

협대역 신호의 입사각 추정

尹 大 熙

(正 會 員)

延世大學校 工科學大學 電子工學科 助教授

I. 서 론

Array signal processing에서 여러 센서들로 구성된 array에 받아들여진 평면파들에 대한 입사각을 결정하는 문제는 소나, 레이더와 지구 물리학 분야에서 중요시 되는 문제들 중의 하나이며, 수학적으로는 방사장(radiation field)의 공간영역 스펙트럼을 추정하는 것과 동일하다.^[1,4] 평면파의 입사각을 추정하는 방법에는 일반적으로 Bartlett 방법,^[1] MV(minimum variance) 방법,^[3,7] LP(linear prediction) 방법,^[1,2] MUS-IC(multiple-signal-classification) 방법,^[1,2,6] EVB(eigen-vector-based) 방법^[1,2] 등이 연구되어 왔다. 스펙트럼 추정의 평가 기준은 대개 3 가지 영역으로 분류된다. 첫째는 분해능(resolution)으로서, 매우 가까이 인접한 에너지원들(energy sources)의 구별 능력을 나타낸다. 둘째는 추정오차(estimate bias)로서, 추정된 스펙트럼의 정확도를 나타낸다. 세째는 일관성(consistency; 때로는 변화성 variability)으로서, 추정된 스펙트럼이 data independent 한 정도를 나타낸다. 대개 분해능과 추정 오차는 서로 trade-off 관계에 있게 되어서 분해능의 향상 및 추정 오차의 감소는 각각 추정 오차의 증가 및 분해능의 저하를 초래한다. 한편, 일관성을 평가하기는 매우 어렵지만 variance에 대한 Cramer-Rao lower bound를 이용한다.^[1]

II. 신호의 모델링(Signal Modeling)

입사 신호를 모델링하기 앞서 세가지를 가정한다. 첫째, 입사되는 신호는 평면파(plane-wave)라 가정한다. 둘째, 센서는 등간격(equal distance)이라 가정한다. 세째, 관심있는 신호는 중심 주파수가 f_0 (Hz)로 주어지는 협대역(narrow band) 신호로서, 여러 각

도로 입사된 신호간에는 상관관계(correlation)가 없다고 가정한다.

위의 세가지 가정에서 첫째의 경우 신호원이 센서에서 충분히 떨어져 있는 경우 적용된다. 하지만, 둘째와 세째의 경우 각각, 기하학적 문제와 동일 신호원에서 발생한 신호의 반사등에 의한 다선로(multipath) 문제가 발생하므로 설득력이 부족하지만, 이에 대한 연구는 뒤로 미루고 세가지 가정을 받아들여서 문제를 해석하기로 한다.

1. 단일 신호의 모델링

이해를 돕기 위해 진폭 A, 주파수 f_0 인 단일 정현파 $s(t) = A \sin 2\pi f_0 t$ 가 속도 c, 입사각 θ_0 로 ($-k_0$ 방향) 그림 1과 같이 입사된다고 하자. 그림 1에서 Z_m 은 m번째 센서의 위치벡터, $-k_0$ 는 입사방향 벡터, i_z 는 z축의 단위 벡터를 나타낸다.

그림 1에서 보듯이 센서 어레이의 축을 z축이라 하면, $t = t_0$ 에서 기준센서 Z_0 가 $s(t_0)$ 를 받아들일 때 m번째 sensor Z_m 에서는 거리 L만큼 파가 진행한 후에 $s(t_0)$ 와 동일한 값을 받아들인다. 즉, L/c 만큼의 시간 지연이 생긴다.

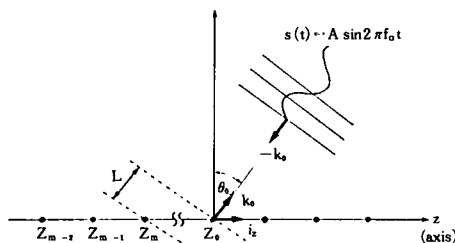


그림 1. 입사 신호와 센서의 기하학적 표현

그림 1에서 $L = \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_0$ 이고, 센서간격은 d 로 동일하므로 $\mathbf{Z}_m = -md \mathbf{i}_z$ 가 된다.

따라서, m 번째 sensor에서 받아들인 순간 값(snapshot)은 잡음을 무시한다면 다음과 같다.

$$x_m(t) = s\left(t + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_0}{c}\right) \quad (m=0, 1, \dots, M-1; M \text{은 센서 수}) \quad (1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_0 &= |\mathbf{Z}_m| |\mathbf{k}_0| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0\right) \\ &= -md \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0\right) \\ &= md \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (2)$$

따라서, $t = t_0$ 에서 m 번째 sensor의 순간값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_m(t_0) &= A \sin 2\pi f_0 \left(t_0 + \frac{md}{c} \sin \theta_0\right) \\ &= A \sin \left[2\pi \left(\frac{f_0 d \sin \theta_0}{c}\right) m + 2\pi f_0 t_0 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

위식을 sensor 축, 즉, 공간 축(spatial axis)에서 보면 진폭이 A , 위상 $2\pi f_0 t_0$, 주파수 $f_0 d \sin \theta_0 / c$ 인 정현파를 샘플간격(sampling interval)을 1로 샘플링한 것과 동일하다. M 개의 센서를 이용한 공간영역 샘플링을 도시하면 그림 2와 같다.

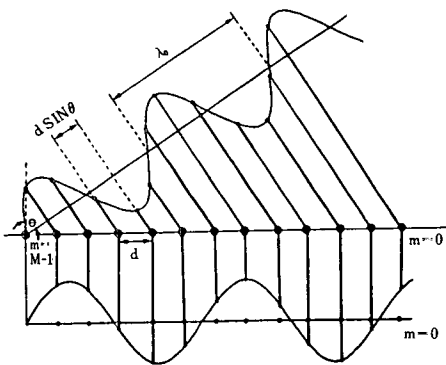


그림 2. 시간영역 정현파의 공간영역 샘플링

Aliasing 문제를 해결하기 위해서 공간 영역 주파수를 $\beta = f_0 d \sin \theta_0 / c$ 라 하면, β 는 Nyquist frequency $= f_s / 2$ 보다 작아야 한다.

즉,

$$\beta = \frac{f_0 d}{c} \sin \theta_0 \leq \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2} \text{ 이 되며, } |\sin \theta_0| \leq 1$$

이므로,

$$\frac{f_0 d}{c} = \frac{f_0 d}{f_0 \lambda_0} = \frac{d}{\lambda_0} \leq \frac{1}{2},$$

따라서

$$d \leq \frac{\lambda_0}{2} \quad (4)$$

즉, aliasing을 방지하기 위해서 sensor간의 간격은 신호의 반파장 보다 작아야 한다. 결국, 문제는 “주어진 M 개의 샘플 $x_m(t)$ 를 가지고 입사각 θ 를 추정할 수 있는가?”로 되며 이는 주파수 영역의 스펙트럼 추정 알고리즘으로 구할 수 있다. 즉, 공간영역 주파수 $\beta = (d/\lambda_0) \sin \theta_0$ 를 구할 수 있고 이를 통해 $\theta = \sin^{-1}(\beta \lambda_0 / d)$ 를 구한다.

2. 일반적인 신호의 모델링

1절의 결과를 일반적인 경우로 확장하면 다음과 같다. M 개의 sensor로 구성된 선형 어레이에 주파수 f_0 인 p 개의 협대역 평면파가 ($M > p$) θ_k ($k=1, 2, \dots, p$)의 각도로 입사되고 있을 경우, m 번째 sensor에서 받은 신호는 다음과 같다.

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^p s_i \left(t + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i}{c}\right) + n_m(t) \quad (5)$$

여기서 $-\mathbf{k}_i$ 는 i 번째 신호의 방향 벡터이고 $n_m(t)$ 는 m 번째 sensor에서의 첨가 잡음으로서 입사 신호와 상관관계가 없다고 가정한다.

III. 스펙트럼 추정 알고리즘

1. Beamforming과 Bartlett 방법^(4,7)

그림 3과 같은 conventional beamformer를 생각하자.

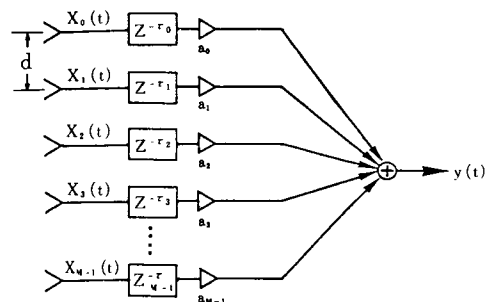


그림 3. Conventional beamformer

그림 3에서 처럼 conventional beamformer에서는 m번째 sensor의 출력 $x_m(t)$ 가 $\tau_m (m=0, 1, \dots, M-1; M$ 은 센서수) 만큼 delay 되고 a_m 만큼 weighting 된 후 합해져서 출력 $y(t)$ 를 형성한다.

즉,

$$y(t) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m x_m(t - \tau_m) \quad (6)$$

여기서

$$\tau_m = \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}}{c} \quad (m=0, 1, \dots, M-1; M \text{은 센서의 수})$$

이다.

즉, beamforming의 원리는 원하는 방향 벡터에 대해 sensos간의 time delay τ_m 을 보상해 주어서 그 방향의 신호를 강조하며, 다른 방향의 신호나 잡음은 강조하지 않음으로써 SNR(signal-to-noise ratio)을 향상시키는데 있다.

즉, 각 sensor의 delay된 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_m(t - \tau_m) &= \sum_{i=1}^P s_i \left(t + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i}{c} - \tau_m \right) + n_m(t - \tau_m) \\ &= \sum_{i=1}^P s_i \left(t + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot (\mathbf{k}_i - \mathbf{k})}{c} \right) + n_m(t - \tau_m) \end{aligned} \quad (7)$$

따라서 어떤 신호의 입사방향 $-\mathbf{k}_i$ 에 대한 time delay

$\frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i}{c} (m=0, 1, \dots, M-1)$ 항과 일치하는 τ_m 값에 대해

$$\begin{aligned} x_m(t - \tau_m) &= s_j(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P s_i \left(t + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i}{c} - \tau_m \right) + \\ & \quad n_m(t - \tau_m) \end{aligned} \quad (8)$$

$(m=0, 1, \dots, M-1)$

이 되므로 beam 출력은, weighting 계수 $a_m=1$ 이라면

$$y(t) = M s_j(t) + \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P s_i \left(t + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i}{c} - \tau_m \right) + n_m(t - \tau_m) \right) \quad (9)$$

가 되어서 $y(t)$ 에서 $-\mathbf{k}_j$ 방향의 신호 power는 M^2 배가 되고 다른 방향의 나머지 $p-1$ 개의 신호와 잡음의 power는 M 배가 된다. 따라서 모든 τ_m 에 대해서(결국, 모든 \mathbf{k} 에 대해서) $y(t)$ 를 구한 후 그 power를 τ_m 에 대한 좌표(결국, θ_i 에 대한 좌표)에 도시하면 모두 p 개의 peak가 생길 것으로 기대되며, 이 τ_m 에 해당되는 \mathbf{k} 가 신호의 입사 방향이 되는 것이다.

주파수 영역에서 생각해 보면 다음과 같다.

$X_m(t)$ 의 Fourier 변환(Fourier transform; FT)를 $X_m(f)$ 라 하면 출력 $y(t)$ 의 FT는 식(6)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y(f, \mathbf{k}) &= \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp[-j2\pi f \tau_m] X_m(f) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp\left[-j2\pi \left(\frac{f}{c}\right) \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}\right] X_m(f) \end{aligned} \quad (10)$$

식(5)에서 첨가 잡음을 무시한 경우의 $X_m(f)$ 는 식(11)과 같으므로 식(10)은 식(12)와 같이 된다.

$$X_m(f) = \sum_{i=1}^P S_i(f) \exp\left[j2\pi \left(\frac{f}{c}\right) \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i\right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Y(f, \mathbf{k}) &= \sum_{i=1}^P S_i(f) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot \\ & \quad \exp\left[-j2\pi \left(\frac{f}{c}\right) \mathbf{Z}_m \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_i)\right] \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $S_i(f)$ 는 입사신호 $s_i(t)$ 의 FT이다.

예를 들어서 그림 1에서와 같은 선형 등간격 어레이(linear equispaced array)에서는 앞에서 보인바와 같이 $\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i = md \sin \theta_i (i=1, 2, \dots, p)$ 이고 $c=f\lambda$ 이므로 식(12)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} Y(f, \mathbf{k}) &= \sum_{i=1}^P S_i(f) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot \\ & \quad \exp\left[-j2\pi \left(\frac{f}{c}\right) md (\sin \theta - \sin \theta_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^P S_i(f) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot \\ & \quad \exp\left[-j2\pi \frac{md}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_i)\right] \end{aligned} \quad (13)$$

(12),(13)식에서 부터 \mathbf{k}_i (결국, θ_i)에 대한 beam 에너지는 $\int |Y(f, \mathbf{k})|^2 df$ 로 주어지고 이 beam 에너지가 최대가 되는 곳이 신호의 입사각이 된다. 여기서는 관심있는 중심 주파수(또는, 전송 주파수)를 가진 협대역 신호에 대해서 생각하기로 한다.

협대역 신호에 대해서는 그 신호의 중심 주파수에 모든 에너지가 집중되어 있다고 볼 수 있으므로 관심있는 중심 주파수가 f_0 이라면, i 번째 ($i=1, \dots, p$) 신호의 FT는 $S_i(f) = \sigma_{s_i} \delta(f - f_0)$ 로 표현할 수 있다.

따라서,

$$\begin{aligned}
 P(f_0, \mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f_0, \mathbf{k})|^2 df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^P S_i(f) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot \right. \\
 &\quad \left. \exp\left[-j2\pi\left(\frac{f_0}{c}\right) \mathbf{Z}_m \cdot (\mathbf{k}-\mathbf{k}_i)\right] \right|^2 df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^P \sigma_{s_i} \delta(f-f_0) \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot \right. \\
 &\quad \left. \exp\left[-j2\pi\left(\frac{f_0}{c}\right) \mathbf{Z}_m \cdot (\mathbf{k}-\mathbf{k}_i)\right] \right|^2 df \\
 &= \sum_{i=1}^P \sigma_{s_i}^2 \left| \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cdot \right. \\
 &\quad \left. \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda_0} \mathbf{Z}_m \cdot (\mathbf{k}-\mathbf{k}_i)\right] \right|^2 \quad (14)
 \end{aligned}$$

이 결과를 matrix 형태로 표현할 수 있다. 다음 두가지 matrix를 정의한다.

\mathbf{X} 는 array 출력의 temporal FT를 element로 하는 column vector이고 \mathbf{A} 는 다음과 같은 element를 갖는 column vector로서 "steering vector"라 한다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0(f) \\ X_1(f) \\ \vdots \\ X_m(f) \\ \vdots \\ X_{M-1}(f) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \\ \vdots \\ A_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^* \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{k}\right) \\ a_1^* \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{k}\right) \\ \vdots \\ a_m^* \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}\right) \\ \vdots \\ a_{M-1}^* \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_{M-1} \cdot \mathbf{k}\right) \end{bmatrix}$$

여기서 (*)는 복소수의 conjugate operator이다.

그러면 $Y(f, \mathbf{k}) = \mathbf{A}^H \mathbf{X}$ 가 된다.

여기서 (H)는 conjugate transpose operator이다.

이때 \mathbf{k} 방향으로의 beam 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{k}) &= E[|Y(f, \mathbf{k})|^2] \\
 &= E[|\mathbf{A}^H \mathbf{X}|^2] \\
 &= \mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서 $E(\cdot)$ 는 expectation operator이고, $\mathbf{R} = E(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)$ 은 sensor 출력의 공간영역 correlation matrix이다.

식(5)에서 첨가 잡음을 고려한 경우에는

$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^P \sigma_{s_i} \mathbf{S}_i + \sigma_n \mathbf{N}$ 이 되고, 여기서

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{k}_i\right) \\ \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{k}_i\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_{M-1} \cdot \mathbf{k}_i\right) \end{bmatrix}$$

이다.

Weight $a_m = 1$ 로 한 경우, 즉, sensor의 gain이 1로 균일한 경우를 "Bartlett 방법"이라 하며, 이때는

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{k}\right) \\ \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{k}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_{M-1} \cdot \mathbf{k}\right) \end{bmatrix}$$

가 되어서, $P_{\text{BART}}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}^H \mathbf{R} \mathbf{E}$ (16)

여기서 \mathbf{E} 는 $-\mathbf{k}$ 방향으로 진행하는 ideal 평면파를 나타낸다.

2. MV (Minimum Variance) 방법^[1,4,7]

MV 방법은 ML (maximum-likelihood) 방법 이라고도 하는데,^[2] Capon에 의해 처음으로 제시 되었으며, 주로 다차원 seismic array 신호들의 frequency wave-number 분석에 주로 이용되었다.^[4,7] 이 방법은 임의의 방향 $-\mathbf{k}_i$ 로 입사되는 평면파에 대한 beam gain은 1로 하고 다른 방향으로 입사되는 신호나 잡음의 beam gain은 최소화 시키는 steering vector \mathbf{A} 를 찾는 것이다.

즉, \mathbf{E} 가 입사 방향에 대응되는 ideal 평면파를 나타내는 벡터일때, $\mathbf{A}^H \mathbf{E} = 1$ 을 만족하면서 1절에서 얻은 전체 beam 에너지 $\mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A}$ 를 최소화하는 \mathbf{A} 를 구하는 것이다.

최적 \mathbf{A} 를 구하기 위한 비용함수(cost function)는 다음과 같다.

$$F_{MV} = \mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} + \lambda_{MV} (\mathbf{A}^H \mathbf{E} - 1) \quad (17)$$

여기서 λ_{MV} 는 Lagrange multiplier이다. 위 비용함수를 \mathbf{A} 에 대해 미분한 결과를 0으로 놓으면, 전체 beam 에너지 $\mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A}$ 를 최소화시키는 \mathbf{A} 를 다음과 같이 얻는다.

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \lambda_{MV} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E} \quad (18)$$

제한조건 $\mathbf{A}^H \mathbf{E} = 1$ 을 이용하여 λ_{MV} 를 구하면

$$\lambda_{MV} = \frac{2}{\mathbf{E}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}} \quad (19)$$

따라서, 식(19)를 식(18)에 대입하면 최적 계수 벡터는

$$\hat{\mathbf{A}}_{MV} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}}{\mathbf{E}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}} \quad (20)$$

가 되며, 여기서 (o)는 최적값을 의미한다.

식(20)을 이용하여 구한 최종 beam 에너지는 다음과 같다.

$$P_{MV}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{E}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}} \quad (21)$$

3. LP(linear prediction) 방법^[1,2,5,7]

LP 방법은 시간축 상에서 많이 사용되는 AR (autoregressive) 모델^[8]을 공간축상의 array 신호처리에 적용한 경우이다.^[1,2,5,7]

주파수 f_0 에서 m_0 번째 sensor 출력 $x_{m_0}(t)$ 의 FT를 X_{m_0} 라 하면, 이것은 나머지 sensor 출력들의 weighted linear combination으로 추정할 수 있다.

$$X_{m_0} = -\sum_{\substack{m=0 \\ m \neq m_0}}^{M-1} a_m X_m \quad (22)$$

여기서, a_m 은 추정값의 평균자승 오차를 최소화시키는 값을 가져야 하며, 이때의 평균 자승 오차는 다음과 같다.

$$e = E \left[\left| X_{m_0} + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq m_0}}^{M-1} a_m X_m \right|^2 \right] \quad (23)$$

이를 도시하면 그림 4 와 같다.

따라서, column vector $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{m_0-1} \ a_{m_0+1} \ \dots \ a_{M-1}]^T$ 일때 식(23)은 m_0 번째 sensor 출력의 gain $a_{m_0} = 1$ 로 하고 전체 beam 에너지 $\mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A}$ 를 최소화하는 것

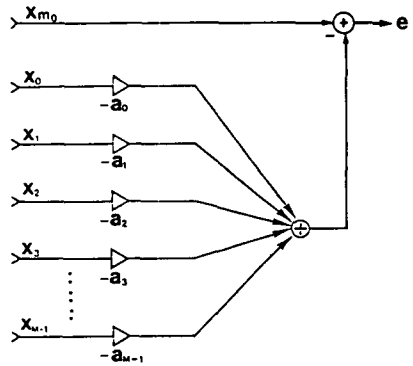


그림 4. Linear predictor

과 동일하다. m_0 번째 element만 1이고 나머지 element들은 0인 column vector \mathbf{U}_{m_0} 를 다음과 같이 정의하면,

$$\mathbf{U}_{m_0} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

제한 조건은 $\mathbf{A}^H \mathbf{U}_{m_0} = 1$ 로 된다. 주어진 제한조건을 만족하는 cost function은

$$F_{LP} = \mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} + \lambda_{LP} (\mathbf{A}^H \mathbf{U}_{m_0} - 1) \quad (24)$$

여기서, λ_{LP} 는 Lagrange multiplier이다. MV 방법에서의 마찬가지로 방법으로 최적 계수 벡터를 구하면,

$$\hat{\mathbf{A}}_{LP} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_{m_0}}{\mathbf{U}_{m_0}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_{m_0}} \quad (25)$$

이 경우에는 $P_{LP}(\mathbf{k}) = \mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A} / |\mathbf{A}^H \mathbf{E}|^2$ 로 주어지므로,^[1] 식(25)를 이용하면

$$P_{LP}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{U}_{m_0}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_{m_0}}{|\mathbf{U}_{m_0}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}|^2} \quad (26)$$

식(26)에 의해 계산되는 스펙트럼의 피크값들은 입사신호의 power의 자승에 비례하므로 MV 방법과는 달리 피크점의 크기보다 피크점 이하의 면적에 의해 입사신호의 power가 결정된다.^[1,7] 만약 (27)과 같은 수정된 스펙트럼식을 이용하면 피크의 크기에 의해 입사신호의 상대적인 power를 추측할 수 있다.

$$\hat{P}_{LP}(\mathbf{k}) = \frac{1}{|\mathbf{U}_{m_0}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}|} \quad (27)$$

여기서 (~)는 수정된 형태를 의미한다.

4. MUSIC (multiple-signal-classification)과 EV (eigen-vector) 방법

MUSIC은 R. O. Schmidt에 의해 제안된 방법으

로서^[24] autocorrelation matrix 또는 data matrix 를 SVD(singular value decomposition)^[25] 함으로써 signal subspace와 noise subspace의 두 vector subspace로 나눈 후, 두 subspace간에 직교 성질(orthogonal property)을 이용하여 spectrum을 구하는 것이다.

1 절에서 $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^P \sigma_{s_i} \mathbf{S}_i + \sigma_n \mathbf{N}$ 이므로 autocorrelation matrix는 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}(\mathbf{X} \mathbf{X}^H) \\ = \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^P \sigma_{s_i} \mathbf{S}_i + \sigma_n \mathbf{N}\right) \left(\sum_{i=1}^P \sigma_{s_i} \mathbf{S}_i + \sigma_n \mathbf{N}\right)^H\right] \quad (28)$$

잡음이 백색잡음(white noise)이고 신호와 uncorrelated되어 있다면,

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^P \sigma_{s_i}^2 \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (29)$$

가 된다. 여기서 \mathbf{I} 는 $M \times M$ identity matrix 이고, \mathbf{S}_i 는

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{k}_i\right) \\ \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{k}_i\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{k}_i\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_{M-1} \cdot \mathbf{k}_i\right) \end{bmatrix}$$

로 정의되는 signal vector로서 i 번째 신호의 방향 정보를 갖고 있다.

식(29)를 다음과 같이 표현하자.

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (30)$$

$$\text{여기서, } \mathbf{S} = \sum_{i=1}^P \sigma_{s_i}^2 \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H \\ \mathbf{W} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

이고 모두 ($M \times M$) matrix이다.

\mathbf{S} 를 SVD 하면,

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \quad (31)$$

여기서 eigenvalue는 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ 이고, eigenvector는 서로 orthonormal하다.^[2,6] 모두 $p (< M)$ 개의 신호만 들어오므로 $\lambda_i (i=1, \dots, M)$ 중에서 $M-p$ 개의 eigenvalue는 0이 될 것이다. 즉, 식(31)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \quad (32)$$

여기서, $\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_P$ 를 principal eigenvector라 하며, $\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_P$ 의 signal vector를 새로운 vector space에서 나타내게 된다. 한편, eigenvector 사이의 orthonormal 성질에 의해,

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^M \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \quad (33)$$

로 표현할 수 있으므로 식(30), (32), (33)에 의해

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H + \sigma_n^2 \sum_{i=1}^M \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \\ = \sum_{i=1}^P (\lambda_i + \sigma_n^2) \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H + \sum_{i=P+1}^M \sigma_n^2 \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^H \quad (34)$$

이 된다. 이때 식(34)의 앞 항에 해당되는 $\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_P$ 는 signal subspace, 뒤항의 $\mathbf{V}_{P+1} \dots \mathbf{V}_M$ 은 noise subspace를 구성한다.

Noise subspace eigenvector $\mathbf{V}_{P+1} \dots \mathbf{V}_M$ 은 signal vector와 orthogonal하다. 따라서, 임의의 weight α_k 에 대해

$$\sum_{k=P+1}^M \alpha_k \left| \mathbf{e}(\mathbf{k})^H \mathbf{V}_k \right|^2 = \mathbf{e}^H(\mathbf{k}) \left(\sum_{k=P+1}^M \alpha_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^H \right) \mathbf{e}(\mathbf{k}) \quad (35)$$

를 생각하자.

여기서,

$$\mathbf{e}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{k}\right) \\ \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{k}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{Z}_P \cdot \mathbf{k}\right) \end{bmatrix}$$

이고, 신호의 방향벡터 \mathbf{k}_i 에 대해 $\mathbf{e}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{S}_i$ 이므로 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i$ 일때 (35)는 0이 되고 $\left(\sum_{k=P+1}^M \alpha_k \left| \mathbf{e}^H(\mathbf{k}) \mathbf{V}_k \right|^2 \right)^{-1}$ 은 이론적으로 무한대가 된다.

이때 $\alpha_k = 1$ 로 하면 MUSIC algorithm이 되고,

$$P_{\text{MUSIC}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\mathbf{k}) \left(\sum_{k=P+1}^M \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^H \right) \mathbf{e}(\mathbf{k})} \quad (36)$$

$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k}$ 로 선택한 경우를 EV 방법이라 하며,^[1] D. H. Johnson에 의해 제안되었고,

$$P_{\text{EV}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\mathbf{k}) \left(\sum_{k=P+1}^M \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^H \right) \mathbf{e}(\mathbf{k})} \quad (37)$$

이 된다.

5. EVB (eigen-vector-based) 방법^[1,2]

이 방법은 autocorrelation matrix를 SVD 한 후 signal subspace 만을 취해 새로운 autocorrelation matrix를 구성한다. 즉,

$$\tilde{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^H \quad (38)$$

이때,

$$\tilde{\mathbf{R}}^{-1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^H \quad (39)$$

따라서, $\tilde{\mathbf{R}}$ 를 이용하여 Bartlett, MV, LP 등의 방법에 적용할 수 있다.

IV. Simulation 및 고찰

앞에서 살펴본 방법들을 이용하여 computer simulation을 한 결과는 다음과 같다. 두개의 incoherent 한 신호가 각각 5°와 -5°의 방향에서 입사되는 경우에 Bartlett 방법(그림 5(a)), MV 방법(그림 5(b)), LP 방법(그림 5(c)), EV 방법(그림 5(d)), MUSIC 방법(그림 5(e)) 그리고 EVB-LP(eigen-vector-based linear prediction) 방법(그림 5(f))의 결과가 그림 5에 나타나 있다.

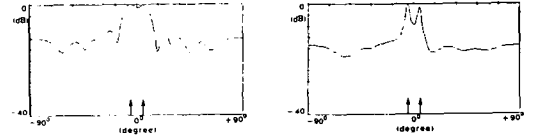
그림 5의 결과에서 화살표는 입사각을 나타내며, 가로축은 각도, 세로축은 출력 power로서 최대값으로 정규화된 후 dB를 취한 경우이다.

Simulation에 사용된 신호는 random 신호를 lower cutoff frequency=10(Hz), upper cutoff frequency=15(Hz)인 2차 Butterworth filter에 sampling frequency=300(Hz)로 통과시켜 얻은 신호이다. 모든 결과에 사용된 sensor 갯수는 10이며, sample 수는 500 sample, SNR은 0 dB이다. Spatial correlation matrix는 500 sample을 N개의 segment로 나눈 후 temporal frequency fo에 대해 DFT하여 평균을 취하여 얻었다.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^H \quad (40)$$

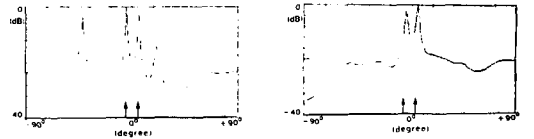
여기서 \mathbf{X}_i 는 i번째 segment를 DFT한 결과 vector이다.

Bartlett 방법의 경우에는 앞에서 제시한 3가지 평가 기준에 대해 가장 나쁜 결과를 나타낸다. MV 방법은 LP에 비해 resolution은 떨어지지만 spurious peak가 적다. 이는 다음 결과식 때문이다.^[1]



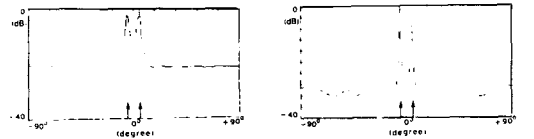
(a) Bartlett 방법

(b) MV 방법



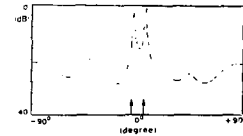
(c) LP 방법

(d) EV 방법



(e) MUSIC 방법

(f) EVB-LP 방법



(g) M=8 일때의 LP 방법

그림 5. M=10 일때의 시뮬레이션 결과

$$\frac{1}{P_{MV}(k)} = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{P_{LP}^{(m)}(k)} \quad (41)$$

여기서 $P_{LP}^{(m)}(k)$ 는 m차 model 일때 얻은 spectrum 이므로 $P_{MV}(k)$ 는 $P_{LP}^{(m)}(k)$ 가 smoothing된 결과와 같다.^[1] 따라서 위와 같은 결과가 나타난다.

LP의 경우에는 실제 신호 수 보다 많은 센서를 이용하였으므로 spurious pole에 의해 spurious peak가 나타난다. 이 경우에 그림 5(g)에서와 같이 차수를 8로 줄였을 경우(다시 말해서 센서의 수를 8로 줄였을 경우)에는 spurious peak가 줄어들지만 resolution은 떨어진다. 따라서 서론에서 설명한 것과 같이 resolution과 bias는 서로 trade-off 관계에 있다. 따라서 정확한 차수를 구할 수 있으면 매우 효과적인 것이다. 이에 대한 연구 결과로 FPE(final prediction error) criteria, AIC(akaikie information

criteria) 등이 있다.^[2] MUSIC과 EV 방법은 거의 동일하지만, MUSIC의 경우 side peak가 거의 없다. EVB-LP의 경우에는 LP보다 상당히 효과적임을 알 수 있다.

V. 결 론

여러가지 spectrum 추정 방법에 대해 알아보았다. Bartlett 방법을 제외 하고는 모두 원하는 결과를 얻었다. 하지만, side peak나 resolution상의 해결해야 할 문제는 많다. 아울러 multi-path상의 coherent 신호 문제와 센서의 gain 문제, 또한 센서 간격오차에 의한 입사 신호의 phase, amplitude 오차 문제등도 연구 되어야 하며 현재 많은 연구가 진행 중이다.

參 考 文 獻

[1] D.H. Johnson, "The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems," *Proc. IEEE*, vol 9, pp. 1080-1028, Sept. 1982.

[2] S. Lawrence Marple, *Digital Spectral Analysis with Application*, Prentice-Hall, Inc., 1987.

[3] R. A. Monzingo, T.W. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*, John Wiley & Sons, 1980.

[4] Simon Haykin, Editor, *Array Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., 1985.

[5] R.N. McDonough, "Application of the maximum-likelihood method and the maximum entropy method in array processing," in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, S. Haykin, Ed. New York: Springer, 1979, pp. 181-243.

[6] R.O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.

[7] 이원철, "협대역 신호의 입사각 추정 알고리즘," 석사학위논문 연세대학교 대학원, 1987. 12. ❁

❁ 用 語 解 說 ❁

Phoneme (음소)

음성학적으로 음소란 어떤 한 언어 집단의 음성적 구조를 관찰하고 고찰한 결과 얻는 추상화된 가설적 단위라고 알려져 있다. 그러나 음성 정보처리 분야에서는 음소란 음운(音韻)이나 단음(單音)과 거의 같은 뜻으로 쓰이는 것이 일반적이다. 즉 음소는 어떤 일의적(一義的)인 물리적 특성을 지니는 음성 현상이다. 따라서 어떤 언어는 음소에 대응하는 하나 하나의 음성 자모로 음운을 표기할 수 있다.

Picture Communication (화상 통신)

시각 정보를 주로 다루는 통신으로서 일반적으로 가시적인 정보를 전기 신호로 변환, 전송하고 이것을 수신측에서 시각 정보의 형태로 충실히 재현하는 통신 방식을 말한다. 텔레비전 전화나 공업용 텔레비전에서와 같이 텔레비전에 의한 영상 통신과 팩시밀리와 같은 화상기록 통신으로 대변할 수 있다.

Teletext : 문자(다중) 방송

텔레비전 방송파에 문자를 주체로 한 간이 도형을 포함한 정보를 모아 이동자가 필요한 정보를 선택하여 화상 표시하는 방송형 정보 안내 서비스를 CCIR에서는 텔리텍스트라 부르고 있다. 문자 정보는 텔레비전 프로그램 방송중에 수직 귀선 소거 기간의 일부를 이용하여 전송한다. 여러 나라에서 검토되고 있는 방식은 다음과 같다.

영국 : Tele text (Ceefax, Oracle)

서독 : Video Text

일본 : NHK 방식, Telescan

프랑스 : 앙티오프 (antiopé)