

# 이산 시간 가변 구조 시스템에서 준 슬라이딩 모드 조건에 관한 연구

## (A Study on the Quasi-Sliding Mode Condition in Discrete Time Variable Structure Systems)

李 康 熊\*, 崔 桂 根\*

(Kang Woong Lee and Keh Kun Choi)

### 要 約

본 논문에서는 이산 시간 가변 구조 시스템에서 상태 궤적이 스위칭 평면에 도달하도록 하고 출력의 수렴성을 보장하기 위해 가중 인자를 갖는 새로운 준 슬라이딩 모드 조건을 제시하였다. 가중 인자를 적절히 선택함으로써 상태 궤적이 스위칭 평면에 도달하도록 하고 슬라이딩 모드에 들도록 하여 파라미터 변동이나 외란에 둔감한 강점을 갖음을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 보였다.

### Abstract

In this paper, we suggest a new quasi-sliding mode condition with a weighting factor which guarantees all the states to reach switching planes and improves the convergence of the state trajectories. The result of computer simulation shows that by the suitable selection of a weighting factor, all the state trajectories reach switching planes and enter the sliding mode having the property of the insensitivity to parameter variation and disturbances.

### I. 서 론

최근에 불연속 제어 입력에 의해 스위칭 평면 상에서 시스템의 구조를 바꾸는 특징을 갖는 가변 구조 시스템(variable structure systems)에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 즉, 시스템 상태가 스위칭 평면(switching plane)을 지날 때 궤환 시스템의 구조

가 바뀌는 것으로 중요한 특징은 이 스위칭 평면 근처에서의 시스템 상태의 운동 방향이 평면 안쪽을 향하여 평면을 반복적으로 교차하는 슬라이딩 모드(sliding mode)가 존재하는 것이다. 이 모드 동안에 시스템 응답은 시스템 파라미터의 변동이나 외란에 둔감하게 되고 시스템이 슬라이딩 부분 공간에 있도록 제한을 받기 때문에 차수가 줄어든 시스템으로 동작하게 된다.<sup>1~3)</sup>

가변 구조 시스템 설계는 슬라이딩 모드의 존재 조건을 만족시키도록 하는 제어 이득을 결정하는 것과

---

\*正會員, 서울대학교 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)  
接受日字: 1988年 2月 15日

스위칭 평면을 구성하는 것으로 이 경우의 제어 이득은 상태 궤적이 처음 위치에서 슬라이딩 평면에 도달하도록 하는 도달조건(reaching condition)을 만족시켜야 하며 스위칭 평면 구성 방법은 극 배치 방법, 성능 지수 최소화 방법,<sup>14)</sup> 및 투영법<sup>15)</sup>이 제시되었다.

이산 시간 가변 구조 시스템(discrete time VSS)에 대한 연구는 아직 미진한 편인데 그 중 연속 시간 가변 구조 시스템(continuous time VSS)에서의 슬라이딩 모드 존재 조건으로부터 구한 준 슬라이딩 모드(quasi-sliding mode)의 존재 조건이 제시되었다.<sup>17)</sup> 그러나, 이 경우는 스위칭 평면 근처에서 상태 궤적의 수렴성이 보장되지 않는데 이를 보완하여 준 슬라이딩 모드의 존재 조건도 만족시키고 수렴성도 보장하는 새로운 조건이 제시되었다.<sup>18)</sup>

그러나 이들 경우 존재 조건을 만족하여도 제어 입력이 작으면 상태 궤적이 준 슬라이딩 모드에 들도록 하지 못한다.

본 논문에서는 이산 시간 가변 구조 시스템에서도 달 조건을 만족시키도록 하고 수렴성을 보장하기 위해 가중계수를 도입한 새로운 슬라이딩 모드의 존재 조건을 제시하고 그 타당성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 입증하였다.

II. 연속 시간 가변 구조 시스템

다음과 같이 표시되는 연속 시간 시스템을 고려하자.

$$\dot{X}(t) = A_c X(t) + B_c u(t) + H v(t) \tag{1}$$

여기서,  $X \in R^n$ ,  $u \in R^m$  이고 행렬  $A_c, B_c$ 의 차원과 각 성분의 변화 범위 및 외란  $v$ 의 변화 범위 및 행렬  $H$ 의 각 성분을 안다고 가정한다.

제어 입력은 다음과 같이 정의한다.

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^+ [x(t)] ; & s_i[x(t)] > 0 \\ u_i^- [x(t)] ; & s_i[x(t)] < 0 \end{cases} \tag{2}$$

여기서,  $u_i(t)$ 는  $u(t)$ 의  $i$ 번째 성분이고  $s_i[x(t)]$ 는 다음과 같이 정의되는 스위칭 초평면(switching hyperplane)들의  $i$ 번째 성분이다.

$$S = CX(t) \tag{3}$$

$S \in R^m$  이고  $C$ 는 상수 행렬로  $\text{rank}\{C\} = m$ 이다.

가변 구조 시스템의 특징은 불연속 제어 입력이 스위칭 평면( $s_i(x) = 0$ ) 상에서 그 구조를 바꾸도록 하는 것으로 평면의 양쪽 근처에서 상태 궤적(state trajectory)의 운동 방향이 평면을 향할 때 이 시스템은 슬라이딩 모드에 있다고 하며 슬라이딩 모드에

서 시스템 운동은 다음 방정식을 만족하고

$$s_i(x) = 0 \quad \text{와} \quad \dot{s}_i(x) = 0 \tag{4}$$

파라미터의 변동이나 외란에 무관하게 되는 불변성을 갖는다.<sup>11)~13)</sup>

슬라이딩 운동이  $i$ 번째 스위칭 평면상에서 일어나기 위한 조건은 다음과 같이 표시된다.<sup>11)~13)</sup>

$$s_i \dot{s}_i < 0 \tag{5}$$

슬라이딩 모드에서

$$S = CX = 0 \tag{6a}$$

$$\dot{S} = C \dot{X} = 0 \tag{6b}$$

이 성립되므로 시스템 dynamics를 나타내는 식은 제어 입력  $u$  대신 등가 제어 입력(equivalent control input)  $u_{eq}$ 를 대입하여 얻을 수 있다.

시스템 방정식(1)에서 외란  $v$ 를 0으로 하고(6b)식으로부터

$$u_{eq} = -(CB_c)^{-1} CA_c X \tag{7}$$

이 얻어지고(7)식을 외란  $v$ 를 0으로한(1)식에  $u$ 대신 대입하면

$$\dot{X} = (I - B_c(CB_c)^{-1}C) A_c X \tag{8}$$

으로 된다. 따라서 슬라이딩 모드에서 식(6a)를 이용하여  $m$ 개의 상태 변수를 나머지  $(n-m)$  상태 변수로 표시될 수 있으므로 차수 감소의 효과를 얻게 된다.<sup>12)15)</sup>

III. 이산 시간 가변 구조 시스템

연속 시간 시스템을 주기  $T$ 로 샘플링하여 얻어지는 단일 입력 이산 시간 시스템을 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) + Dv(k) \\ X &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \end{aligned} \tag{9}$$

여기서  $A \in R^{n \times n}$ 와  $B \in R^{n \times 1}$  이고 각각의 성분  $a_{ij}$ 와  $b_j$ 는 다음과 같은 범위내에서 변화되며 행렬  $D \in R^{m \times 1}$  ( $m \leq n$ )와 외란  $v$ 의 범위도 안다고 가정한다. 또 식에 포함되는 주기  $T$ 는 생략하였다.

$$\begin{aligned} a_{ij}^* - \delta a_{ij} &< a_{ij} < a_{ij}^* + \delta a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \\ b_j^* - \delta b_j &< b_j < b_j^* + \delta b_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

상태 궤적이 스위칭 초평면을 지나자마자 시스템의 구조를 바꾸는 연속 시간 시스템의 경우와는 달리 이산 시간 시스템에서는 샘플링 순간에 시스템의

구조가 바뀌게 되므로 비이상적인 슬라이딩 모드가 존재하게 되고 이를 준 슬라이딩 모드라 한다.

연속 시간 시스템에서 초평면 상에서의 슬라이딩 모드 존재 조건 (5)는 이산 시간 시스템에는 적용될 수 없으므로 새로운 이산 시간 슬라이딩 모드의 존재조건이 필요하다.

Milosavljevic<sup>[7]</sup>은 초평면 상에서 준 슬라이딩 모드가 존재하기 위한 조건을 조건식 (5)로부터 직관적으로 얻었다.

$$\{s(k+1) - s(k)\} s(k) < 0 \quad (10)$$

여기서,

$$s(k) = CX(k) \quad (11)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-1} \ 1]$$

이 조건은 준 슬라이딩 모드가 존재하기 위한 필요 조건이기 때문에 초평면 근처에서 상태 궤적의 수렴성을 보장하지 못한다. 일정한 시간 간격으로 제어 입력이 인가되기 때문에 제어 입력이 어느 한계 이상 커지면 연속 시스템의 경우와는 달리 chattering의 크기가 증가하여 궤적이 평면 주위의 일정 영역을 벗어나 발산하는 결과를 가져와 불안정하게 된다. 따라서 제어 입력에 대한 상하한이 필요하게 된다.

이와같은 문제점을 해결하기 위하여 Sarpturk et al<sup>[8]</sup>은 다음과 같은 조건을 제시하였다.

$$|s(k+1)| < |s(k)| \quad (12)$$

이 조건식은 상태 궤적이 초평면 근처의 영역내에 있도록 하기 위한 제어 입력의 상하한을 정한다.

그러나 (12)의 조건식으로부터 구한 슬라이딩 모드의 존재 조건을 만족시키는 값 중에서 제어 이득을 택하면 제어 이득이 작아서 상태 궤적이 스위칭 평면에 도달하지 못하여 준 슬라이딩 모드에 들지 못하는 경우가 있게 되므로 도달 조건이 만족되고 수렴성도 보장하기 위해서 (12)식에 가중인자 (weighting factor)를 도입한 새로운 조건을 제시한다.

$$|s(k+1)| < \lambda |s(k)| \quad (13)$$

여기서, 가중인자  $\lambda$ 는  $0 < \lambda \leq 1$  인 상수 (13)식을 두 개의 부등식으로 나누면

$$\{s(k+1) - \lambda s(k)\} \operatorname{sgn}(s(k)) < 0 \quad (14a)$$

$$\{s(k+1) + \lambda s(k)\} \operatorname{sgn}(s(k)) > 0 \quad (14b)$$

(14a)의 부등식에 의해 슬라이딩 모드가 존재 하기 위한 제어 입력의 하한 값이 정해지고 (14b)의 부등식에 의해 상태 궤적의 수렴에 필요한 제어 입력의 상한 값이 정해진다.

시스템 파라미터가 한정된 범위내에서 변할 때 원하는 제어 효과를 얻기 위해서 제어 입력  $u(k)$ 를 다음과 같이 정한다.

$$u(k) = -K_0 X(k) - \delta K |X(k)| \operatorname{sgn}(s(k)) \quad (15)$$

$$K_0 = [K_{01} \ K_{02} \ \dots \ K_{0n}]$$

$$\delta K = [\delta K_1 \ \delta K_2 \ \dots \ \delta K_n]$$

$$|X| = [|x_1| \ |x_2| \ \dots \ |x_n|]^T$$

제어 이득  $K_0$ 를 다음과 같이 정할 때  $\delta K$ 는 (14)의 부등식을 만족하는 범위내의 값으로 한다.

$$K_0 = (CB_0)^{-1} C (A_0 - \lambda I) \quad (16)$$

여기서 행렬  $A_0$ 와  $B_0$ 는 각각의 성분이  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )와  $b_j^0$  ( $j = 1, \dots, n$ )이고  $CB_0 \neq 0$ 인 경우로 한정한다.

$K_0$ 가 (16)식과 같이 주어질 때  $\delta K$ 의 하한 값과 상한 값은 부등식 (14a)와 (14b)로부터 정한다.

$$\begin{aligned} s(k+1) &= CX(k+1) \text{ 이므로 (14a)의 부등식은} \\ \{s(k+1) - \lambda s(k)\} \operatorname{sgn}(s(k)) &= \{C(A_0 - \lambda I) - CB_0 K_0\} X(k) + C(\delta A - \delta BK_0) \\ &\quad X(k) - CB \delta K |X(k)| \operatorname{sgn}(s(k)) \} \operatorname{sgn}(s(k)) < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\delta A$ 와  $\delta B$ 는 각각의 성분이  $\pm \delta a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )와  $\pm \delta b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )인 행렬이다.

(17)식에 (16)식을 대입하면

$$\{C(\delta A - \delta BK_0) X(k) - CB \delta K |X(k)| \operatorname{sgn}(s(k))\} \operatorname{sgn}(s(k)) < 0 \quad (18)$$

으로되고 부등식 (14b)는

$$\begin{aligned} \{s(k+1) + \lambda s(k)\} \operatorname{sgn}(s(k)) &= \{C(2\lambda I + \delta A - \delta BK_0) X(k) \\ &\quad - CB \delta K |X(k)| \operatorname{sgn}(s(k))\} \operatorname{sgn}(s(k)) > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

으로 된다.

(18)식으로부터  $\min(CB) > 0$ 인 경우

$$\delta K_1 > \max\{(CB)^{-1} |C(\delta A_1 - \delta BK_{01})|\} \quad (20a)$$

이고  $\max(CB) > 0$ 인 경우

$$\delta K_1 < \min\{(CB)^{-1} |C(\delta A_1 - \delta BK_{01})|\} \quad (20b)$$

여기서  $\delta A_1$ 는 행렬  $\delta A$ 의  $i$ 번째 열이고  $K_{01}$ 는  $K_0$ 의  $i$ 번째 성분 (20)식을 만족하고 부등식 (19)의 범위를 넘지 않는 값으로  $\delta K_1$ 를 정하는데 (20)식을 만족하는 값에 가깝도록 정한다.

(15)식에서  $K_0$ 는  $s(k+1) = \lambda s(k)$ 이 되도록 하는 궤환 이득으로 상태 궤적이 스위칭 평면에 도달하는

속도를 결정하며 두번째 항은 초평면 상에서 스위칭이 일어나도록 하여 파라미터의 변동 및 외란에도 불구하고 상태제적이 수렴하도록 한다.

$\lambda$  값이 작을수록 제한 이득이 커져 도달 속도가 빨라지게 되며 수렴성이 보장됨을 알 수 있다.

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

다음과 같이 표시되는 2 차의 불안정 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} X1(k+1) \\ X2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .05 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1(k) \\ X2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ .5 \end{bmatrix} v(k)$$

여기서 파라미터  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ , 와  $b_2$  는 각각  $-.2 < a_{21} < -.1$ ,  $1.0 < a_{22} < 1.2$ ,  $.05 < b_2 < .06$  의 범위내에서 변화되며  $a_{21}^0 = -.15$ ,  $a_{22}^0 = 1.1$ ,  $b_2^0 = .055$  및  $\delta a_{21} = .05$ ,  $\delta a_{22} = .1$ ,  $\delta b_2 = .005$ 로 하고 외란  $v$  는  $0 < v < 1$ 인 범위를 갖는 것으로 한다.

스위칭 평면은  $S(k) = 10X1(k) + X2(k) = 0$ 로 정하고 초기 상태  $X1(0) = 1, X2(0) = 1$ 에서 0으로 수렴하도록 하였다.

(16)식으로부터 제한 이득  $K_{o1}$  과  $K_{o2}$  를 결정하고 (19)와 (20)의 부등식으로부터  $\delta K_1$  과  $\delta K_2$  의 범위를 결정하였다.

$\lambda = 1$  일 때  $K_{o1} = -2.72$ ,  $K_{o2} = 10.90$  이고  $\delta K_1$  과  $\delta K_2$  는 각각  $1.27 < \delta K_1 < 332$ ,  $3.10 < \delta K_2 < 30$ 으로부

터  $\delta K_1 = 10$ ,  $\delta K_2 = 5$ 로 하고 그림 1에는 외란이 없는 경우에 대한 출력  $X1$ 과  $S$ 의 응답을 나타내었고 그림 4에는 그림 3과 같은 외란이 있는 경우에 대한 출력  $X1$ 과  $S$ 의 응답을 나타내었다.

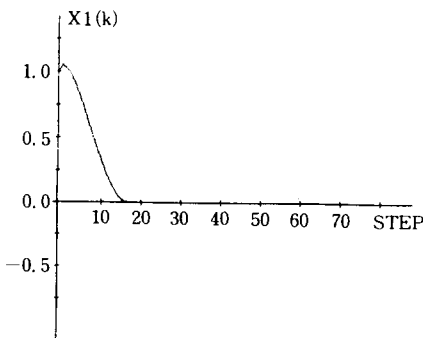
$\lambda = 0.5$  일 때  $K_{o1} = 88.18$ ,  $K_{o2} = 20$  이고  $\delta K_1$  과  $\delta K_2$  는 각각  $9.80 < \delta K_1 < 158$ ,  $4.0 < \delta K_2 < 13$ 으로부터  $\delta K_1 = 10$ ,  $\delta K_2 = 5$ 로 하고 그림 2에는 외란이 없는 경우에 대한 출력  $X1$ 과  $S$ 의 응답을 나타내었고 그림 5에는 그림 3과 같은 외란이 있는 경우에 대한 출력  $X1$ 과  $S$ 의 응답을 나타내었다.

그림에 나타난 결과로부터 제어 입력의 이득이 (13)의 조건식을 만족하더라도 출력에 대한 수렴성이 보장되지 않으며 수렴 속도도 늦음을 알 수 있다. 따라서  $\lambda$  값을 적절히 선택함으로써 이에 대한 문제점을 개선할 수 있음을 보여주었다.

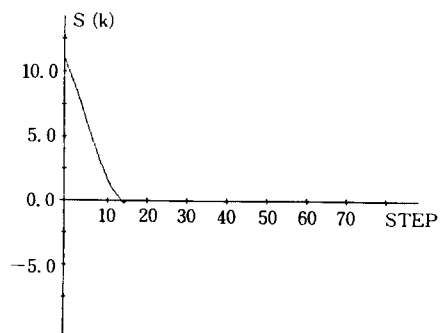
V. 결 론

이산 시간 가변 구조 시스템에서 도달 조건을 만족시키고 수렴성을 보장하기 위해 가중 인자를 도입한 새로운 준 슬라이딩 모드의 조건을 제시하였다.

시뮬레이션 결과로서도 알 수 있는 바와 같이 준 슬라이딩 모드의 존재 조건을 만족하더라도 슬라이딩 모드에 들지 못하는 경우가 있으며 특히 외란이 있는 경우에는 출력의 수렴성이 보장되지 않는다. 따라서 준 슬라이딩 모드의 존재 조건에 가중 인자를 도입함으로써 이런 문제점을 개선시켜 가변 구조 시스템의 특징인 파라미터의 변동이나 외란에 둔감한 강점을 갖게 할 수 있음을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 1. 외란이 없는 경우  $\lambda = 1$  일 때  $X1$ 과  $S$ 의 응답

(a)  $X1$ 의 응답 (b)  $S$ 의 응답

Fig. 1. Responses of  $X1$  and  $S$  with no disturbance when  $\lambda = 1$ .

(a) response of  $X1$ . (b) response of  $S$ .

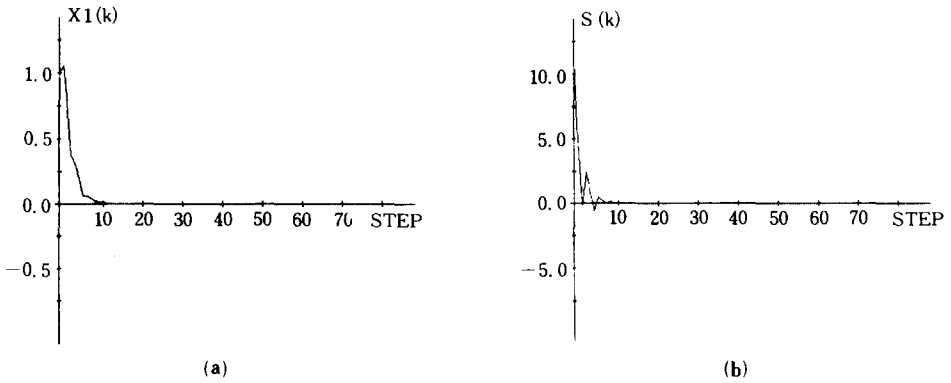


그림 2. 외란이 없는 경우  $\lambda=0.5$  일 때  $X1$ 과  $S$  의 응답

(a)  $X1$  의 응답      (b)  $S$  의 응답

Fig. 2. Responses of  $X1$  and  $S$  with no disturbance when  $\lambda=5$ .

(a) response of  $X1$ , (b) response of  $S$ .

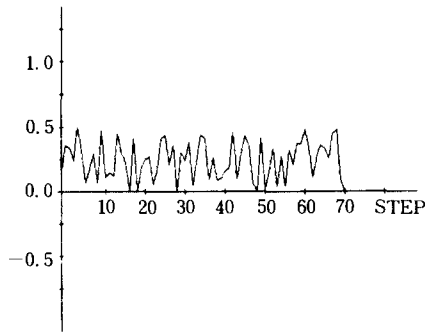


그림 3. 외란

Fig. 3. Disturbance.

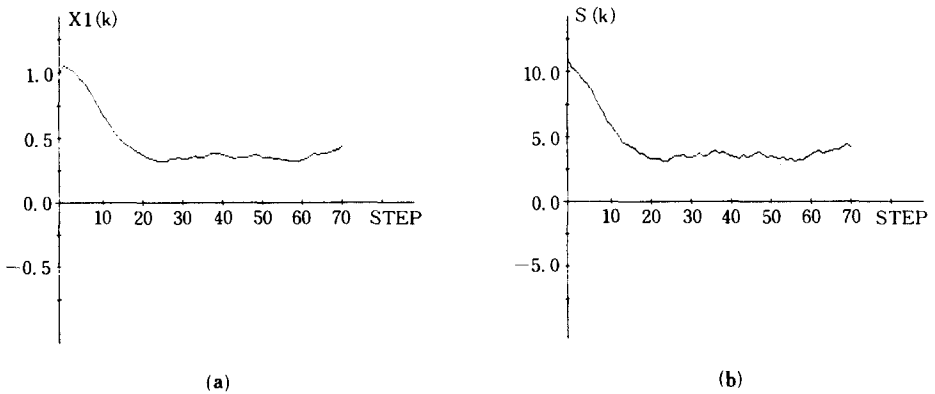


그림 4. 외란이 있는 경우  $\lambda=1$  일 때  $X1$ 과  $S$  의 응답

(a)  $X1$  의 응답      (b)  $S$  의 응답

Fig. 4. Responses of  $X1$  and  $S$  with disturbance when  $\lambda=1$ .

(a) response of  $X1$ , (b) response of  $S$ .

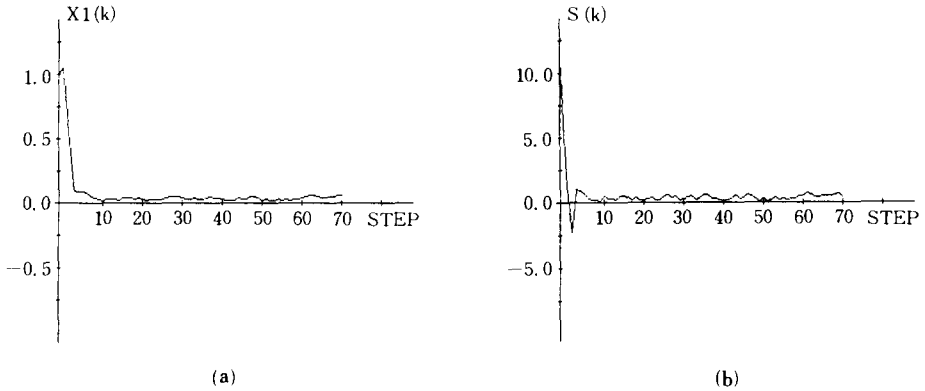


그림 5. 외란이 있는 경우  $\lambda=0.5$  일 때 X1과 S의 응답

(a) X1의 응답 (b) S의 응답

Fig. 5. Responses of X1 and S with disturbance when  $\lambda=0.5$ .

(a) response of X1. (b) response of S.

#### 參 考 文 獻

- [1] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-22, no. 2, pp. 212-222, Apr. 1977.
- [2] V.I. Utkin, "Sliding modes and their application in variable structure systems," *Mir*, Moscow, 1974 (English translation, 1978)
- [3] U. Itkis, "Control systems of variable structure," *John Wiley & Sons*, New York, 1976.
- [4] V.I. Utkin and K.D. Yang, "Methods for constructing discontinuity plane in multidimensional variable structure systems," *Autom and Remote Control*, vol. 39, no. 10, pp. 1466-1470, 1978.
- [5] O.M.E. El-Ghezawi, A.S.I. Zinober and S.A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *Int. J. Control*, vol. 38, no. 3, pp. 657-671, 1983.
- [6] A.S.I. Zinober, C.M. Dorling and Yang Xin Hua, "Design of techniques for multivariable variable structure control systems," *Proc. 25th Conference on Decision and Control*, Athens, pp. 306-311, Dec. 1986.
- [7] C. Milosarjevic, "General conditions for the existence of a quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems," *Autom and Remote Control*, vol. 46, pp. 307-314, 1985.
- [8] Sami Z. Sarpturk, Yorgo Istefanopulos, and Okyay Kaynak, "On the stability of discrete-time sliding mode control systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 10, pp. 930-932, Oct. 1987.
- [9] V.I. Utkin, "Discontinuous control system: State of art in theory and applications," *Proc. IFAC 10th World Congress on Automatic Control*, pp. 75-94, 1987.
- [10] K.K.D. Young, "Asymptotic stability of model reference systems with variable structure Control," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 279-281, Apr. 1977.
- [11] G. Ambrosino, G. Celentano, and F. Garofalo, "Variable structure model reference adaptive control systems," *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1339-1349, 1984.

---

 著 者 紹 介
 

---


**崔 桂 根 (正會員)**

1925年 2月 18日生. 1949年 2月 서울대학교 전기통신공학과 공학사학위 취득. 1951年 2月 서울대학교 대학원 전기통신공학과 공학석사학위 취득. 1959年 2月 미국 미네소타대학 전자공학과 공학석사학위 취득. 1972年 2月 서울대학교 대학원 전자공학과 공학박사학위 취득. 1956年~현재 서울대학교 전자공학과 교수, 주관심분야는 컴퓨터 제어 시스템, 적응제어, 가변구조 시스템 제어 등임.


**李 康 熊 (正會員)**

1957年 7月 7日生. 1980年 2月 한국항공대학 전자공학과 공학사학위 취득. 1982年 2月 서울대학교 대학원 전자공학과 공학석사학위 취득. 1984年~현재 서울대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. 1984年 9月~현재 동양공업전문대학 통신과 조교수. 주관심분야는 가변구조 시스템제어 임.