

光彈性法에 의한 圓弧形狀크랙을 갖는 圓板의 應力擴大係數에 관한 研究⁺

李致雨* · 金泰圭* · 楊長洪** · 吳世旭***

(1988年 9月 23日 接受)

A Photoelastic Study on the Stress Intensity Factor of Circular Disk with an Arc-Crack

Chi-Woo Lee, Tae-Gyu Kim, Jang-Hong Yang and Sae-Wook Oh

Key Words: Stress Intensity Factor(응력 확대 계수), Arc-crack(원 호 크랙),
Photoelastic Experimental Method(광탄성 실험법), Isochromatic Fringe
Pattern(등색선 무늬)

Abstract

The stress distribution in the vicinity of the crack tip in the fracture mechanics is ordinarily indicated by the stress intensity factor.

In the analysis of stress intensity factors, there are many theoretical and experimental methods. The stress analysis in photoelastic technique is usually made by using the difference of the principal stress of isochromatic fringe patterns.

In this paper, the teflon molding technique is adopted to make a test specimen with a circular arc-crack, and that upgraded the accuracy of experiment. As the result, the experimental values of the stress intensity factors for the circular disk with a straight crack are coincided with the theoretical values. But, there is quite a difference between this experimental results on the finite plate for circular arc-crack and its theoretical values on the infinite one. Therefore, a boundary condition with regard to the loading condition on finite disk must be considered.

+ 1987年度 韓國海洋工學會秋 季學術大會發表(1987年 12月)

* 正會員, 慶南大學校 工科大学 機械設計學科

** 正會員, 昌原 技能大學, 金型設計學科

*** 正會員, 東亞大學校 工科大学 機械工學科

1. 緒 論

크랙을 갖는 彈性體가 外力를 받을때 크랙先端附近의 應力分布 및 進展에 따른 破壞問題는 應力擴大係數(stress intensity factor) K 로 나타낼수 있음을 이미 잘 알려진 事實이다.¹⁾

이러한 應力擴大係數를 구하는 方法으로는 理論的인 方法과 實驗的인 方法이 있다. 특히, 크랙의 形狀이나 荷重條件이 複雜해지면 理論解析上의 境界條件이 不可能해 지므로 實驗的인 方法에 依存하는 경우가 많다. 實驗的인 方法중에서 光彈性實驗法²⁾은 等色線무늬(isochromatic fringe pattern)로 부터 直接 應力값을 구할 수 있고 試驗片全體의 應力狀態를 直接 觀擦할 수 있다는 長點 때문에 他 實驗法보다 널리 使用되고 있다.

任意形狀을 갖는 크랙에 대해서는 Hassainy等³⁾의 一連의 光彈性에 의한 實驗的인 研究가 있고 圓弧形狀크랙에 대한 研究로는 Muskhelishvily⁴⁾의 複素函數를 利用한 理論解析이 있으며 Savin⁵⁾, Paris 等⁶⁾의 引張應力를 받는 無限板의 理論解析이 있다. 또, 圓板의 直線크랙이 壓縮荷重을 받는 경우는 Kim等⁷⁾의 實驗的 研究가 있다.

本 研究에서는 中央集中荷重을 받는 圓板의 圓弧形狀크랙과 直線크랙에 應力擴大係數를 구하였다. 이때 圓板의 圓弧形狀크랙에 대해서는 Savin의 理論式을 適用하고 圓板의 直線크랙에 대해서는 Kim 및 Tweed 等⁸⁾의 實驗的인 研究結果와 比較 檢討 하였다. 또한, 圓弧形狀의 크랙을 加工하는 技法⁹⁾을 適用하여 實驗精密度를 向上 시켰다.

2. 基礎理論

2.1 圓弧形狀크랙을 갖는 無限板의 應力擴大係數

圓弧形狀크랙에 관한 Savin의 理論式은 다음과 같다⁵⁾.

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi R \sin \beta}}{2} \times \left[\frac{(1 - \cos 2\phi \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}) \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right]$$

$$+ \sin 2\phi \sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos(2\phi - \frac{3\beta}{2}) \quad (1)$$

$$K_{II} = \frac{\sigma \sqrt{\pi R \sin \beta}}{2} \times \left[\frac{(1 - \cos 2\phi \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}) \sin \frac{\beta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\beta}{2}} - \sin 2\phi \times \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin(2\phi - \frac{3\beta}{2}) \right]$$

여기서, R 및 β 는 圓弧크랙의 반경 및 圓弧角이고 ϕ 는 크랙의 傾斜角이다.

2.2 應力擴大係數를 決定하기 위한 理論式

混合型(mixed mode)下的 크랙先端附近에서의 應力分析을 決定하는 近似 理論式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) \\ &\times \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) - \sigma_{ox} \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \times \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{aligned} \quad (2)$$

K_I, K_{II} 는 Mode I, II의 應力擴大係數이고 r, θ 는 等色線 무늬의 注意거리 및 角度 σ_{ox} 는 有限板에서 發生되는 X 方向의 壓縮應力이다.

光彈性 무늬는 主應力差로 표시되므로 무늬差數 N , 試驗片두께 t , 光彈性感度 α 사이에는 다음式이 成立한다.

$$2\tau_{max} = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = \frac{N}{\alpha t} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{N}{\alpha t}\right)^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [(K_I \sin \theta + 2K_{II} \cos \theta)^2 + \\ &(K_{II} \sin \theta)^2] + \frac{2\sigma_{sx}}{2\pi r} \sin^2 \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta (1 + 2\cos \theta) \\ &+ K_I (1 + 2\cos^2 \theta + \cos \theta)] + \sigma_{ox}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

光彈性實驗에서 얻은 等色線을 利用하여 應力擴大係數를 推出하는 方法에는 몇 가지 方法¹⁰⁾이 提案되고 있으나 over deterministic least square method (ODLSM)가 많이 使用되고 있다. 여기서, 實質的으로 決定하여야 할 값들은 K_I, K_{II}, σ_{ox} 이다. 이 3個의 (r, θ) 값들이 필요하나 이렇게 구한 K_I, K_{II}, σ_{ox} 값들을 逆으로 理論的인

式에 대입하여 等色線을 圖示해보면 入力인 3個의 組合인 (r, θ) 점들은 만족되나 全體의으로는 전혀 다른 等色線이 그려지는 경우가 대부분이다. 따라서 많은 點의 組合인 여러 個의 (r, θ) 값을 入力하는 ODLSM을 이용하여 誤差를 極小化한다.

理論的의 τ_{max} 값과 實驗으로 구한 等色線上의 τ_{max} 값과의 差異가 어느 하나의 (r_k, θ_k) 에 대해서 아래와 같이 凡函數(F_k)의 形態로 쓸수 있다.

$$F_k(K_I, K_{II}, \sigma_{ox}) = \frac{1}{2\pi r_k} [(K_I \sin\theta_k + 2K_{II} \cos\theta_k)^2 + (K_{II} \sin\theta_k)^2] + \frac{2\sigma_{ox}}{\sqrt{2\pi r_k}} \sin\frac{\theta_k}{2} [K_I \sin\theta_k (1 + 2\cos\theta_k) + K_{II} (1 + 2\cos^2\theta_k + \cos\theta_k)] + \sigma_{ox}^2 - (\frac{N}{\alpha l})^2 = 0 \quad (5)$$

여기서, $k=1, 2, 3 \dots m$ 이며 m 은 等色線의 資料點數이고 $m > 3$ 이다. 誤差를 極小化 하기 위해 $\frac{\partial F_k}{\partial K_I}, \frac{\partial F_k}{\partial K_{II}}, \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ox}}$ 를 계산하여 最小제곱法의 一般過程을 따르면 된다. 즉 式(5)의 $F_k=0$ 로 놓고 最適의 K_I, K_{II}, σ_{ox} 를 反復法(iteration method)으로 결정하기 위해서 처음 推定한 값을 關係적으로 補正하기 위해 Taylor級數展開에 基準을 둔 反復方程式(iteration equation)으로 표시하면 다음과 같다.

$$(\Delta F_k)_{i+1} = (F_k)_i + (\frac{\partial F_k}{\partial K_I})_i \Delta K_I + (\frac{\partial F_k}{\partial K_{II}})_i \Delta K_{II} + (\frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ox}})_i \Delta \sigma_{ox} \quad (6)$$

여기서 i 는 i 번째 反復스텝이고 $\Delta K_I, \Delta K_{II}, \Delta \sigma_{ox}$ 는 $(i-1)$ 反復스텝의 推定값에 대한 補正값이다. 이 補正값들을 $(\Delta F_k)_{i+1}=0$ 로 두면 式(6)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-(F_k)_i = \Delta K_I (\frac{\partial F_k}{\partial K_I})_i + \Delta K_{II} (\frac{\partial F_k}{\partial K_{II}})_i + \Delta \sigma_{ox} (\frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ox}})_i \quad (7)$$

크랙先端附近의 等色線上에 $k=1, 2, 3, \dots m$ 個의 資料點을 선택한다고 하면 각각의 資料點에 대하여 式(7)을 行列式으로 쓸 수 있다.

$$[F] = [A][\Delta K] \quad (8)$$

여기서

$$[F] = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ -F_3 \\ \vdots \\ -F_m \end{bmatrix}_i$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial K_I} & \frac{\partial F_1}{\partial K_{II}} & \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ox}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial K_I} & \frac{\partial F_2}{\partial K_{II}} & \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{ox}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial K_I} & \frac{\partial F_3}{\partial K_{II}} & \frac{\partial F_3}{\partial \sigma_{ox}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial K_I} & \frac{\partial F_m}{\partial K_{II}} & \frac{\partial F_m}{\partial \sigma_{ox}} \end{bmatrix}_i$$

$$[\Delta K] = \begin{bmatrix} \Delta K_I \\ \Delta K_{II} \\ \Delta \sigma_{ox} \end{bmatrix}$$

式(8)의 $[\Delta K]$ 를 極小化 시키기 위해 兩近에 前置行列 $[A]^T$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$[A]^T[F] = [A]^T[A][\Delta K]$$

따라서

$$[\Delta K] = [[A]^T[A]]^{-1}[A]^T[F] \quad (9)$$

가 된다.

式(9)를 利用한 컴퓨터 프로그램을 作成하여 初期推定값 K_I, K_{II}, σ_{ox} 로 收斂시킬 수 있다. 이렇게 하여 얻은 實驗決定값 K_I, K_{II}, σ_{ox} 를 理論解에 대입하여 等色線을 比較해 보면 같은 값이 나타남을 알 수 있다.

3. 試驗片製作 및 實驗方法

3.1 試驗片製作

예리한 凹弧形크랙을 製作하기 위하여 에폭시 樹脂(epoxy resin)와 테프론(teflon)이 서로 接着

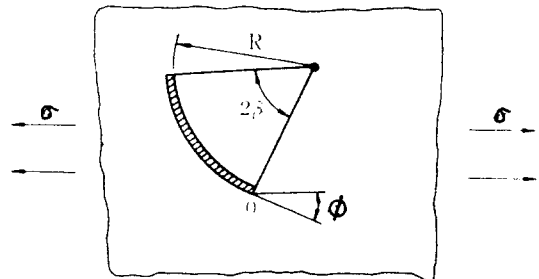


Fig. 1 Geometry of a plate containing a circular arc-crack

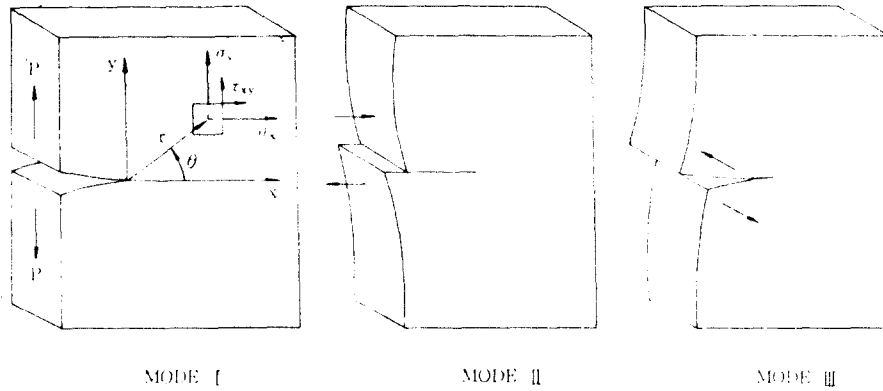


Fig. 2 Modes of crack opening

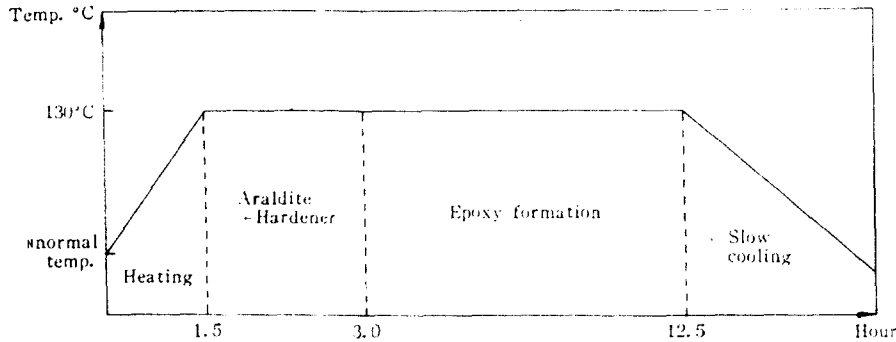


Fig. 3 Curing cycle in furnace

되지 않는 性質을 利用하여 크랙과 試驗片을 다음
고 같이 製作하였다.

1) 모울딩箱子(molding box)를 製作하고 任意
의 圓弧角 β 을 얻기 위해 테프론의 길이 $l=2\pi R$
 $\beta/180$ 로 하고 投像길이 $a=R\sin\beta$ 로 한다.

2) 모울딩箱子가 水平이 되게 調整하고 完全한
圓弧形狀이 될 수 있도록 上下部分에 引張力을 주
어 完全히 固定시킨다.

3) 모울딩箱子 바닥部 및 틈새部 위에 溶解된
에폭시가 누설되지 않고 凝固할때 모울딩箱子和
쉽게 分離될 수 있게 하기 위해 실리콘(KE1300)
液을 도포 한다.

4) 完全히 溶解된 아랄다이트(Araldite)와 硬化
劑의 混合液(重量比 10:3)을 모울딩箱子에 注入
하고 수시로 氣泡를 除去 한다.

5) Fig. 3과 같은 溫度變化에 따라 에폭시板
(epoxy plate)내에서 모울딩 한다.

6) 凝固된 에폭시 圓板을 平面研削機에서 一定

한 두께로 機械加工한 후 1200 샌드페이퍼로 表
面加工 하고 加工應力을 除去하기 위해 前項의 溫
度變化를 주어 풀림 處理한다.

最終적으로 제작된 試驗片의 形狀과 치수는
Fig. 4와 같다.

3.2 實驗方法

光彈性 等色線의 撮影은 單色用 黑百필름
(ASA10)을 使用하여 光源100의 水銀燈(546 Å)
으로 15~20s로 露出시켜 필터에 의한 單色光을
얻도록 하였다. 實驗의 誤差를 最小化하기 위하여
常溫20°C의 空溫零圍氣下에서 實驗을 하였다. 또
time effect를 防止하기 위하여 크랙加工 즉시 實
驗을 행하였다. 實驗裝置는 Fig. 5와 같다.

정확한 무늬를 얻기 위하여 加工된 試驗片 表面
에 α -bromnaphthalene과 액체파라핀混合液(容
積比1:0.58)을 塗布하여 表面粗度에 따른 무늬의
屈曲을 除去하였다. 이 混合液을 塗布한 試驗片을

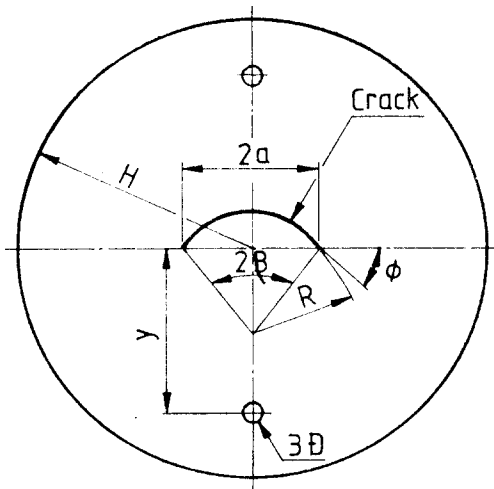


Fig. 4 Crack configuration by teflon molding method

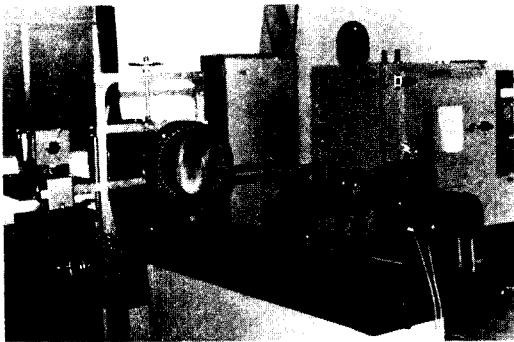
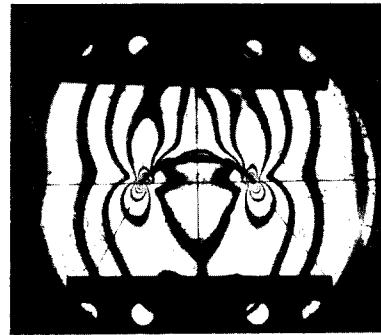


Fig. 5 Photoelastic experimental apparatus

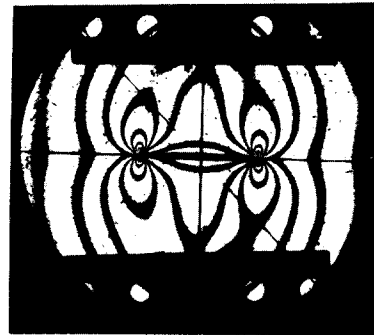
光彈性實驗裝置에 一定한 比重이 加해지도록 하고 녹색필터를 除去하고 0次部分을 정확히 判讀하였다. 이와같이 얻은 等色線寫眞에서 1/1000mm까지 測定 可能한 optical comparator를 使用하여 필요한 結果值(r, θ)를 測定한다. 여기서 測定한 結果를 決定式(9)에 代입하여 應力擴大係數를 구한다.

4. 實驗結果 및 考察

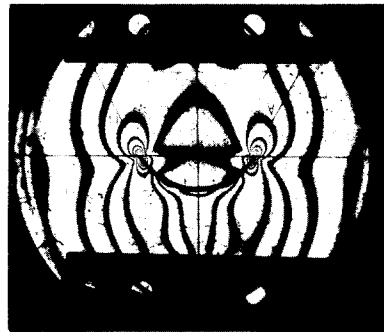
Fig. 6은 直線 및 圓弧形 크랙을 가지는 圓板이 引張荷重을 받은 경우의 光彈性 等色線 무늬를 나타내고 Fig. 7은 같은 크기의 壓縮荷重을 받을때 直線 및 圓弧形크랙의 圓弧角 β 에 따른 光彈性 等色線 무늬이다. 또, Fig. 8은 中央直線크랙을 갖는 圓板이 壓縮荷重을 받을때 크랙傾斜角 ϕ 에 따른 光彈性무늬 이다. 이때 크랙의 投影길이는 공



a) $\beta = 0^\circ$



b) $\beta = 45^\circ$



c) $\beta = 60^\circ$

Fig. 6 Fringe patterns for tensile stress

히 $a = 15mm$ 가 되게하였고 作用荷重 $p = 120kg$, 圓板直徑 $2H = 100mm$, 圓板두께 $t = 4.6mm$ 이다.

또한, 에폭시 樹脂의 光彈性感度は $\alpha = 0.71 mm/kg$ 이다. Fig. 9는 壓縮荷重을 받는 圓板의 中央直線크랙에 대한 無次元化應力擴大係數($F_I = K_I/K_0, F_{II} = K_{II}/K_0$)를 나타내었다. 이때의

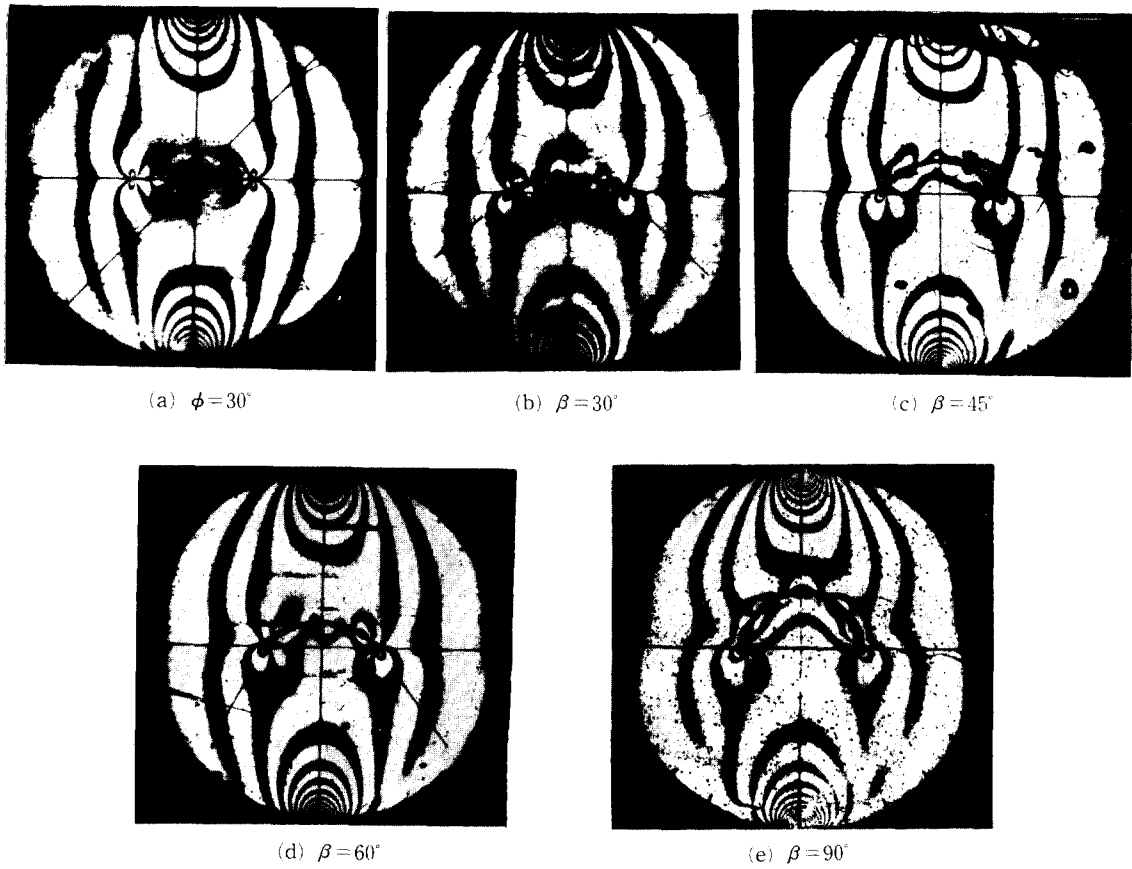


Fig. 7. Fringe patterns for compressive stress

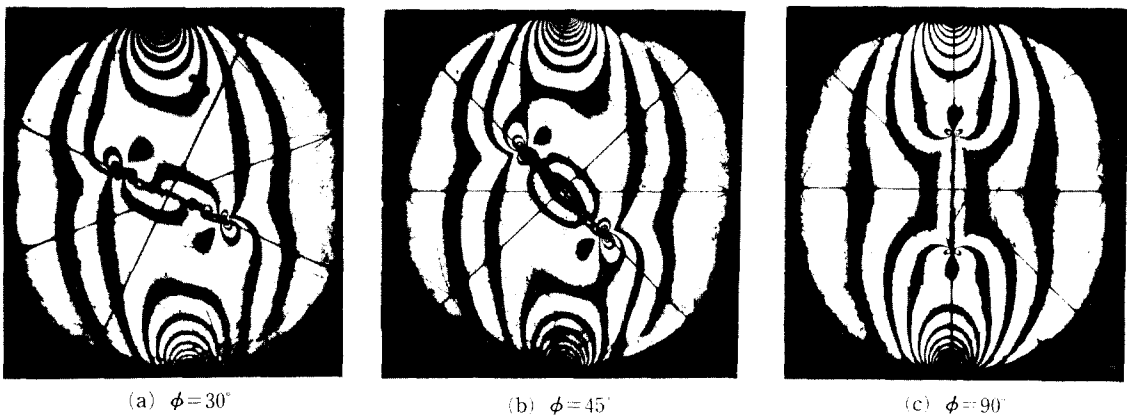


Fig. 8. Fringe patterns for compressive stress

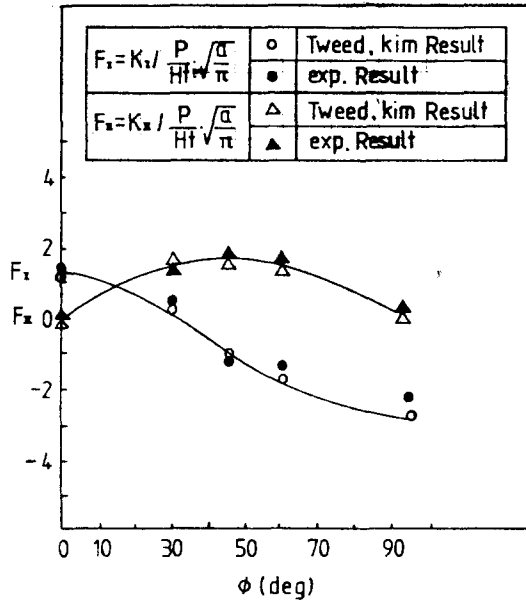


Fig. 9 S.I.F. of an internal crack in a disk subjected to compressive stress

$$K_0 = \frac{P}{Ht} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

이 결과에서 F_I 값은 Tweed⁸⁾, Iside⁹⁾, Kim 등¹⁰⁾의 研究結果와 잘 一致함을 알 수 있고 K_{II} 값은 크랙傾斜角 ϕ 가 60° 以上에서 增加하는 現狀이 나타나는데 크랙先端과 荷重支持点間의 거리가 극히 짧아지는 有限圓板의 영향으로 보여진다. 특히, Yarema¹²⁾의 積分方程式에 의한 壓縮圓板의 直線크랙에 대한 curve fit는 다음 式과 같고 本 實驗의 結果와 約6%의 差異가 發生되었다.

$$K_{II} = \frac{P}{Ht} \left[0.5711 \left(\frac{a}{1-\xi} \right)^{1/2} (1 - 0.60387\xi + 1.67239\xi^2 - 1.16988\xi^3) \right] \quad \left(\xi = \frac{a}{H} \right)$$

Fig. 10은 圓弧形크랙을 갖는 圓板의 引張應力에 대한 無次元化($K_0 = \frac{P}{Ht} \sqrt{\frac{R \sin \beta}{\pi}}$) 應力 擴大係數 F_I , F_{II} 을 나타내고 있다. F_I 은 圓弧角 β 의 增加에 따라 急激히 減少하고 F_{II} 는 直線크랙과 같이 圓弧角 $\beta = 45^\circ$ 에서 最大값을 가진다. 이 結果는 Savin의 無限平板에서의 均一引張應力을 받는 경우와 比較해 보면 F_I , F_{II} 의 경향은 같으나 크기는 상당한 差異가 있음을 알 수 있다. 이 現象은 Savin의 無限平板과는 荷重狀態에 따른 境界條件이 다르고 半無限圓板의 狀態에서 引

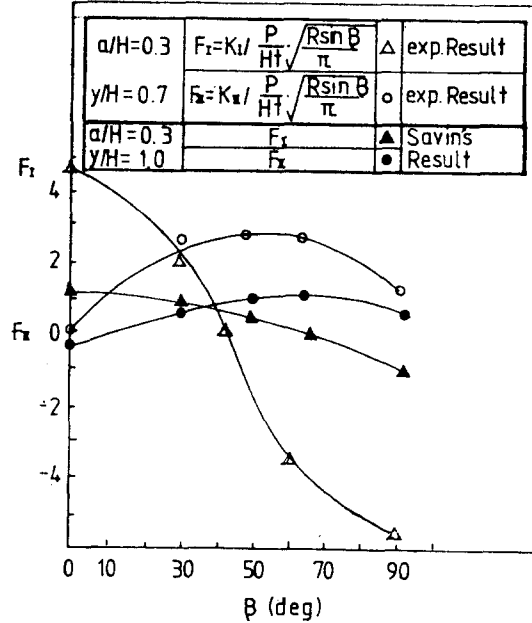


Fig.10 S.I.F. of a circular arc-crack in a disk subjected to tensile stress

張應力을 加하기 위해 圓板內部에 加工한 구멍의 영향임을 알 수 있다. 圓弧角 $\beta = 0^\circ$ 인 直線크랙에서 Rooke, Tweed의 結果는 $F_I = 3.66$, $F_{II} = 0.09$ 값으로 約 14%의 誤차가 나타났다. 이때 Rooke, Tweed의 結果는 $\frac{y}{R} = 1.0$ 이고 本 實驗에서는 $\frac{y}{H} = 0.7$ 인 경우이므로 同一한 $\frac{y}{R}$ 이라면 잘 一致할 것으로 생각된다. 여기서, H 는 圓板의 半徑, y 는 引張荷重을 加하기 위해 加工한 구멍까지의 거리이다.

Fig. 11은 圓弧形 크랙의 壓縮應力狀態에 따른 F_I , F_{II} 값을 나타내고 있다. F_I 은 圓弧角 β 의 增加에 따라 漸次 減少하나 F_{II} 는 $\beta = 45^\circ$ 에서 最大값을 가진다. 圓弧形크랙의 引張과 壓縮應力狀態에 따른 結果는 상당한 差異를 나타내었는데 壓縮應力狀態에서는 圓板의 壓縮現象으로 인한 크랙의 닫힘 現象의 影響에 기인한 것이고 引張應力은 圓板에서의 引張荷重을 加하기 위해 부득이 圓板의 內부에 구멍을 두어야 하므로 負荷條件이 引張과 壓縮이 同一하지 않는데 그 原因이 있다.

5. 結 論

圓弧形狀 크랙과 直線크랙을 갖는 圓板이 引張

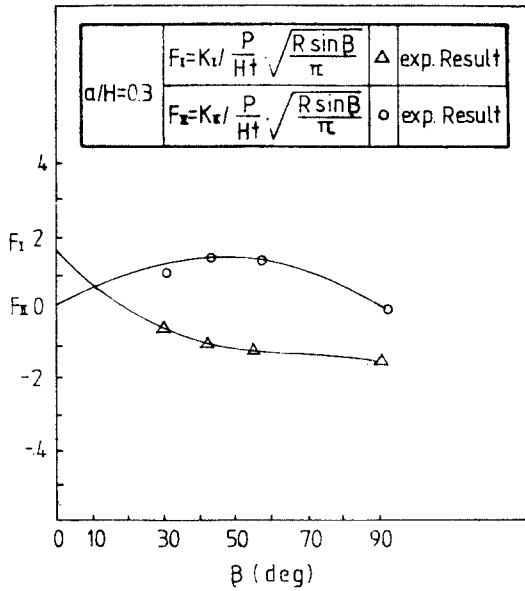


Fig. 11 S.I.F. of a circular arc-crack in a disk subjected to compressive stress

應力과 壓縮應力荷의 單軸荷重을 받는 경우의 應力擴大係數를 光彈性法으로 實驗하여 다음과 같은 結果를 얻었다.

- 1) 테프론몰딩法을 이용하여 圓弧形狀과 같은 복잡한 크랙을 精密度 높게 製作할 수 있어 實驗的 解析의 精密度를 기할 수 있었다.
- 2) 直線크랙에 대한 壓縮應力狀態의 경우 종래의 實驗結果와 잘 一致한다.
- 3) 圓弧形크랙에 대한 結果는 無限平板에 대한 Savin의 理論解析結果와 상당한 差異가 생기는데 이것은 荷重狀態에 따른 影響으로 境界條件을 充分히 고려함이 타당하다.

參 考 文 獻

- 1) Irwin, G. R., "Discussion of Ref.2 Proc. of SESA", pp.93-96, 1958
- 2) Paipetis, S.A. and G.S.Holister, "Photoelasticity in Engineering Practice",

Elsevier Appl. Sci. Pub., 1985

- 3) Hussainy, S. A., H. Mohamed Hossem and Bhagavan, "Stress Distribution in the Vicinity of Slender Notches Having Arbitrary Shapes", Exp., Mech., pp.46-48, 1970
- 4) Muskhelishvili, N. I. "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity", P.N. Noordhoof Ltd., pp.303-338, 1953
- 5) Savin, G. N., "Stress Distribution Around Holes", NASA Technical Translation, NASA. TTF6071, Chap. III, 1970
- 6) Paris, P. S., G.C. Sih and F. Erodogan, "Crack tip Stress Intensity Factors for Plane Extension and Plane Bend Problems", J. Appl. Mech, 29, 1962
- 7) Kim, S. C. and H. K. Kitagawa, "A Method of Determination of Mixed Mode Fracture Toughness of Brittle Materials under Compression", Proc. of Int. Conf.on Frac. Vol. II, 1977
- 8) Tweed, J. and D. P. Rooke, "The Stress Intensity Factors of a Radial Crack in a Point Loaded Disk", Int. J. Engng. Sci., pp. 285-290, 1973
- 9) 崔善浩, 黃在錫, 蔡泳哲, "Teflon Molding 法에 의한 S.I.F의 光彈性 實驗解析", 大韓機械學會論文集, 第7卷, pp. 1-10, 1983
- 10) Smith, D. G. and C. W. Smith, "Photoelastic Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors", Eng. Frac. Mech., pp. 357-366, 1972
- 11) Sanford, R. J. and J. Dally, "Stress Intensity Factors in the Stage Fan Disk of the T.F.30 Turbine Engine" Naval Research Laboratory Washington D.C., 1978
- 12) Yarema, S. Y., "Analysis of Cracked Disk Specimens", Eng. Frac. Mech.12, pp.365-375, 1979