

Mindlin 평판 유한요소의 개선

Improvement of Finite Element for Mindlin Plate Bending

金	善	薰*
Kim,	Sun-	Hoon
崔	暢	根**
Choi,	Chang-	Koon

요 약

본 연구에서는 평판 구조물의 해석을 위한 개선된 유한요소를 제시하였다. 이 요소는 Mindlin 평판이론에 의하여 수식화되었으며, 'Heterosis' 평판요소의 변위장에 비적합변위형을 추가함으로써 유도되었다. 본 연구에서 제시한 평판요소는 요소의 강제운동과 관련된 Zero Eigenvalue만을 갖고 있으므로 Spurious Zero Energy Mode를 보이지 않는다. 대표적인 문제에 대한 수치해석을 해 본 결과 본 연구에서 제시한 평판요소는 우수한 수렴도를 보여 주었으며, 아주 얇은 평판문제에서도 요소의 형상에 관계없이 Shear Locking 현상을 극복하였다.

Abstract

The present work is concerned with the improvement of finite element for the analysis of plate bending structures. The element formulation is based upon Mindlin plate concept. The displacement field of this element is formed by adding nonconforming modes to two rotational displacement components of a 'heterosis plate element. The element has the requisite numbers of zero eigenvalues associated with rigid body modes to avoid the spurious zero energy mode. It is shown that the results obtained by the element converged to the exact solutions very rapidly as the mesh is refined and exhibited reliable solutions through numerical studies for standard benchmark problems. This element is shown to overcome the shear locking problem completely in very thin plate situation even for irregular meshes.

1. 서론.

고전적인 Kirchhoff 이론 대신에 Mindlin 이론¹⁾에 의하여 평판요소를 수식화하면 전단변형의 영향이 고려되므로 얇은 평판은 물론 두꺼운 평판의 해석이 가능하다. 또한 요소의 수직변위와

회전변위를 독립적으로 근사화 할 수 있으므로 사용하는 형상함수(Shape Function)는 C^0 연속성만을 만족하면 된다.²⁾ 이러한 장점 때문에 최근에 발표되는 평판 유한요소는 Mindlin 이론에 의한 것들이 대부분이다.³⁻⁶⁾

* 정회원, 한국에너지연구소 구조설계실 선임연구원, 공학박사
 ** 정회원, 회장, 한국과학기술원 토목공학과 교수, 공학박사

□ 이논문에 대한 토론은 1989년 3월 31일까지 본학회에 보내주시면, 그결과를 1989년 9월호에 게재하겠습니다.

Mindlin이론에 의한 평판 유한요소를 사용하여 두꺼운 평판 구조물을 해석하는 경우 비교적 우수한 해석결과를 얻을 수 있다. 그러나 이 요소는 전차적분(Full Integration)을 사용하여 강성행렬을 계산하면 과도한 전단강성이 발생하게 되며, 얇은 평판 구조물에 대한 해석결과는 매우 느린 수렴성을 보여 주고 있다.⁷⁾ 더우기 이 요소는 평판의 두께가 매우 얇아지게 되면 그 해석결과는 요소의 수에 관계없이 정확한 해에 수렴하지 못하는 이른바 Shear Locking 현상을 보여 주었다.³⁾ 이러한 문제점의 해결을 위하여 강성행렬의 계산시 적분차수를 일률적으로 혹은 선택적으로 줄여서 계산하는 감차적분방법(Reduced Integration Technique)이 제안되어 널리 사용되었다.^{7,8)} 감차적분방법의 사용은 해석결과의 개선외에 계산시간의 감소라는 부수적인 이점을 가져다 주었지만,⁸⁾ Serendipity Family 요소의 경우에는 감차적분의 사용에도 불구하고 Shear Locking 현상을 완전히 제거하지 못하였다.⁴⁾ 더우기 감차적분방법의 사용은 강성행렬 계수(Rank of Stiffness Matrix)의 감소를 초래하게 되어서 해석결과를 무용화시킬수 있는 Spurious Zero Energy Mode의 발생이라는 새로운 문제점을 발생시켰다.^{3,6)} 따라서 평판 유한요소의 개발에 있어서 이 두 문제점의 완전한 제거는 많은 연구가들의 최대 관심사가 되었다.⁹⁾

본 연구에서는 현재까지 발표된 많은 평판 유한요소들 중에서 널리 실용화되고 있는 Heterosis 요소⁵⁾에 적절한 비적합변위형(Nonconforming Displacement Mode)¹⁰⁾을 추가하여 별다른 문제점을 보여주지 않으면서 보다 개선된 새로운 평판 유한요소를 제시하였다.

2. Mindlin 평판 유한요소

2.1. 요소의 수식화

Mindlin 평판의 임의의 점에서 변위성분(Displacement Components)은 다음과 같이 표현된다.⁶⁾ (그림1 참조)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \theta_x(x, y) \\ z \theta_y(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_i^n N_i \begin{Bmatrix} z \theta_{xi} \\ z \theta_{yi} \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

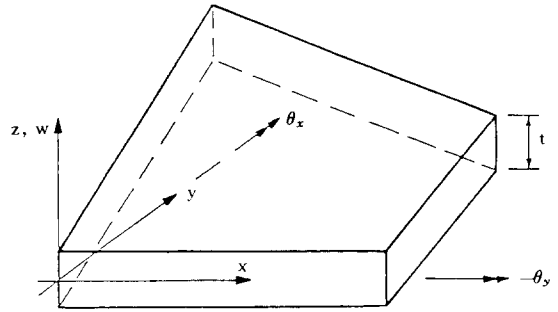


그림 1. Geometry and Degrees-of-Freedom for Mindlin Plate Element

변위와 변형율의 관계는 굽힘(Bending)과 전단(Shear)에 대한 항들이 서로 독립적이므로 다음과 같이 분리 계산이 가능하다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_b \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \sum_i^n \begin{Bmatrix} B_{bi} \\ B_{si} \end{Bmatrix} \{d_i\} \quad (2)$$

여기서

$$\{\epsilon_b\} = \langle \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle^T \quad (2.a)$$

$$\{\epsilon_s\} = \langle \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle^T \quad (2.b)$$

$$[B_{bi}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (2.c)$$

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.d)$$

$$\{d\} = \langle w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \rangle^T \quad (2.e)$$

굽힘강성과 전단강성을 분리하여 계산하면 요소의 강성행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$[K^e] = [K_b^e] + [K_s^e] \quad (3)$$

여기서

$$[K_b^e] = \int_A [B_b]^T [D_b] [B_b] dA \quad (3.a)$$

$$[K_s^e] = \int_A [B_s]^T [D_s] [B_s] dA \quad (3.b)$$

$$[D_b] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.c)$$

$$[D_s] = \frac{Et}{2\alpha(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.d)$$

2.2. Mindlin 평판 유한요소의 비교검토.

앞에서 언급한 바와 같이 Mindlin 평판 유한요소의 강성행렬 계산시 전차적분의 사용은 과도한 전단강성을 발생시키며, 결과적으로 매우 얇은 평판에서의 해석결과를 정확한 해로부터 이탈(Divergence)시킨다.^{3, 4)} 이것은 식(3)에서 계산되는 강성행렬에서 전단강성행렬의 계수가 굽힘강성행렬 계수의 $(L/t)^2$ 배이므로 과도하게 발생된 전단강성이 두께가 얇아짐에 따라 전체 강성행렬을 지배함으로서 발생하며,⁴⁾ 이러한 현상을 보통 Shear Locking이라 부르고 있다. 따라서 이의 개선책으로 전단강성행렬의 계산에만 감차적분을 사용하는 선택적분방법(Selective Integration Technique)^{6, 7)}과 전체 강성행렬을 일률적으로 감차적분하여 계산하는 감차적분방법(Reduced Integration Technique)^{4, 8)}이 제안되었다. 그러나 이 방법 역시 완전한 개선책이 되지 못하였다.

8절점 요소에서는 감차적분방법의 사용으로 수렴속도가 증가되었지만, 여전히 Shear Locking 현상이 발생하였다.⁴⁾ 또한 9절점 요소에서는 감차적분의 사용으로 수렴속도의 증가와 함께 Shear Locking 현상이 완전하게 해결되었지만, Spurious Zero Energy Mode의 발생이라는 심각한 문제점이 유발되었다.^{5, 6)}

이러한 문제점의 해결을 위해서 Hughes 등⁵⁾은 8절점 요소와 9절점 요소의 특성을 혼합한 Heterosis 평판 유한요소를 발표하였다. 이 요소의 수직변위는 8절점 요소의 형상함수, 회전변위는 9절점 요소의 형상함수로서 근사화되었고, 전단강성의 계산만을 감차적분하는 선택적분방법이 사용되었다. Heterosis 요소는 Shear Locking 현상과 Spurious Zero Energy Mode의 발생이 제거된 평판 유한요소이다.^{4, 9)}

2.3. Heterosis 유한요소.

Heterosis 요소는 수직변위(w)에 대해서는 8절점 요소의 형상함수를 사용하고, 회전변위(θ_x, θ_y)에 대해서는 9절점 요소의 형상함수를 사용한다.⁵⁾ 따라서 이 요소의 변위성분은 N_i 를 8절점 요소의 형상함수, P_i 를 9절점 요소의 형상함수라 하면 식(1)로부터 다음과 같이 표현될 것이다.

$$u = \sum_1^9 P_i \theta_{x1}, v = \sum_1^9 P_i \theta_{y1}, w = \sum_1^9 N_i w_i \quad (4)$$

변위와 변형율의 관계를 나타내는 [B] 행렬은 다음과 같다.

$$[B_b] = [B_{b1}, B_{b2}, \dots, B_{b9}] \quad (5.a)$$

$$[B_s] = [B_{s1}, B_{s2}, \dots, B_{s9}] \quad (5.b)$$

$$[B_{bi}] = \begin{bmatrix} 0 & P_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & P_{i,y} \\ 0 & P_{i,y} & P_{i,x} \end{bmatrix}, i=1, 8 \quad (5.c)$$

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & P_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & P_i \end{bmatrix}, i=1, 8 \quad (5.d)$$

$$[B_{b9}] = \begin{bmatrix} P_{9,x} & 0 \\ 0 & P_{9,y} \\ P_{9,y} & P_{9,x} \end{bmatrix} \quad (5.e)$$

$$[B_{s9}] = \begin{bmatrix} P_9 & 0 \\ 0 & P_9 \end{bmatrix} \quad (5.f)$$

이 요소의 강성행렬은 선택적분방법을 사용하여 계산함으로써 Spurious Zero Energy Mode의 발생을 해결하였다.

Heterosis 요소는 개념적으로 식(4)와 (5)의 수식에 따라 요소 강성행렬이 계산되지만, 실제적으로는 9절점 평판 유한요소의 강성행렬을 이용하여 구할 수 있다.¹⁰⁾ 즉 선택적분방법을 사용하여 얻어진 9절점 요소의 강성행렬에서 요소내의 절점 자유도 중 수직변위를 고정시키면 Heterosis 요소의 강성행렬을 바로 계산할 수 있다.

3. 개선된 평판 유한요소

Hughes 등에 의하여 개발된 Heterosis 요소는 최근의 연구에서 Shear Locking 현상이 발생하는 것이 발표되었다.¹¹⁾ 즉 평판 구조물을 찌그러진 형상(Irregular Mesh)으로 모형화하여 해석하는 경우 두께가 매우 얇은 평판에서의 해석결과가 정확한 해로부터 이탈하였다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점의 완전한 제거를 위하여 비적합변위형의 추가방법과 감차적분방법을 혼합 사용한 개선된 평판 유한요소를 제시하였다.

비적합변위형의 추가는 요소내의 절점 변위수를 늘려줌으로써 Shear Locking 현상을 제거시킬 수 있으며, 평판요소의 수렴속도를 개선시키지만

추가 계산시간이 필요한 단점을 가지고 있다.¹⁰⁾ 따라서 요소의 정확도를 크게 떨어뜨리지 않는 한도내에서 비적합변위형의 추가를 최소화하고 감차적분방법을 사용하는 것이 바람직하다.¹²⁾

8절점 평판 유한요소에 추가가 가능한 비적합변위형의 형상함수는 다음과 같다.¹²⁾

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_3 = \xi\eta(1-\xi^2) \\ \bar{N}_4 &= \xi\eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)의 비적합변위형을 선택적으로 추가하기 위하여 수직변위에만 추가하는 경우에는 강성행렬의 계산시 비적합변위형의 미분치가 필요하게 된다. 그러나 \bar{N}_1 과 \bar{N}_2 의 미분치는 감차적분점에서 모두 Singular가 되고, \bar{N}_3 와 \bar{N}_4 는 ξ 와 η 에 대한 미분치가 감차적분점에서 일부 Singular가 되기 때문에 이들 4개의 비적합변위형($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4$)의 추가시 감차적분 방법의 사용은 사실상 불가능하다.¹³⁾

이와 반대로 비적합변위형을 회전변위에만 추가하게 되면 그 미분치가 불필요하므로 감차적분방법의 적용이 용이하게 된다. 따라서 본 연구에서는 후자의 방법을 택하여 요소의 변위성분을 다음과 같이 수식화하였다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_i N_i \begin{Bmatrix} z \theta_{xi} \\ z \theta_{yi} \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_j \bar{N}_j \begin{Bmatrix} z \bar{\theta}_{xj} \\ z \bar{\theta}_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

식(7)은 조밀한 형태(Compact Form)로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{d\} = \sum_i N_i d_i + \sum_j \bar{N}_j \bar{d}_j \quad (8)$$

여기서 \bar{d}_j 는 추가된 비적합변위형의 자유도로써 외력이 가해질 수 없는 변위이다. 비적합변위형의 추가로 원래의 힘-변위 관계식은 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \bar{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

비적합변위형의 추가로 확장된 강성행렬은 Static Condensation 기법을 사용하면 원래의 평판 유한

요소의 강성행렬과 같은 차수로 줄어들게 된다.

$$[K'] \{d\} = \{R\} \quad (10)$$

여기서

$$[K'] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^T \quad (10.a)$$

본 연구에서는 평판 유한요소의 개선을 위해 8절점 요소에 식(6)에 나타난 비적합변위형을 요소의 회전변위에 추가하였다. 또한 요소의 강성행렬의 계산은 전단강성의 계산만을 감차적분하는 선택적분방법을 사용하였다. 이러한 선택적분의 사용은 비적합변위형의 추가로 인하여 요구되는 계산시간의 증대에 대한 보상책이 되며, 아울러 Shear Locking 현상의 완전한 제거를 꾀할 수 있다. 본 연구에서 제시한 요소의 강성행렬 계산시 굽힘강성의 계산도 감차적분을 적용할 수 있으나, 이 경우에는 Spurious Zero Energy Mode의 발생을 초래하게 된다.¹⁴⁾ 따라서 이 요소의 강성을 일률적인 감차적분 방법으로 계산하는 것은 바람직하지 못하다.

식(6)의 추가 가능한 5개의 비적합변위형을 다양하게 적용하는 것이 가능하나, 본 연구에서는 $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_5$ 등 3개의 변위형을 추가한 요소(NC-QH)가 가장 우수한 결과를 보여주었다. 또한 Heterosis 요소는 \bar{N}_5 변위형만을 회전변위에 추가함으로써 구해질 수 있다. NC-QH 요소는 Heterosis 요소에 \bar{N}_1 과 \bar{N}_2 의 비적합변위형을 회전변위에 추가한 요소와 동일한 강성을 가지며, 찌그러짐 형상에서의 Shear Locking 현상을 완전히 제거시켰다. 따라서 이 요소는 Heterosis 요소의 가장 큰 단점을 제거시킨 개선된 Heterosis 요소라고 말할 수 있다.

본 연구에서 제시된 Mindlin 평판 유한요소(NC-QH: NonConforming Quadratic Heterosis)는 현재 널리 사용되고 있는 대표적인 요소들인 감차적분 8절점 요소(QSR: Quadratic Serendipity Reduced), 선택적분 9절점 요소(QLS: Quadratic Lagrange Selective), Heterosis 요소 등과 표1에서 비교검토 되었다. 또한 요소의 성능을 검증하기 위하여 대표적인 문제에 대한 수치해석이 수행되었다.

표 1. Quadratic Mindlin Plate Elements

Element Name		QSR	QLS	QHS	NC-QH
Shape	w	8-node	9-node	8-node	8-node
functions	θ_x, θ_y	8-node	9-node	9-node	9-node + \bar{N}_1, \bar{N}_2
Integration schemes	bending	2 × 2	3 × 3	3 × 3	3 × 3
	shear	2 × 2	2 × 2	2 × 2	2 × 2
Number of zero eigenvalues	total	4	4	3	3
	spurious	1(*)	1	0	0
Reference		[4]	[6]	[5]	This study

*Not communicable in a mesh of two or more elements.

4. 수치해석.

4.1. 요소의 고유치해석.

평판 유한요소들의 Spurious Zero Energy Mode의 발생유무를 판별하기 위하여 요소의 고유치해석(Eigenvalue Analysis)을 수행하였다. 표1에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 제시된 NC-QH 요소와 Heterosis 요소(QHS)는 요소의 강제운동(Rigid Body Motion)과 관련된 Zero Eigenvalue만을 가지며, 따라서 이 요소들은 Spurious Zero Energy Mode를 갖고 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 선택적분 9절점 요소(QLS)와 감차적분 8절점 요소(QSR)는 Spurious Zero Energy Mode를 가지고 있음을 알 수 있다.

4.2. 수렴도 해석

(1)정사각형 평판

개선된 요소(NC-QH)의 수렴도를 검증하기 위하여 단순지지와 고정지지 경계조건을 갖는

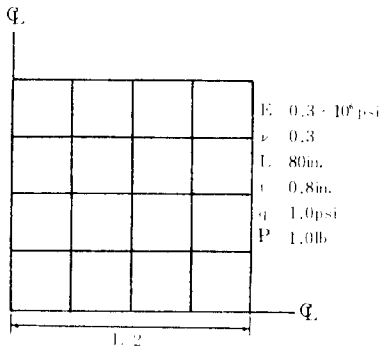


그림 2. Square Plate Model with Uniform Mesh (NEL = 16)

표 2. Results of Convergence Test for Thin Square Plates ($t/L = 10^{-2}$)

(a) Simply supported boundary condition

Load	uniform load				concentrated load			
	NEL							
Element	1	4	16	64	1	4	16	64
QSR	1.897	4.021	4.064	4.062	0.689	1.131	1.158	1.160
QLS	4.196	4.071	4.065	4.062	1.169	1.160	1.162	1.160
QHS	3.829	4.042	4.064	4.065	1.053	1.144	1.159	1.162
NC-QH	3.852	4.050	4.064	4.065	1.268	1.206	1.173	1.165
Theory[15]	4.062 ($\times qL^2 / 10^6 D$)				1.160 ($\times PL^2 / 10^6 D$)			

(b) Clamped boundary condition

Load	uniform load				concentrated load			
	NEL							
Element	1	4	16	64	1	4	16	64
QSR	1.564	0.788	1.259	1.262	6.263	3.690	5.570	5.651
QLS	1.543	1.279	1.268	1.262	6.181	5.636	5.638	5.651
QHS	1.543	1.239	1.264	1.268	6.177	5.415	5.592	5.629
NC-QH	1.545	1.268	1.267	1.268	7.404	6.040	5.747	5.666
Theory[15]	1.265 ($\times qL^2 / 10^6 D$)				5.612 ($\times PL^2 / 10^6 D$)			

정사각형 평판에 대한 수치해석을 수행하였다. 하중상태는 단위분포하중과 단위집중하중에 대해서 각각 고려하였다.

해석에 사용된 평판의 형상과 재료특성등은 그림2와 같으며, 해석결과는 표2에서 볼 수 있다. 본 연구에서 제시한 평판요소는 물론 다른 요소들도 요소의 수를 증가시켜 감에 따라 정확한 해에 빠르게 수렴함을 알 수 있다.

(2)원형 평판.

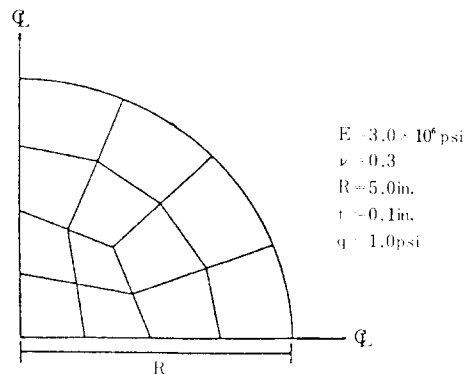


그림 3. Circular Plate Model (NEL = 12)

표 3. Results of Convergence Test for Thin Circular Plates under Uniform Load (t/R=1/50)

B/C	simple support				clamped support			
	NEL (%)							
Element	1	3	12	27	1	3	12	27
QSR	95.21	101.05	99.62	99.88	10.36	95.59	100.17	100.21
QLS	106.78	99.16	99.88	100.06	81.41	100.66	100.19	99.72
QHS	95.96	100.56	99.76	99.90	37.63	100.54	100.19	100.19
NC-QH	95.92	100.67	99.97	100.01	81.57	102.98	100.17	100.20
Theory [15]	100.00				100.00			

단위분포하중이 재하된 그림3과 같은 원형 평판에 대한 수치해석을 수행하였다. 해석은 단순 지지와 고정지지 경계조건을 갖는 경우에 대해서 각각 수행되었다.

해석결과를 표3에 나타나 있으며, 해석에 사용된 4개의 평판요소는 모두 원형 평판에 대해서 우수한 수렴성을 보여주었다.

4.3. Shear Locking Test

Shear Locking현상을 검증하기 위하여 단위분포하중이 재하되고 고정지지 경계조건을 갖는 정사각형 평판을 그림2와 같이 균등한 크기를 갖는 16개의 요소를 모형화하여 평판의 두께를 변화시켜 가면서 수치해석을 수행하였다. 또한 동일한 하중상태와 경계조건을 갖는 정사각형 평판에 대해서 그림4와 같이 찌그러진 형상을 갖는 16개의 요소로 모형화하여 Shear Locking

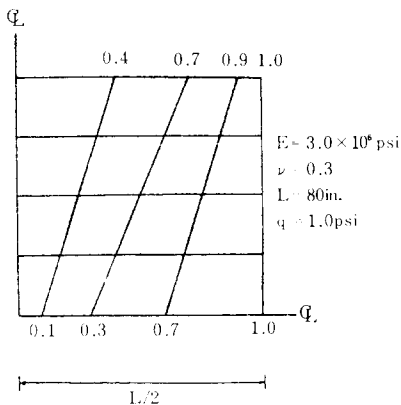


그림 4. Square Plate Model with Distorted Mesh (NEL = 16)

표 4. Results of Shear Locking Test for Square Plates (NEL = 16)

(qL^4 / 10^3 D)

Mesh type	uniform mesh			distorted mesh		
	t/L					
Element	10^-1	10^-2	10^-4	10^-1	10^-2	10^-4
QSR	1.505	1.259	0.122	1.505	1.242	0.011
QLS	1.505	1.268	1.266	1.506	1.264	1.236
QHS	1.505	1.264	1.257	1.505	1.257	0.457
NC-QH	1.506	1.267	1.265	1.506	1.267	1.263
Theory [15]	1.500	1.265	1.500	1.265		

Test를 수행하였다.

해석결과는 표4와 같으며, 본 연구에서 제시한 요소(NC-QH)와 QLS요소는 균등한 요소와 찌그러진 요소의 모형화에 대해서 항상 Shear Locking 현상이 발생하지 않았다. 그러나 QSR요소는 모든 경우에 평판의 두께가 얇아짐에 따라 Shear Locking 현상을 보여주며, QHS요소 역시 찌그러진 형상에 대해서는 그 해석결과가 정확한 해로부터 이탈함을 보여주었다.

4.4. 두꺼운 원형 평판의 해석

반경 5in.이고 두께가 2in.인 고정지지 경계조건을 갖는 원형 평판의 1/4을 12개의 요소로 그

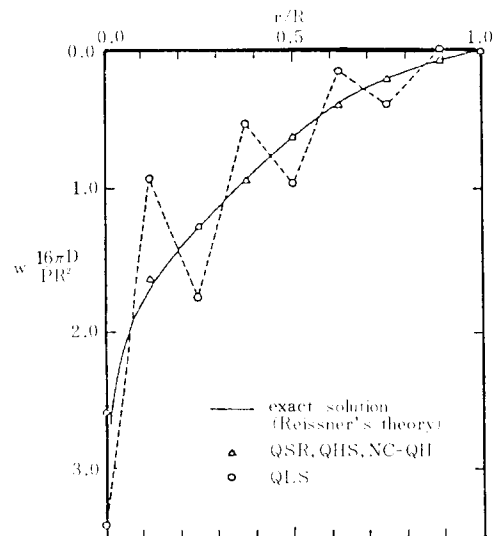


그림 5. Results for Analysis of Thick Circular Plate.

표 5. Comparisons of Quadratic Mindlin Plate Elements

Element name	QSR	QLS	QHS	NC-QH
Spurious zero energy mode	Yes	Yes	No	No
Overall accuracy	Good	Good	Good	Good
Shear locking for uniform mesh	Yes	No	No	No
Shear locking for distorted mesh	Yes	No	Yes	No

립3과 같이 모형화하여 단위집중하중이 재하된 수치 해석이 수행되었다. 그림5에 나타난 해석결과를 보면, 선택적분9절점 요소(QLS)의 변위는 Oscillation 함을 알수 있다. 이 현상은 Spurious Zero Energy Mode의 발생으로 인한 결과이다. 이에 반하여 본 연구에서 제시한 요소(NC-QH)와 QHS요소, 그리고 QSR요소는 올바른 결과를 보여주었다.

5. 결론

평판요소의 개선을 위하여 감차적분방법과 비적합변위형의 추가방법을 상호 보완적으로 혼합 사용한 개선된 Mindlin평판 유한요소(NC-QH)가 제시되었다.

본 연구에서 제시한 평판요소는 8절점 평판요소의 회전변위에만 3개의 비적합변위형($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$)이 추가되었고, 전단강성행렬의 계산에만 감차적분방법을 사용하는 선택적분방법이 사용되었다. 이 요소의 강성행렬은 또한 Heterosis요소의 회전변위에 \bar{N}_1 과 \bar{N}_2 를 추가하여 계산될 수도 있다.

본 연구에서 제안한 평판 유한요소는 표5에서 볼 수 있듯이 기존의 다른 요소들에서 나타나는 Shear Locking현상이나 Spurious Zero Energy Mode의 발생 등과 같은 문제점을 보여주지 않는다. 또한 이 요소는 많은 수치해석의 검증을 통해서 얇은 평판에서 부터 두꺼운 평판에 이르기 까지 매우 우수한 결과를 보여줌이 입증되었다.

<기호규약>

- E : Young의 탄성계수
- K^e : 요소 강성도 행렬
- L : 평판의 길이

- N_1 : 요소의 형상함수
- \bar{N}_j : 비적합변위형의 형상함수
- R : 힘 벡터
- t : 평판의 두께
- u, v, w : x, y, z방향의 변위성분
- w_1 : 절점에서의 수직변위
- x, y, z : Cartesian 좌표계
- α : 전단 단면계수
- ϵ_b : 굽힘관련 변형도
- ϵ_s : 전단관련 변형도
- θ_{x1}, θ_{y1} : 절점에서의 회전변위
- ν : 포아슨 비
- ξ, η : Curvilinear 좌표계

참고문헌

1. Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.18, pp.31-38, 1951.
2. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill Company, 1977.
3. Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanoknuchulchai, W., "A simple and efficient finite element for plate bending," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp.1529-1543, 1977.
4. Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., "A study of quadrilateral plate bending elements with 'reduced' integration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.12, pp. 1059-1079, 1978.
5. Hughes, T.J.R. and Cohen, M., "The heterosis finite element for plate bending," *Computers and Structures*, Vol.9, pp.445-450, 1978.
6. Hughes, T.J.R., Cohen, M. and Haroun, M., "Reduced and selective integration technique in the finite element analysis of plates," *Nuclear Engineering and Design*, Vol.46, pp.203-222, 1978.
7. Pawsey, S.F. and Clough, R.W., "Improved numerical integration of thick shell finite element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.3., pp.575-586, 1971.
8. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M.,

- "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.3, pp.275-290, 1971.
9. Hughes, T.J.R., "Recent developments in computer methods for structural analysis," *Nuclear Engineering and Design*, Vol.57, pp.427-439, 1980.
10. Choi, C.K. and Schnobrich, W.C., "Use of nonconforming modes in finite element analysis of shells," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 101, pp 447-464, 1975.
11. Lee, S.W. and Wong, S.C., "Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.18, 1297-1311, 1982.
12. Choi, C.K., "Reduced integrated nonconforming plate element," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.112, pp.370-385, 1986.
13. Choi, C.K. and Kim, S.H., "Improvement of degenerated plate / shell elements," *Proceedings of US-Korea Joint Seminar/Workshop on Critical Engineering Systems*, May11-15, 1987.
14. Choi, C.K. and Kim, S.H., "Reduced integration, nonconforming modes and their coupling in thin plate elements," *Computers and Structures*, Vol. 29, pp.57-62, 1988.
15. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill Company, 1959.

(접수일자 1988. 9. 1)