV_0 \right] dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{S_0} \left\{ (\tau'_{ij} + \tau'_{ij} + \tau'_{jk} u_{i,k} + \tau'_{jk} u_{i,k}) n_j - t_i^* \right\} \delta u_i dS_0 \right] dt = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

여기서 t_1 , t_2 및 B_0 , S_0 는 임의적인 것이므로 적분함수가 0이 되어야 한다. 따라서 초기상태가 평형인 경우 다음과 같은 운동방정식 및 경계조건이 얻어지게 된다.

$$(\tau'_{ij} + \tau'_{jk} u_{i,k} + \tau'_{jk} u_{i,k})_{,j} + F_i = \rho_0 \ddot{u}_i \quad (11a)$$

$$(\tau'_{ij} + \tau'_{jk} u_{i,k} + \tau'_{jk} u_{i,k}) n_j = t_i^* \quad (11b)$$

$$u_i = u_i^* \quad (11c)$$

여기서 F_i , t_i^* 및 u_i^* 는 각각 증분체적력, 경계에서 주어진 증분표면력 및 변위를 나타낸다. $\tau'_{jk} u_{i,k}$ 는 변위의 이차항을 포함하는 비선형항으로 이것을 무시하면 선형적인 운동방정식 및 경계조건이 된다. 증분변위가 미소하고 탄성상태의 경우에는 다음의 근사식을 사용할 수가 있다.

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} + \tau'_{ij} \quad (12a)$$

$$\tau'_{ij} = A_{ijkl}^0 \epsilon_{kl} \quad (12b)$$

$$A_{ijkl}^0 : \text{자연상태에서의 탄성텐서} \quad (12c)$$

2.2 초기응력이 있는 보와 판의 기본식⁽⁶⁾ 및 등가초기응력

전절의 이론을 식(13)과 같은 초기응력이 있는 일정한 단면의 Timoshenko보에 적용하면 식(14)와 같은 운동방정식이 얻어진다.

$$[\tau'_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\left(1 + \frac{\sigma^*}{E} \right) \frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho_0 I_0 \ddot{\psi} \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + A_0 \sigma_2^* \frac{\partial W}{\partial x} \right) + P = \rho_0 A_0 \ddot{w} \quad (14b)$$

여기서

$$\sigma_1^* = \int_{A_0} (\sigma z^2 / I_0) dA_0$$

$$\sigma_2^* = \int_{A_0} (\sigma / A_0) dA_0$$

$$M = EI_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$Q = k^2 GA_0 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$I_0 = \int_{A_0} z^2 dA_0$$

$$u_x = z\psi(x, t)$$

k^2 : 전단력수정계수

$$w = u_z$$

식(14)에서 두계방향으로 변하는 초기응력 $\sigma(z)$ 는 등가초기응력 σ_1^* 와 σ_2^* 로 대체될 수 있음을 알 수 있다. 또한 이때의 초기응력 $\sigma(z)$ 가 잔류응력인 경우에는 $\sigma_2^* = 0$ 이 되고, 많은 경우 $\sigma_1^* \ll E$ 이므로 잔류응력의 영향이 없어지게 된다. 따라서 두계방향으로만 변하는 잔류응력은 Timoshenko보의 정적 또는 동적응답에 영향을 주지 않음을 알 수 있다.

다음에 앞절의 이론을 식(15)와 같은 초기응력이 있는 일정한 두께의 판에 적용하면 운동방정식은 식(16)과 같이 표시된다.

$$[\tau_{ij}^0] = \begin{bmatrix} \tau_{xx}^0(z) & \tau_{xy}^0(z) & 0 \\ \tau_{yx}^0(z) & \tau_{yy}^0(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$(M_{\alpha\beta} + I_0 \tau_{\beta\gamma}^{0*} \psi_{\alpha,\gamma})_{,\beta} - Q_\alpha = \rho_0 I_0 \ddot{\psi}_\alpha \quad (16a)$$

$$(Q_\alpha + h \tau_{\alpha\gamma}^{0*} w_{,\gamma})_{,\alpha} + p = \rho_0 h \ddot{w} \quad (16b)$$

여기서

$$\tau_{\beta\gamma}^{0*} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\beta\gamma}^0 z^2 / I_0) dz$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^{0*} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\alpha\gamma}^0 / h) dz$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) (\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) + 2\nu \psi_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right\}$$

$$Q_\alpha = k^2 Gh (\psi_\alpha + w_{,\alpha})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$I_0 = h^3/12$$

$$u_\alpha = z\psi_\alpha$$

k^2 : 전단력수정계수

$$w = u_z$$

즉, 초기응력이 판의 두계방향으로만 변하는 경우, 운동방정식은 $\tau_{\beta\gamma}^{0*}$ 와 $\tau_{\alpha\gamma}^{0*}$ 의 등가초기응력으로

표시된다. 이때의 초기응력이 잔류응력이고 $I_0 \tau_{\beta\gamma}^{0*} \psi_{\alpha,\gamma} \ll M_{\alpha\beta}$ 인 경우에는 운동방정식이 초기응력이 없는 경우와 같아지므로 잔류응력은 판의 정적 또는 동적응답에 거의 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

3. 유한 요소법에 의한 초기응력문제의 형성 및 등가초기응력

초기응력이 있는 고체에 대한 유한요소해석을 하기 위해 먼저 Hamilton의 원리에 의하여 운동방정식을 구한다. 운동방정식은 비선형대수방정식이 되며, 변위의 이차항을 무시하면 선형대수방정식이 된다.

한편 보나 판에서 두계방향으로만 변하는 초기응력은 등가초기응력으로 대체될 수 있음이 보여졌다. 여기서는 이를 보다 일반적인 경우인 이차원 상태의 고체에 두계방향으로만 변하는 초기응력이 있는 경우으로 확장적용할 수 있음이 一次攝動理論⁽¹⁶⁾에 의해 보여지게 된다.

3.1 초기응력문제의 운동방정식

Hamilton의 원리에 의해 대수적인 운동방정식을 구하기 위해 고체를 다수의 유한요소로 분할한다. 각 요소는 일정한 수의 절점으로 구성되어 있고, 이를 바탕으로 형상함수를 가정한다.

식(6), 식(7), 식(8) 및 식(9)로부터 다음의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (17)$$

여기서

$$[M] = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{B_{0(e)}} \rho_0 [N]^T [N] dV$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{B_{0(e)}} ([B]^T [B^0] [B] [E]^T [T] [E]) dV$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{Ne} \left(\int_{B_{0(e)}} [N]^T \{F\} dV + \int_{S_{0(e)}} [N^s]^T \{t'\} dS \right)$$

$\{\dot{U}\}$: 전절점 가속도벡터

$\{F\}$: 증분 체적력벡터

$\{t'\}$: 증분 표면력벡터

$[N]$: 형상함수 매트릭스

$[B]$: 변형율-변위 매트릭스

$[E]$: 변위그래디언트-변위 매트릭스

$[B^0]$: 탄성매트릭스

$$[T] = \begin{bmatrix} A & O & O \\ O & A & O \\ O & O & A \end{bmatrix}$$

$$A = [\tau_{ij}^0] + [\tau_{ij}^*]$$

이때 $A = [\tau_{ij}^0]$ 로 두면 운동방정식이 선형화된다.

3.2 초기응력이 있는 탄성체의 등가 초기 응력

Fig. 2와 같은 이차원 모델에서 초기응력 τ_{xx}^0 가 있는 경우, Gauss-Legendre적분을 일차로 하여 수치적분하면, 전강성매트릭스는 다음과 같이 표시 될 수 있다.

$$[K] = [K]^0 + [K]^* \tag{18}$$

여기서

$$[K]^0 = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{B_0(e)} [B]^T [B^0] [B] dV$$

$$[K]^* = \sum_{e=1}^{Ne} \tau_{xx}^0(y^e) [C]^{(e)}$$

$$[C]^{(e)} = [E]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [E] V^{(e)}$$

y^e : 유한요소 도심의 y 좌표

매트릭스 $[K]^0$ 는 초기응력이 없는 경우의 강성 매트릭스이고, $[K]^*$ 는 초기응력의 영향을 나타내는 강성매트릭스이다. 일반적으로 $[K]^*$ 는 $[K]^0$ 에 비하여 항의 크기가 작으므로 一次攝動法에 의해 고유치문제의 해석이 가능하다. 먼저 균일한 크기의 초기응력 τ_{xx}^0 를 가지고 있는 또 하나의 새로운 모델을 생각한다. 여기서 $\tau_{xx}^0 = \tau_{xx}^i$ 일때 두 모델의 i 번째 고유치가 같아진다고 하면 τ_{xx}^i 는 다음식과

같이 구해진다.

$$\tau_{xx}^i = \frac{\sum_{e=1}^{Ne} \tau_{xx}^0(y^e) \{\phi_{oi}\}^T [C]^{(e)} \{\phi_{oi}\}}{\sum_{e=1}^{Ne} \{\phi_{oi}\}^T [C]^{(e)} \{\phi_{oi}\}} \tag{19}$$

여기서 $\{\phi_{oi}\}$ 는 초기응력이 없는 경우의 i 번째 고유벡터를 의미한다. 그리고 $\tau_{xx}^i = \tau_{xx}^0$ 가 일반적으로 성립하여, 식 (19)에서와 같은 크기의 등가초기 응력 τ_{xx}^0 를 가지고 있는 새로운 모델은 원래의 모델과 고유치들이 같게 된다. 또한 등가 초기응력 τ_{xx}^0 가 있는 경우의 고유벡터도 원래의 모델과 같다는 것이 보여질 수 있다. 따라서 식 (19)와 같은 크기의 등가초기응력이 있는 고체는 불균일한 초기 응력이 있는 동일한 고체와 고유치, 고유벡터가 같으므로 외력에 대한 정적 또는 동적응답이 같게 될 것이라는 것을 알 수 있다. 이때 $[K]^0$ 매트릭스는 초기응력이 없는 경우의 강성매트릭스로 수치적분 시 차수에 상당히 민감하므로 한 요소내의 응력이 변화하는 정도에 맞는 차수로 적분되어야 한다. 그러나 $[K]^*$ 매트릭스를 적분할 때는 적분차수를 낮출 수가 있다. 예를 들면 8절점요소의 경우, 보통 이차 혹은 삼차의 수치적분을 하게 되나 $[K]^*$ 매트릭스의 적분시는 요소내의 초기응력을 균일하다고 볼 수 있어 일차의 수치적분으로도 상당히 정확한 계산이 가능할 것이다. 좀 더 일반적으로 말하자면, $[K]^*$ 매트릭스를 계산함에 있어서는 $[K]^0$ 매트릭스의 수치적분시보다 한 차수 낮은 차수의 수치적분도 충분히 정확한 결과를 가져 올 수 있다는 것이다. 이는 특히 강성매트릭스의 계산이 많이 필요한 비선형문제의 경우에 상당한 계산량의 감소를 기대할 수 있을 것으로 생각된다.

4. 계산에 및 고찰

계산에 사용된 모델은 Fig. 3과 같이 10개의 8절점요소로 분할되었다. 각 예에서의 공통된 사항은 다음과 같다. 즉 평면변형울상태의 판이 있고, 양단은 단순지지되어 있다. 또한 판 중앙의 일부에 균일한 크기이고 시간에 따라 계단함수적인 하중이 작용한다. 여기서 추가적인 조건 혹은 계산방법의 차이로 인하여 문제를 다음의 네가지 종류로 분류할 수 있다.

(1) 판에 균일한 크기의 길이방향의 초기응력 τ_{11}^0 가 작용하고 있고 선형이론을 적용하는 경우: 이때의 결과는 이론해⁽¹⁷⁾와 비교된다.

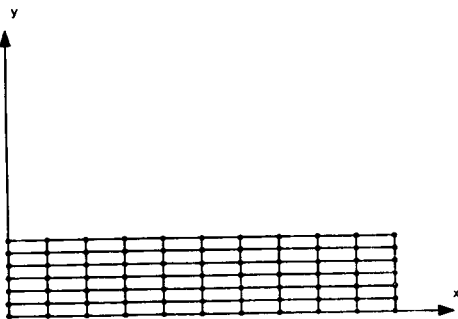


Fig. 2 The finite element model

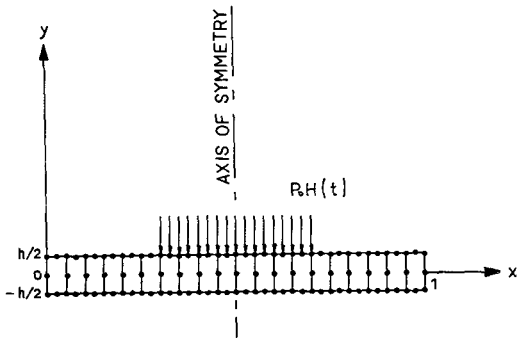


Fig. 3 Finite element model of the simply supported plate strip using quadratic quadrilateral elements

(2) 판에 균일한 크기의 길이방향의 초기응력 τ_{11}^0 가 작용하고 있고, 증분응력의 영향을 고려하는 비선형이론을 적용하는 경우: 이때의 결과는 선형 유한 요소해와 비교되며 선형이론의 적용타당성이 검토된다.

(3) 판의 양단에 시간에 따라 일정하게 증가하는 길이방향의 하중 $(-tA|\sigma_{cr}|/36; A=\text{판의 단면적}, \sigma_{cr}=\text{좌굴응력})$ 이 작용하는 경우: 이때는 초기응력이 시간에 따라 변하므로 선형이론의 적용이 불가능하다.

(4) 판에 작용하는 초기응력은 앞의 경우 (3)과 같으나 초기응력매트릭스의 수치적분시 적분차수를 한 차수 낮추어(적분차수=1) 계산을 하는 경우: 이때의 결과는 (3)의 경우와 비교되며, 積分次數低下方法의 타당성이 검토된다.

Fig. 4와 Fig. 5는 (1) 경우에 대한 판중양부의 변위 및 최대응력을 시간에 따라 각각 나타낸 것이며, 적분차수를 2로 하여 강성매트릭스와 초기응력매트릭스를 수치적분하였다. 이때는 증분응력의 영향이 고려되지 않으므로 시스템매트릭스는 일회계산만이 필요하다. 여기서, 선형이론을 적용하여 모우드중첩법과 직접적분법으로 구한 유한요소해의 결과가 실선으로 표시된 이론해와 잘 일치함을 볼 수 있다. 즉 Fig. 4에 나타난 변위에서는 최대치의 오차가 1.6%정도였고, Fig. 5의 응력에서는 최대치의 오차가 1.5%정도로 나타났다. 그리고 여기서 초기응력은 인장응력의 경우보다 압축응력의 경우에 그 영향이 큼을 알 수 있다. 즉 이 그림은 변위 및 응력이 초기응력에 대해 비선형적임을 보여주고 있다.

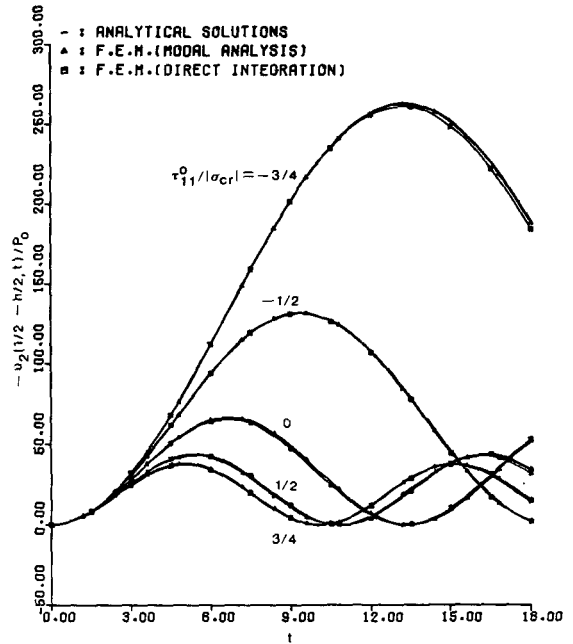


Fig. 4 Center deflections $-u_2(1/2, -h/2, t)/P_0$ obtained by analytical method and finite element methods: $h=0.1$ and $\nu=0.3$

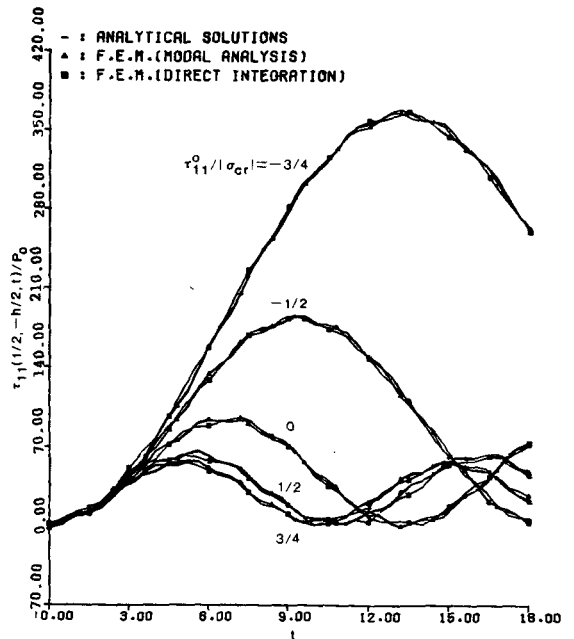


Fig. 5 Normal stress components $\tau_{11}(1/2, -h/2, t)/P_0$ obtained by analytical method and finite element methods: $h=0.1$ and $\nu=0.3$

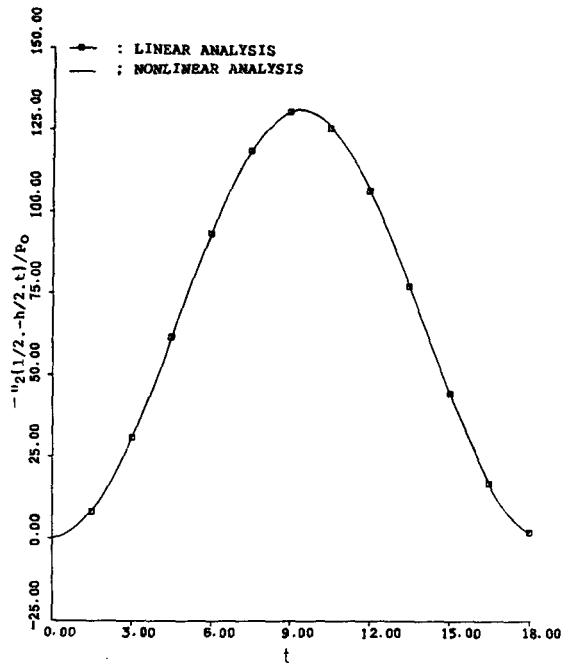


Fig. 6 Center deflections $-u_2(1/2, -h/2, t)/P_0$ obtained by linear and nonlinear finite element methods: $h=0.1$, $\nu=0.3$ and $\tau_{11}^0 = -0.5|\sigma_{cr}|$

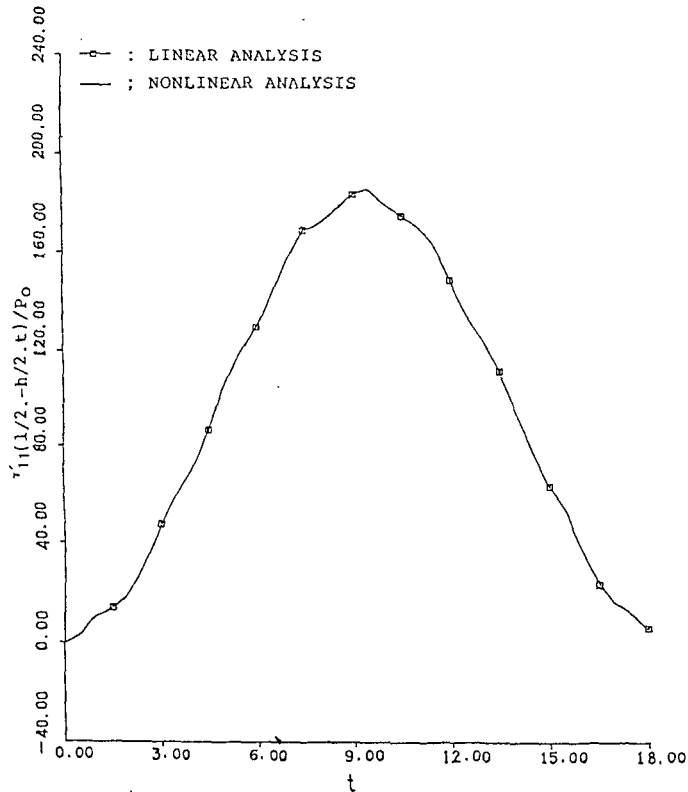


Fig. 7 Normal incremental stress components $\tau_{11}(1/2, -h/2, t)/P_0$ obtained by linear and nonlinear finite element methods; $h=0.1$, $\nu=0.3$ and $\tau_{11}^0 = -0.5|\sigma_{cr}|$

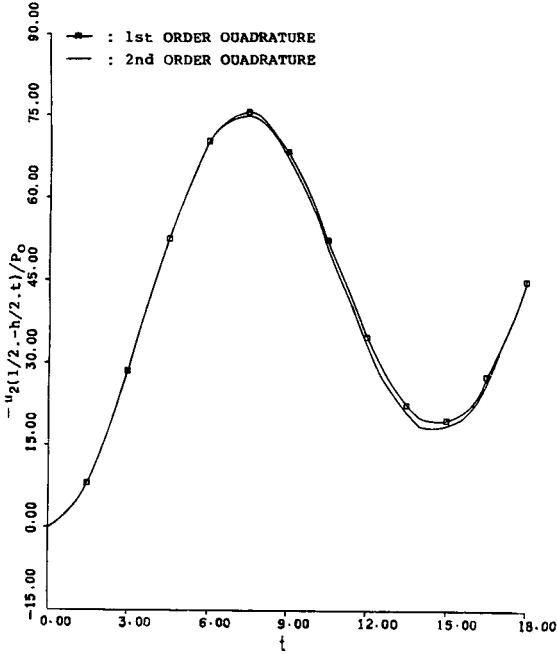


Fig. 8 Center deflections $-u_2(1/2, -h/2, t)/P_0$ obtained by nonlinear finite element methods of different orders of numerical integration; $h=0.1$ and $\nu=0.3$

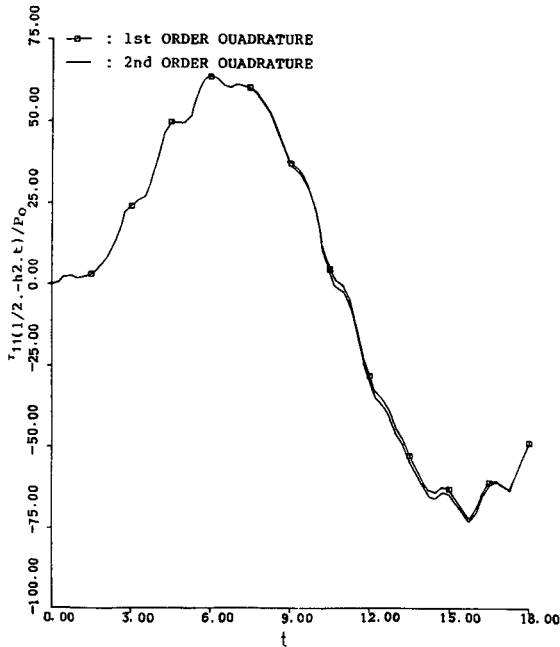


Fig. 9 Normal stress components $\tau_{11}(1/2, -h/2, t)/E_0$ obtained by nonlinear finite element methods of different orders of numerical integration; $h=0.1$ and $\nu=0.3$

Fig. 6과 Fig. 7은 (2)의 경우에

변위 및 응력을 나타낸 것으로 석분차수는 모두 2로 하였다. 이때는 Newton-Raphson 반복계산이 수행되었고 매시간증분 및 각시간증분구간내에서의 반복계산시 새로운 시스템매트릭스가 계산되어야 한다. 여기서 직접적분법에 의한 선형해석의 결과와 비선형해석의 결과를 비교하여 보면, Fig. 6과 Fig. 7에 각각 나타난 변위 및 응력의 경우에 있어서 다같이 최대치의 오차가 0.0% 정도로 거의 완전히 일치하고 있음을 알 수 있다. 이는 2.2절과 3.2절에서 시사하듯이 판의 두께방향으로 변하는 응력(초기응력과 증분응력의 합)은 그때의 평균응력인 초기응력으로 대체될 수 있음을 의미한다. 따라서 이 경우와 같이 응력의 두께방향의 평균이 시간에 따라 변하지 않는 경우에는 증분응력을 고려하지 않아도 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있으므로 선형이론을 적용해도 무방하다고 할 수 있다.

Fig. 8 및 Fig. 9는 (3) 및 (4)의 경우에 대한 판중양부의 변위 및 최대응력을 나타낸 것으로, 이때는 초기응력 τ_{11}^0 가 시간에 따라 변하므로 비선형이론을 적용할 수 밖에 없으므로, 시스템매트릭스를 매시간증분마다 또한 각시간증분구간내에서의 반복계산시마다 새로이 계산해야 하므로 상당히 많은 계산이 필요하다. 여기서 모든 수치적분식의 차수를 2로 하여 계산한 (3)의 경우에 있어서의 결과와, 시스템매트릭스중 초기응력매트릭스를 구할 때의 적분차수를 낮추어 1로 하여 계산한 (4)경우의 결과를 비교해 보면, Fig. 8 및 Fig. 9에서 보는 바와 같이 변위 및 응력최대치의 차이는 각각 0.61%와 1.5%정도로 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 한편 초기응력매트릭스의 적분차수를 2에서 1로 낮춤으로써 계산량에 있어서는 상당한 감소를 가져와 (4)의 경우는 (3)의 경우에 비해 약 47%의 CPU시간을 줄일 수 있었다. 이것은 시스템매트릭스중 초기응력매트릭스를 제외한 강성매트릭스는 시간에 따라 변하지 않으므로 대부분의 계산시간은 초기응력 매트릭스를 구하는 것과 시스템매트릭스를 삼각형화하는 것에 소요되기 때문이다.

5. 결 론

지금까지의 해석 및 계산결과의 비교 등을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 초기응력이 있는 탄성체의 유한요소해석시

증분응력의 영향을 고려하는 경우에 필요한 비선형 항이 포함된 전포텐셜에너지를 구하고, 이를 비선형 유한요소해석에 이용하였다.

(2) 증분응력의 영향을 무시한 선형화된 초기응력문제에서 초기응력의 크기와 고체의 응답(예를 들면 변위의 최대치 등)은 비선형적인 관계를 가지고 있다.

(3) 길이방향의 초기응력이 작용하고 있는 보나 판에 있어서 초기응력이 두께방향으로만 변하는 경우에는 이를 균일한 등가초기응력으로 대치할 수 있다. 이때의 초기응력이 잔류응력인 경우에는 크기가 짧은 등가초기응력으로 대치할 수 있으므로 잔류응력은 고체의 운동에 실질적인 영향을 주지 않는다.

(4) 평면문제(평면변형률 또는 평면응력문제)에서도 두께방향으로만 변하는 초기응력은 균일한 크기의 등가초기응력으로 대치될 수 있으며, 고체의 운동에 있어서 실질적인 차이를 내지 않는다.

(3)항과 (4)항으로부터 초기응력은 구체적인 분포상태보다는 평균적인 크기가 고체의 운동에 영향을 준다고 볼 수 있다. 따라서 유한요소해석시 초기응력 매트릭스에 대해서는 Gauss-Legendre 수치적분의 차수를 낮출 수 있으며, 이는 계산결과와의 비교를 통해서 그 타당성이 확인되었다.

(5) 따라서 초기응력의 두께방향 평균이 시간에 따라서 변하지 않는 경우에는 선형해석으로도 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

(6) 초기응력의 두께방향 평균이 시간에 따라 변하는 경우에는 비선형해석을 해야 하고, 이때 많은 회수의 계산이 필요한 초기응력매트릭스의 수치적분시 적분차수를 강성매트릭스의 적분차수보다 한 차수정도 낮출 수 있다. 이렇게 해서 얻어지는 결과는 적분차수를 낮추지 않은 경우와 큰 차이가 나지 않으나 계산량에 있어서는 상당한 감소를 기할 수 있었다.

후 기

본 연구는 1986년도 한국과학재단의 연구비지원을 받아 수행되었으며, 관계자 및 조언을 해주신 분들께 감사함을 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) A. E. Green, R. S. Rivlin, and R. T. Shield, 1952, "General Theory of Small Elastic Deformations Superposed on Finite Elastic Deformations", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 211.
- (2) C. Truesdell, and W. Noll, 1965, "The Nonlinear Field Theories of Mechanics", in Encyclopedia of Physics, S. Flügge, Editor, Vol. III/3, Springer-Verlag.
- (3) A. E. Green, and W. Zerna, 1968, Theoretical Elasticity, Second Edition, Oxford University Press, London, pp. 113~147.
- (4) R. J. Knops, 1973, "Theory of Elastic Stability", in Encyclopedia of Physics, S. Flügge, Chief Editor, Vol VI a/3, Mechanics of Solids III, C. Truesdell, Editor, Springer-Verlag.
- (5) H. Reismann, and P. S. Pawlik, 1977, "Dynamics of Initially Stressed Hyperelastic Solids", SM Archives, Vol. 2, Issue 2.
- (6) H. Reismann, and P. S. Pawlik, 1980, Elasticity-Theory and Application, John Wiley and Sons Ltd., pp. 378~407.
- (7) H. Reismann, and H. H. Liu, 1977, "Forced Motion of an Initially Stressed Rectangular Plate-An Elasticity Solution", Journal of Sound and Vibration, Vol. 55, No. 3.
- (8) H. Reismann, and P. S. Pawlik, 1974, "The Non-homogeneous Elastodynamics Problem", Journal of Engineering Mathematics, Vol. 8, No. 2.
- (9) R. G. Anderson, B. M. Iron, and O. C. Zienkiewicz, 1968, "Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements", International Journal of Solids and Structures, Vol. 4.
- (10) D. J. Dawe, 1969, "Application of the Discrete Element Method to the Buckling Analysis of Rectangular Plates Under Arbitrary Membrane Loading", The Aeronautical Quarterly, Vol. 20.
- (11) B. Tabarrok, and A. Simpson, 1977, "An Equilibrium Finite Element Model for Buckling Analysis of Plates", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11.
- (12) R. A. F. Martins, and D. R. J. Owen, 1977, "Structural Instability and Natural Vibration Analysis of Thin Arbitrary Shells by Use of the Semiloof Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11.
- (13) K. K. Gupta, 1981, "Development of a Unified Numerical Procedure for Free Vibration Analysis of Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17.
- (14) N. M. Newmark, 1959, "A Method of Computa-

- tion for Structural Dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Divison, Vol. 85, ASCE.
- (15) K. J. Bathe, 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., pp. 490~491.
- (16) L. Meirovitch, 1980, Computational Methods in Structureal Dynamics, B. V. Sijthoff and Noordhof International Publishers, pp. 102~105.
- (17) Y. D. Kwon, 1985, "Forced Motion of Initially Stressed Elastic Solids-Analytical and Finite Element Methods", Ph. D Thesis, State University of New York at Buffalo.